vwo wiskunde b
Baanversnelling

de Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen

Homepage www.wageningse-methode.nl

ISBN xxx

Illustraties Wilson Design Uden

Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

00.1 Baanversnelling

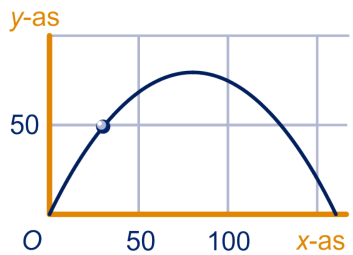
In hoofdstuk 14 Snelheid en richting, staat in **Eindpunt** het volgende.

Een bewegend punt P bevindt zich op tijdstip t in $(f(t), g(t))$.
Op tijdstip t is:
$\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ de snelheidsvector,
$\begin{pmatrix} f''(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}$ de versnellingsvector,
$\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$ de grootte van de snelheid.
De raaklijn in P aan de baan heeft richtingsvector $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$.

In het vervolg noemen we de grootte van de snelheid ook wel de **baansnelheid** waarmee het punt P beweegt.

1

Een kogelbaan
We bekijken de eerste opgave van hoofdstuk 14 nog eens.
Een kogel wordt afschoten, we veronderstellen vanaf de grond. De baan van de kogel ligt in een verticaal vlak. We brengen daarin een assenstelsel aan: de x-as horizontaal over de grond en de y-as verticaal door het uiteinde van de loop.
De snelheidsvector waarmee de kogel de loop verlaat is te ontbinden in zijn componenten langs de x- en y-as.
Neem aan dat de horizontale component grootte 20 m/s en de verticale component grootte 40 m/s heeft. Na t seconden is de kogel in $(20t, 40t - 5t^2)$; hierbij is de valversnelling afgerond op 10 m/s^2. Hiernaast staat de baan.



a Geef een formule voor de baansnelheid.
b Bereken voor welke t de baansnelheid minimaal is.
c Geef een formule voor de afgeleide van de baansnelheid en controleer hiermee je antwoord op het voorgaande onderdeel.

De afgeleide van de baansnelheid noemen we de **baanversnelling**.

In de voorgaande opgave heb je voor de baanversnelling a gevonden:
$a = \dfrac{10(t-4)}{\sqrt{t^2 - 8t + 20}}$.
De baanversnelling is 0 in de top van de kogelbaan.

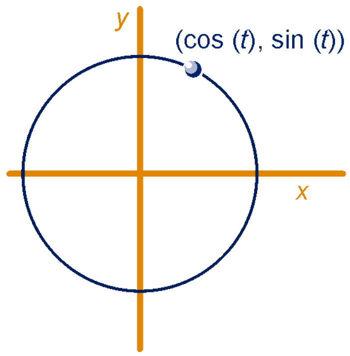
00.1 Baanversnelling

2

Een punt P beweegt volgens de standaard-cirkelbeweging, is dus op tijdstip t in $(\cos(t), \sin(t))$.

a Bereken de snelheidsvector en de versnellingsvector waarmee P beweegt.

b Bereken ook de baansnelheid en de baanversnelling van P.

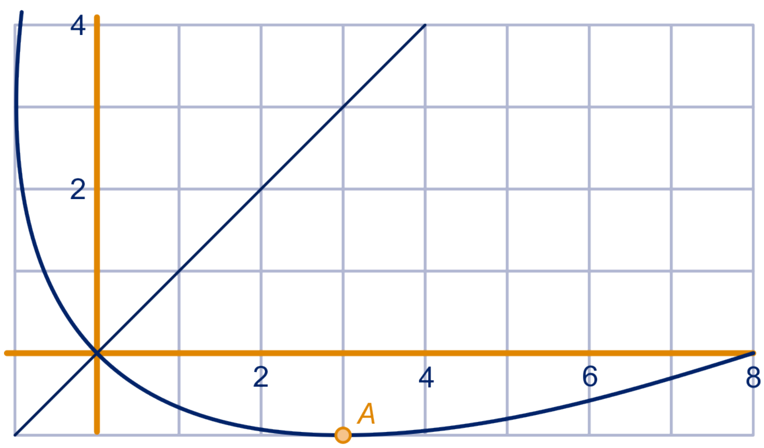


Opmerking

Een punt P beweegt volgens de standaard-cirkelbeweging.
Zonder te rekenen, kun je zeggen wat de baanversnelling van P is.
P beweegt immers met constante snelheid over de eenheidscirkel, dus de baanversnelling is 0.
De versnellingsvector is echter niet de 0-vector, maar heeft grootte 1 en is steeds naar O, het middelpunt van de eenheidscirkel gericht.

3

Een punt P beweegt volgens $(x(t), y(t)) = \left(t^2 - 2t, t^2 + 2t\right)$.
In Extra opgave 1 van hoofdstuk 14 hebben we de baan van P bekeken.



a Druk de snelheidheidsvector en de versnellingsvector van P in t uit.

b Druk nu ook de baansnelheid en de baanversnelling van P in t uit.

c Bereken de baansnelheid en de baanversnelling van P in $A(3,\text{-}1)$ exact.

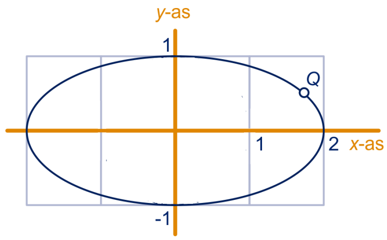
d Bereken exact op welk tijdstip de baanversnelling 0 is.

4

De bewegingsvergelijkingen van het punt Q zijn:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cdot \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}.$$

De baan is een ellips. De lange as heeft lengte 4 en de korte as lengte 2.



a Heb je enig idee in welke punten de baanversnelling 0 is? Leg uit waarom je dat denkt.

De baansnelheid van Q noemen we v.

b Toon aan $v = \sqrt{4 - 3 \cdot \sin^2(t)}$.

c Hoe kun je aan de formule uit het vorig onderdeel zien dat de baanversnelling 0 is in de snijpunten met de coördinaatassen?

De baanversnelling noemen we a.

Er geldt: $a = \dfrac{-3\sin(2t)}{2\sqrt{4 - 3\sin^2(t)}}$.

d Toon dat aan.

e Geef een formule voor de versnellingsvector.

Stelling

Een bewegend punt P bevindt zich op tijdstip t in $(f(t), g(t))$.

Als $\vec{v} \neq \vec{0}$, dan is de baanversnelling van P: $\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Hierbij is $\vec{v}$ de snelheidsvector en $\vec{a}$ de versnellingsvector waarmee P beweegt.

Opmerking

Uit bovenstaande en de stelling in paragraaf 9.3 van deel2 5vb volgt dat de baanversnelling gelijk is aan de lengte van de projectie van $\vec{a}$ op $\vec{v}$ als de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{v}$ scherp is en het tegengestelde daarvan als de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{v}$ stomp is.

5

Bewijs de stelling.

6

a Hoe kun je met behulp van de stelling inzien dat de baanversnelling 0 is in de top van een kogelbaan?

In opgave 3 b en opgave 4 d heb je een formule voor de baanversnelling moeten geven.

b Geef deze formules ook door de stelling te gebruiken.

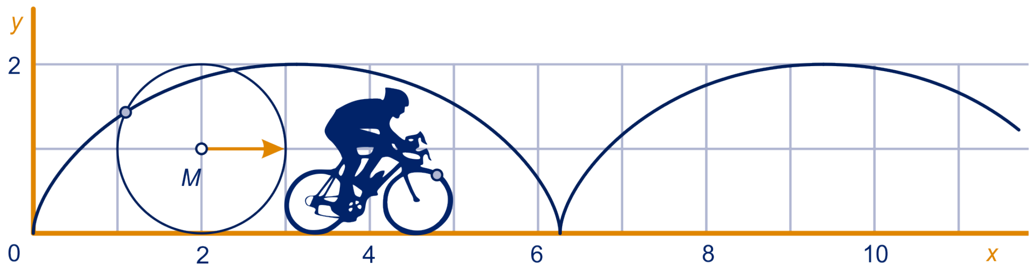
00.1 Baanversnelling

7

In hoofdstuk 14 Bewegen, hebben we de cycloïde bekeken.
Een punt P neemt deel aan twee bewegingen.

- P beweegt over de cirkel met middelpunt M in wijzerrichting en is op tijdstip $t = 0$ in het laagste punt van de cirkel.
- M beweegt over de lijn $y = 1$ in de positieve x-richting en is op tijdstip 0 in $(0,1)$.

We nemen aan dat de snelheid waarmee M beweegt gelijk is aan 1.
Hieronder is de baan getekend.



De bewegingsvergelijkingen van P zijn:

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}.$$

De baanversnelling noemen we a. Er geldt: $a = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{2 - 2\cos(t)}}$.

a Toon dat aan.

b Wat kun je zeggen over a als P op de x-as komt?

Als $t = \frac{1}{3}\pi$, vind je de formule uit onderdeel a: $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
We berekenen a op dit tijdstip ook met de stelling hierboven.

c Teken een cirkel met straal 1 met daarop het punt P op $t = \frac{1}{3}\pi$.
Teken $\vec{v}$ en $\vec{a}$ en bereken $\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$.

In onderdeel b heb je gezien dat a niet bestaat op de momenten t dat P op de x-as komt.

d Onderzoek of a op die momenten t een perforatie heeft.

00.1 Baanversnelling

Baanversnelling

1

a $x'(t) = 20$ en $y'(t) = 40 - 10t$, dus de baansnelheid $v(t) = \sqrt{20^2 + (40-10t)^2} = 10\sqrt{t^2 - 8t + 20}$.

b $t^2 - 8t + 20 = (t-4)^2 + 4$, dus minimaal als $t = 4$.

c $v'(t) = \dfrac{10(t-4)}{\sqrt{t^2 - 8t + 20}}$; als $v(t)$ maximaal is dan $v'(t) = 0$ en dat is voor $t = 4$.

2

a De snelheidsvector is $\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ en de versnellingsvector $\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$.

b De baansnelheid is 1 en de baanversnelling is 0.

3

a De snelheidsvector is $\begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t+2 \end{pmatrix}$ en de versnellingsvector is $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b De baansnelheid $v = \sqrt{(2t-2)^2 + (2t+2)^2} = \sqrt{8t^2 + 8}$ en de baanversnelling $v' = \dfrac{8t}{\sqrt{8t^2 + 8}}$.

c Het tijdstip waarop P in A is noemen we t, dan
$t^2 - 2t = 3$ en $t^2 + 2t = -1$, dus $t = -1$.
Dan $v = 4$ en $v' = -2$.

d $v' = 0 \Leftrightarrow t = 0$

4

a In de snijpunten $(2{,}0)$ en $(-2{,}0)$ met de x-as, maakt Q de scherpste bocht, dus daar is de baansnelheid minimaal (denk ik), dus de baanversnelling 0.
In de snijpunten $(0{,}1)$ en $(0{,}-1)$ met de y-as, maakt Q de flauwste bocht, dus daar is de baansnelheid maximaal, dus de baanversnelling 0.

b De snelheidsvector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$, dus $v^2 = \left|\vec{v}\right|^2 = 4\cos^2(t) + \sin^2(t) = 4\left(1 - \sin^2(t)\right) + \sin^2(t) = 4 - 3 \cdot \sin^2(t)$.

c De baanversnelling is $v'(t)$. Als v maximaal of minimaal is, dan is $v'(t) = 0$. v is maximaal als $\sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = k \cdot \pi$, dus in de snijpunten met de y-as.
v is minimaal als $\sin^2(t) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ dus in de snijpunten met de x-as.

d $a = \dfrac{-6\sin(t)\cos(t)}{2\sqrt{4 - 3\sin^2(t)}} = \dfrac{-3\sin(2t)}{2\sqrt{4 - 3\sin^2(t)}}$.

e $\vec{a} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \cdot \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

5

De baansnelheid noemen we v, dan $v = \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}$, dus de baanversnelling is $v'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}} \cdot \left(2f'(t)\,f''(t) + 2g'(t)\,g''(t)\right)$
$= \dfrac{f'(t)\,f''(t) + g'(t)\,g''(t)}{\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}}$.

Verder: $\vec{v} = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ en $\vec{a} = \begin{pmatrix} f''(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}$, dus $\vec{a} \cdot \vec{v} = f'(t)\,f''(t) + g'(t)\,g''(t)$ en

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}$.

Dus $v'(t) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$.

6

a In de top van een kogelbaan is de snelheidsvector horizontaal en de valversnelling verticaal, dus hun inproduct is 0.

b In opgave 3 geldt: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t+2 \end{pmatrix}$ en $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dus $\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\left|\vec{v}\right|} =$

$\dfrac{2(2t-2) + 2(2t+2)}{\sqrt{8t^2+8}} = \dfrac{8t}{\sqrt{8t^2+8}}$.

In opgave 4 geldt: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$ en $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$, dus $\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\left|\vec{v}\right|} =$

$\dfrac{-4\sin(t)\cos(t) + \sin(t)\cos(t)}{\sqrt{4\cos^2(t) + \sin^2(t)}} = \dfrac{-6\sin(t)\cos(t)}{2\sqrt{4 - 6\sin^2(t)}} = \dfrac{-3\sin(2t)}{2\sqrt{4 - 3\sin^2(t)}}$.

7

a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, dus de baansnelheid $v = \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$.

Dus $a = v' = \dfrac{2\sin(t)}{2\sqrt{2-2\cos(t)}} = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{2-2\cos(t)}}$.

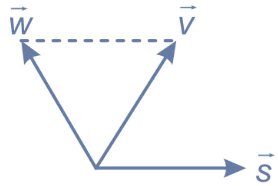
b Dan bestaat a niet, want dan $1 - \cos(t) = 0$.

c Zie figuur 1.

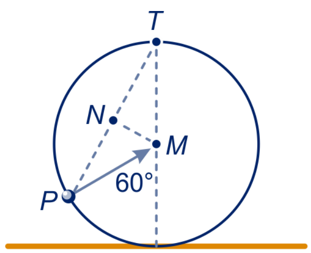
$\vec{s}$ de snelheidsvector waarmee M beweegt en $\vec{w}$ de snelheidsvector waarmee P om M draait. De resultante is $\vec{v}$. Omdat $\vec{s}$ en $\vec{w}$ lengte 1 hebben, $\vec{s}$ horizontaal gericht is en $\vec{w}$ loodrecht op PM staat, maakt $\vec{v}$ een hoek van 60° met $\vec{s}$.

Dus is $\vec{v}$ evenwijdig met lijn PT, waarbij T de top van de rolcirkel is, zie figuur 2. De versnellingsvector is $\overrightarrow{PM}$, dus de baanversnelling is lengte van de projectie van $\overrightarrow{PM}$ op lijn PT.

Die is $PN = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, want driehoek PNM is een 30-60-90-graden driehoek met schuine zijde 1.



figuur 1



figuur 2

d Teken de grafiek van a op de GR. Daaruit blijkt dat de grafiek een sprong maakt op die momenten t van -1 naar 1.

Hints

00 Baanversnelling

Index