

DRIE MAAL GELIJKBENIG

Opdracht

Zijn er gelijkbenige driehoeken die je kunt verdelen in twee driehoeken die allebei weer gelijkbenig zijn? Probeer deze driehoeken te vinden?

Toelichting voor de docent

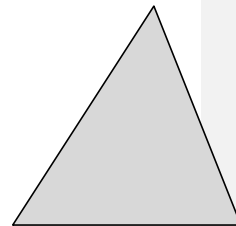
De opdracht kan op verschillende niveaus gedaan worden en kan dus in verschillende leerjaren en op verschillende momenten worden ingezet.

- Als open vraag zoals hij hierboven staat. Zaak is dat de leerlingen met hoeken kunnen omgaan, weten dat een gelijkbenige driehoek gelijke basishoeken heeft (en gelijke basishoeken gelijkbenigheid garandeert) en dat de hoekensom van een driehoek 180° is. Dat kan aan het eind van de brugklas. Je wacht gewoon af welke oplossingen er komen.
- Om zeker te weten dat alle oplossingen zijn gevonden is een systematische, analytische benadering mogelijk. De redenering is zeer de moeite waard. En ook de algebra van stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Dit laatste kan gedaan worden als toepassing/verwerking van de theorie over stelsels, maar ook als introductie daarop. Hiervoor valt te denken aan klas 3 of 4.

De opdracht hierboven is open gesteld. De vraag kan meer sturend gesteld worden.

Hulpvragen

- Is een gelijkzijdige driehoek zo'n driehoek?
- Ga na dat je de gelijkbenige driehoek hiernaast niet kunt verdelen in twee driehoek die allebei gelijkbenig zijn.
- Zoek een rechthoekige driehoek die in twee gelijkbenige driehoeken verdeeld kan worden.
- Bekijk het speciale geval dat de verdeellijn een bissectrice is.



Door proberen komt een leerling snel aan de "geodriehoek", en misschien ook nog wel aan de 36° - 72° - 72° -graden driehoek.

Een systematische aanpak gaat als volgt.

- Noem de hoeken α , α en $180 - \alpha$
- Merk op dat de lijn die de driehoek verdeelt door een hoekpunt moet gaan. Onderscheid twee gevallen: de verdeellijn gaat door het hoekpunt van een basishoek, en de verdeellijn gaat door het hoekpunt van de tophoek.
- Zeg dat de verdeellijn hoek α verdeelt in β en $\alpha - \beta$. Druk alle hoeken in de figuur uit in α en β .
- Hetzelfde in het geval de verdeellijn de hoek $180 - \alpha$ verdeelt in β en $180 - \alpha - \beta$.
- In elk van de twee deeldriehoeken moeten twee hoeken gelijk zijn. Dit geeft negen combinaties. Onderzoek de (on)mogelijkheid van elke combinatie.

Denkactiviteiten

- *Modelleren* van het probleem in termen van hoeken. De vorm van de driehoek doet in eerste instantie niet ter zake.
- Voor het *algebraïseren* gebruik je steeds de hoekensom van een driehoek. Het is nadelig als meer variabelen gebruikt worden dan strikt noodzakelijk.
- Opdat er twee gelijkbenige deeldriehoeken ontstaan, moet iets gelden in de gedaante: $(A=B \vee B=C \vee C=A) \wedge (D=E \vee E=F \vee F=D)$. Zo'n *gestructureerde* aanpak helpt.

- *Logisch redeneren* leidt tot de negen combinaties, die elk zorgvuldig nagegaan moeten worden.
- Vervolgens heb je te maken met *abstracte* stelsels van twee (lineaire) vergelijkingen van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Oplossing

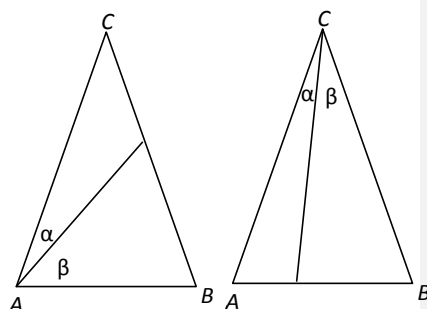
Noem de hoekpunten van de gelijkbenige driehoek A, B en C.

Zij $AC = BC$

We bekijken twee gevallen:

I: De verdeellijn gaat door A (of B),

II: De verdeellijn gaat door C.



I

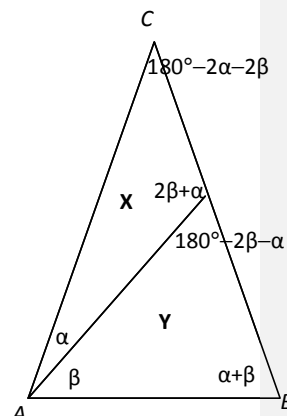
In dit geval zijn de vier andere hoeken zoals hiernaast aangegeven.

Opdat driehoek X gelijkbenig is, moeten twee van de drie hoeken gelijk zijn; daarvoor zijn twee mogelijkheden, want de derde, want de derde ($\alpha = 2\beta + \alpha$) valt af.

Opdat driehoek Y gelijkbenig is, moeten twee van de drie hoeken gelijk zijn; daarvoor zijn twee mogelijkheden, want de derde ($\beta = \beta + \alpha$) valt af.

De vier combinaties staan in de volgende matrix:

	X	$\alpha = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ ofwel $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$	$2\beta + \alpha = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ ofwel $3\alpha + 4\beta = 180^\circ$
Y			
$\alpha + \beta = 180^\circ - 2\beta - \alpha$ ofwel $2\alpha + 3\beta = 180^\circ$	$\alpha = 36^\circ$ $\beta = 36^\circ$	$\alpha = -180^\circ$ $\beta = 180^\circ$	
$\beta = 180^\circ - 2\beta - \alpha$ ofwel $\alpha = 180^\circ - 3\beta$	$\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180^\circ$ $\beta = \frac{2}{7} \cdot 180^\circ$	$\alpha = -\frac{1}{5} \cdot 180^\circ$ $\beta = \frac{2}{5} \cdot 180^\circ$	



Dit levert als oplossingen

1. $\alpha = 36^\circ$ en $\beta = 36^\circ$

2. $\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180^\circ$ en $\beta = \frac{2}{7} \cdot 180^\circ$

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

II

In dit geval zijn de vier andere hoeken zoals hiernaast aangegeven.
Opdat driehoek X gelijkbenig is, moeten twee van de drie hoeken gelijk zijn; daarvoor zijn twee mogelijkheden, want de derde

$$(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) \text{ valt af.}$$

Opdat driehoek Y gelijkbenig is, moeten twee van de drie hoeken gelijk zijn; daarvoor zijn twee mogelijkheden, want de derde

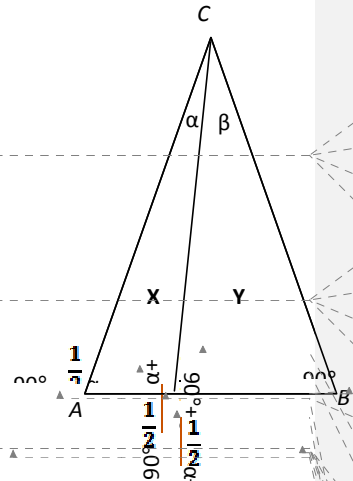
$$(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta) \text{ valt af.}$$

De vier combinaties staan in de volgende matrix:

Y \ X	$\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$ ofwel $3\alpha + \beta = 180^\circ$	$\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$ ofwel $3\alpha - \beta = 180^\circ$
	$\alpha = 45^\circ$ $\beta = 45^\circ$	$\alpha = 72^\circ$ $\beta = 36^\circ$
$\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$ ofwel $\alpha + 3\beta = 180^\circ$	$\alpha = 45^\circ$ $\beta = 45^\circ$	$\alpha = 72^\circ$ $\beta = 36^\circ$
$\beta = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$ ofwel $\alpha = 3\beta - 180^\circ$	$\alpha = 36^\circ$ $\beta = 72^\circ$	$\alpha = 90^\circ$ $\beta = 90^\circ$

Dit levert als oplossingen

1. $\alpha = 45^\circ$ en $\beta = 45^\circ$
2. $\alpha = 72^\circ$ en $\beta = 36^\circ$ of omgekeerd



Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

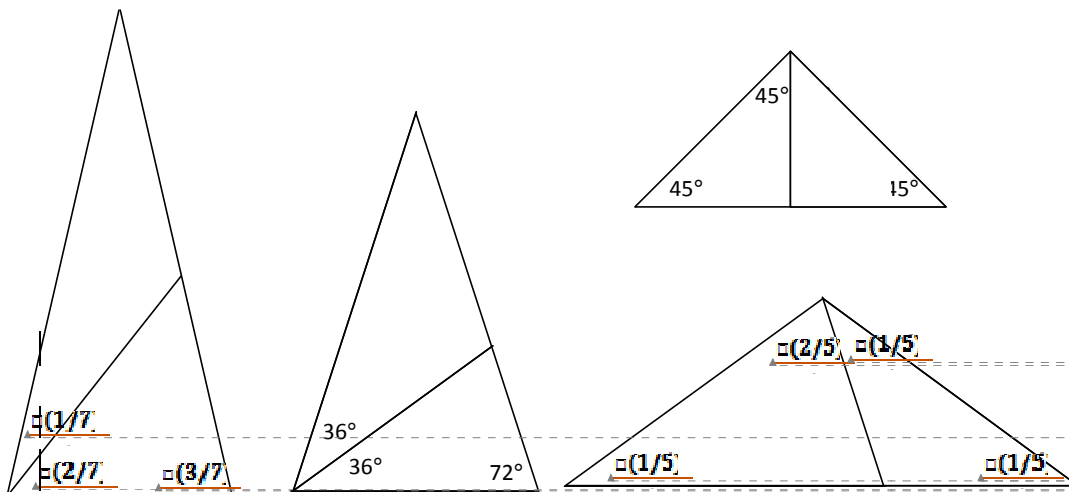
Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode



Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode

Gewijzigde veldcode