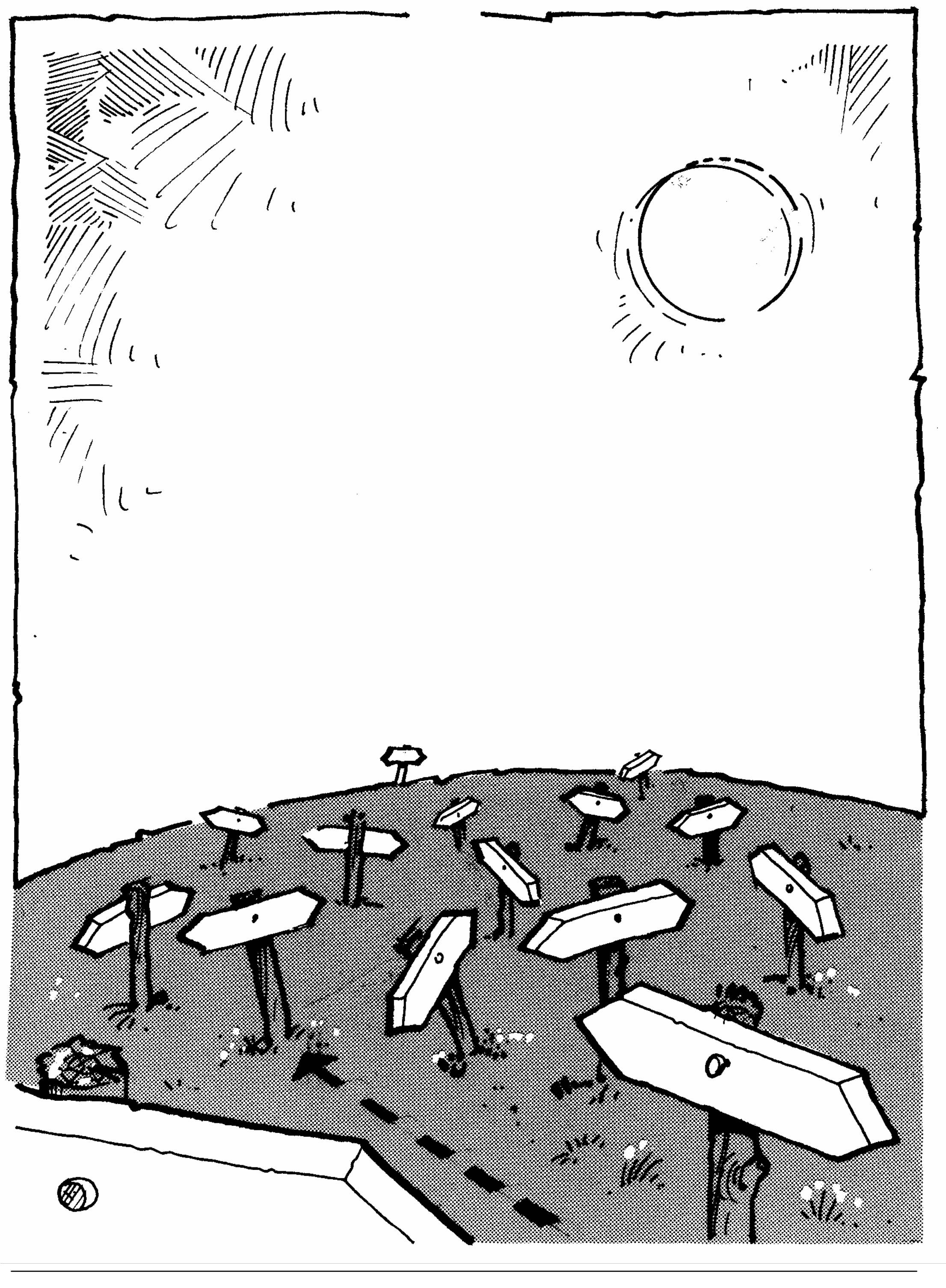
Continue dynamisch processen



Inhoudsopgave

Continue dynamische processen

✂ Opgaven met dit teken kunnen zonder bezwaar voor de grote lijn van de stof worden overgeslagen.

experimentele uitgave, sept. 2009

Colofon

© 2009 Stichting De Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

Illustraties Wilson Design, Uden

Homepage www.wageningse-methode.nl

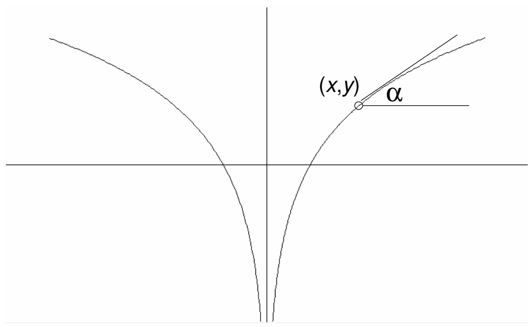
0 Intro: de gravitatieput

De gravitatieput is een trechter waarin je een munt kunt laten ronddraaien. De munt zal in een spiraal naar het midden rollen om ten slotte in het gat in het midden te verdwijnen.

Bovenstaande foto en onderstaande tekst komen van Technopolis in Mechelen.

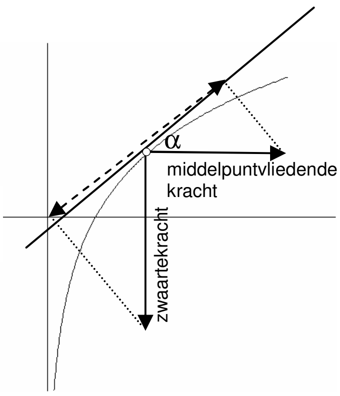
Het muntje wordt net-niet-evenwijdig met de bovenrand van de put gelanceerd, zodat het een naar binnen spiraliserende baan beschrijft. Uiteindelijk, na een opmerkelijk lange tijd, valt het muntje in het gat onderin de put.
De put heet gravitatieput omdat de baan van het muntje goed vergelijkbaar is met de baan van een komeet of een ander stuk ruimtegruis dat naar de Zon toevalt. Ook dat zal in steeds kleinere kringen om de Zon heen spiralen, om uiteindelijk verzwolgen te worden. In een nog extremere vorm is dit ook de baan van een ster die in een zwart gat gezogen wordt. De baan van de komeet naar de Zon en van de ster naar het zwarte gat zijn uiteindelijk allebei toepassingen van de wet van de zwaartekracht, ook wel de wet van de gravitatie genaamd. De baan van het muntje is ook een toepassing van die gravitatie: het gaat steeds dieper de put in door de aantrekkingskracht van de Aarde.
Het muntje beweegt steeds sneller. Of lijkt het alleen maar zo, omdat de kringen die het beschrijft steeds kleiner worden?

Wat is de vorm van de gravitatieput? Welke grafiek met je om de *y*-as wentelen om de gravitatieput te krijgen?



Stel dat de ronddraaiende munt met massa m zich in het punt (x,y) bevindt; noem de hellingshoek aldaar α.
Er werken twee krachten op de munt:

- de verticale zwaartekracht: $m \cdot g$
- de horizontale middelpuntvliedende kracht: $m \cdot \dfrac{v^2}{x}$.



Als we willen dat het muntje op elke hoogte perfecte horizontale cirkels gaat draaien, moeten de componenten van beide krachten langs de raaklijn in het punt (x,y) tegengesteld zijn.

a. Leg uit dat daarvoor moet gelden:

$$mg \sin \alpha = m \frac{v^2}{x} \cos \alpha$$

b. Leg uit dat hieruit volgt: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v^2}{g} \cdot \dfrac{1}{x}$.

Als de munt in een horizontale baan draait en dus niet naar beneden spiraalt, is de snelheid v constant.

Dus dan is $\dfrac{v^2}{g}$ constant.

c. Ken je een functie waarvoor de formule in **b** geldt?

De formule in onderdeel **b** is een zogenaamde differentiaalvergelijking. De formule geeft een verband tussen de functie y en zijn afgeleide. Over dergelijke verbanden gaat deze module.
De functie in onderdeel **c** heet een oplossing van de differentiaalvergelijking.

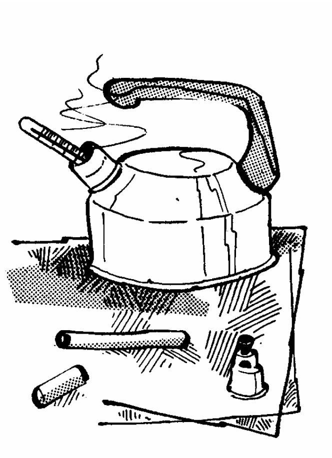
In de gravitatieput krijgt het muntje niet een horizontale beginsnelheid, maar is die iets naar beneden gericht. Daardoor zal het muntje niet in een horizontale cirkelbaan bewegen, maar zal het steeds lager komen. Daarbij neemt de snelheid van het muntje toe; het valt immers naar de aarde. Dus is v niet constant. De differentiaalvergelijking wordt dan ingewikkelder.

1 Differentiaalvergelijkingen

1 De wereldbevolking 1
Op 1 januari 2010 telt de wereld 6,84 miljard mensen en groeit jaarlijks met 1,1 %.
Veronderstel dat dit percentage de komende jaren hetzelfde blijft.
a. Bereken dan de wereldbevolking 1 januari van de jaren 2011 t/m 2015.

Merk op dat in dit model de wereldbevolking niet lineair groeit.
b. Leg dat uit.
c. Geef een formule voor de wereldbevolking in het jaar 2000+*t.*

Opmerking
De Verenigde Naties gaat ervan uit dat de bevolkingsgroei na 2020 zal afzwakken.



2 Een ketel kokend water
Een ketel kokend water wordt in de buitenlucht geplaatst. Volgens een principe uit de natuurkunde is het temperatuurverlies van de ketel per minuut evenredig met het temperatuur*verschil* tussen de ketel en zijn omgeving. De buitenlucht heeft een temperatuur van 0 °C. Wij nemen voor de evenredigheidsconstante 0,2. Dus na 1 minuut is de temperatuur 100 – 0,2 · 100 = 80 °C.
a. Bereken de temperatuur na 2, 3, 4 en 5 minuten.
b. Geef een formule voor de temperatuur in °C na *t* minuten.

Discussie
- Hoe snel de temperatuur afneemt hangt af de grootte van de temperatuur op dat moment.
- Hoe snel een bevolking toeneemt, hangt af van de grootte van de bevolking op dat moment.

Zoiets komt vaker voor:
- Hoe snel een spaarkapitaal groeit, hangt af van de grootte van het kapitaal.
- Hoe snel een griep om zich heen grijpt, hangt af van het aantal mensen dat de griep al heeft en van het aantal mensen dat de griep nog niet heeft (de vatbaren)

Dit zijn voorbeelden van een *dynamisch model*. Hiermee heb je in klas 5 al kennis gemaakt. We spreken van een *model* omdat de werkelijkheid (sterk) wordt vereenvoudigd. Bij de afkoeling van de ketel water is bijvoorbeeld de buitenlucht op constant 0°C gesteld. Bij de bevolkingsgroei zijn de aannames erg twijfelachtig dat het percentage geboortes en door migratie constant zijn. Een model beschrijft de werkelijkheid zelden helemaal goed. Toch is het zinvol om met modellen te werken, omdat ze inzicht geven hoe het proces zich globaal zou kunnen ontwikkelen.

We hebben de bevolkingtoename per heel jaar bekeken en de afkoeling per minuut. Maar de bevolking groeit voortdurend en de ketel water koelt voortdurend af. In feite zijn dit dus *continue* processen. Zo gaan we ze nu bekijken.
De Nederlandse bevolking neemt weliswaar steeds met één mens toe of af, maar omdat het over zulke grote aantallen gaat, kunnen we het toch als (nagenoeg) continu beschouwen.

De Engelse dominee Malthus publiceerde in 1798 het boek *An Essay on the principle of population*. In dat boek beschreef hij een model voor bevolkingsgroei.

Binnen een gesloten bevolking zal zowel het aantal geboorten als het aantal sterfgevallen gedurende een zeker tijdsinterval evenredig zijn:
- *met het aantal leden van de bevolking op het tijdstip t, zeg N(t) of kortweg N, en*
- *met de lengte van het tijdsinterval, zeg Δt.*

3 De wereldbevolking 2

Als dat het geboortepercentage per jaar gelijk is aan g en het sterftepercentage aan s, dan wordt de toename ΔN van de bevolking gedurende een tijdsinterval van lengte Δt gegeven door: $\Delta N = \frac{g-s}{100} \cdot N \cdot \Delta t$

a. Ga dat na.

Het getal $\frac{g-s}{100}$ heet de groei-index, ook wel het bevolkingsoverschot genoemd.
De groei-index korten we af met k.

Als we Δt tot 0 laten naderen, dan gaat $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ naar $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$. De bevolkingsgroei volgens Malthus wordt dan beschreven door: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = k \cdot N$.

Het bevolkingsoverschot is 17 per duizend mensen. Dat wil zeggen dat de wereldbevolking in één jaar tijd met 17duizendste deel toeneemt. We rekenen de tijd t in jaren sinds 1900 en de bevolking N in miljarden ($t=0$ in 1900).

Er geldt dus: $\frac{dN}{dt}=0{,}017N$.

b. Ga na dat de functie $N = a \cdot e^{0{,}017t}$ voor elke getal a hieraan voldoet.

In 1987 werd de vijfmiljardste aardbewoner geboren.
c. Bereken a.

d. Voorspel op grond van dit model wanneer de wereld haar 7miljardste bewoner kan verwelkomen.

Het is duidelijk dat er maar één functie N is waarvoor geldt: $\frac{dN}{dt}=0{,}017N$ en $N(87) = 5$.

$\frac{dN}{dt}=0{,}017N$ is een zogenaamde differentiaalvergelijking. Tezamen met de waarde $N(87) = 5$ beschrijft de differentiaalvergelijking het continue dynamische proces.

Thomas Malthus 1766-1834

Malthus was een pessimistisch econoom. Hij voorspelde dat de wereldbevolking exponentieel zou groeien en dat de voedselproductie lineair zou groeien. Er zouden daarom hongersnoden uitbreken, tenzij er maatregelen werden getroffen om de bevolkingsgroei af te remmen.

Malthus profeteerde dus overbevolking. Achteraf bleek zijn theorie niet te kloppen. De landbouw is namelijk zo sterk gegroeid dat veel meer mensen konden worden gevoed dan Malthus dacht. Maar het idee dat de bevolkingsgroei en de groei van de landbouw op elkaar moeten worden afgestemd blijft overeind. Het befaamde Rapport van de Club van Rome uit 1972 is daarop gebaseerd.

4 Afkoeling

De temperatuur van de ketel water (opgave 2) noemen we T (in °C), de tijd t (in minuten). In het begin is de temperatuur van de ketel 100 °C, dus $T(0) = 100$.
Het verlies aan warmte tussen de tijdstippen t en $t+\Delta t$ is evenredig met Δt en met $T(t)$.
Dus $T(t+\Delta t) - T(t) = c \cdot T(t) \cdot \Delta t$.

a. Laat zien dat hieruit volgt dat $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = c \cdot T$.

b. Toon aan dat $T(t) = a \cdot e^{-ct}$ hieraan voldoet voor elk getal a.

c. Bereken hoe groot in dit geval a is?

Veronderstel dat de temperatuur na 5 minuten 30 °C is.

d. Bereken de evenredigheidsconstante c.

e. Na hoeveel minuten is de temperatuur 10 °C?

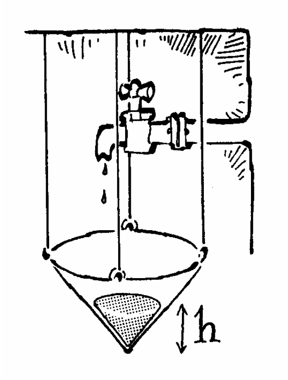
Het is duidelijk dat er maar één functie T is waarvoor geldt: $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0{,}24T$ en $T(0) = 100$.

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0{,}24T$ is een differentiaalvergelijking. Tezamen met de waarde $T(0) = 100$ beschrijft de differentiaalvergelijking het continue dynamische proces.

Wikipedia:
Een **differentiaalvergelijking** is een vergelijking voor een functie waarin, naast eventueel de functie zelf, de afgeleide van die functie voorkomt. Als er bovendien één waarde van de functie gegeven is, is de functie in het algemeen helemaal bepaald. Het is zaak die ene functie te vinden: dat is de *oplossing* van de differentiaalvergelijking.

Differentialen

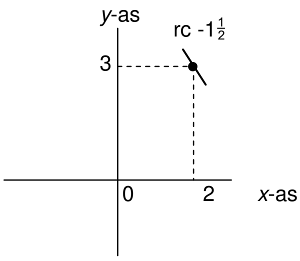
In een differentiaalvergelijking wordt een verband gelegd tussen twee *differentialen*, hierboven dT en dt. Differentialen werden geïntroduceerd door Duitse wiskundige G.W.Leibniz (1646-1716); zie ook het hoofdstuk Differentiëren van de Wageningse Methode. In de opgaven komt steeds een *verhouding* van differentialen voor, zoals $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$. Die kun je steeds lezen als de afgeleide van T als functie van t.



5 **Een trechter vullen**
We laten een kegelvormige trechter vol water lopen. De vulsnelheid is constant, dat wil zeggen dat er elke minuut evenveel water uit de kraan stroomt.
Als we beginnen is de trechter nog leeg. We bekijken de hoogte h (in dm) van de vloeistofspiegel als functie van de tijd t (in minuten). h' is de snelheid waarmee de hoogte van de waterspiegel toeneemt (in dm/min). Die snelheid is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de hoogte. Immers, als de hoogte 3 keer zo groot is, is de oppervlakte van de vloeistofspiegel 9 keer zo groot en neemt de hoogte dus 9 keer zo langzaam toe.)
In formule: $\dfrac{dh}{dt} = c \cdot \dfrac{1}{h^2}$.
De evenredigheidsconstante c hangt af van de vulsnelheid en van de tophoek van de kegel. We nemen $c = 4$.
a. Bereken h' bij $h = 1$, bij $h = 2$, bij $h = 3$ en bij $h = 4$.
b. Wat is de groeisnelheid van h, als $h = 0$?
Wat betekent dit voor de grafiek van h?

$\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{c}{h^2}$ is een differentiaalvergelijking.
De differentiaalvergelijking legt tezamen met de beginwaarde $h(0) = 0$ het continue dynamische proces vast. In dit voorbeeld kun je niet zo gemakkelijk een oplossing vinden. Hoe dat kan zullen we in het vervolg zien.

* **6** We bekijken een functie y van x waarvoor geldt:
$\dfrac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}xy$.
Door deze formule is de functie y nog niet helemaal vastgelegd.
We gaan de grafieken van mogelijke functies y benaderen.

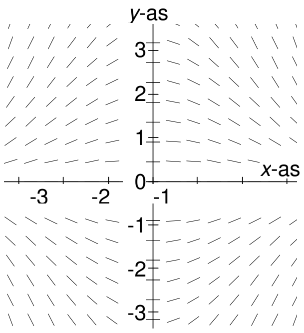


Stel dat de grafiek door (2,3) gaat. Dan is voor $x = 2$ de groeisnelheid $\dfrac{dy}{dx}$ gelijk aan $-1\frac{1}{2}$.
a. Ga dat na.

Dit is hiernaast aangegeven met een stukje raaklijn. De lengte van het stukje doet niet ter zake.

b. Bereken zo ook de groeisnelheid van y als de grafiek door de punten (2,2), (2,1), (2,0) en (2,-1) gaat.
Teken op het werkblad bijbehorende raaklijnstukjes.
c. Teken ook raaklijnstukjes in de volgende punten:
(-1,3), (-1,2), (-1,0), (0,3), (0,2), (0,1), (0,0) en (0,-1).

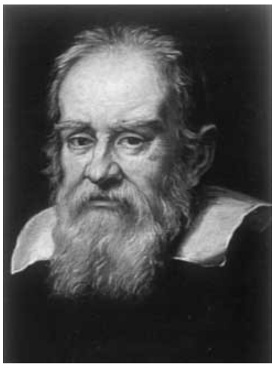
Als je genoeg raaklijnstukjes tekent, krijg je een aardig beeld van de grafieken van de mogelijke functies *y*.
Met behulp van bijvoorbeeld het computerprogramma WINPLOT kun je een heleboel lijnstukjes tekenen. Zo'n plaatje heet wel een **richtingsveld**.



d. Schets op het werkblad de grafiek van enkele mogelijke functies die voldoen aan de differentiaalvergelijking.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}xy$ is een differentiaalvergelijking. Als je de functiewaarde *y* bij een zekere waarde van *x* kent, kun je de groeisnelheid $\frac{dy}{dx}$ uitrekenen.
Als je de waarde van *y* voor een bepaalde waarde van *x* kent, bijvoorbeeld y(2) = 3, heb je een startpunt (in dit geval (2,3)). En met de differentiaalvergelijking kun je de groeisnelheid *y* ' in dat punt uitrekenen. Het verloop van de functie is dan door de differentiaalvergelijking meestal vastgelegd.
Deze gegeven waarde van *y* voor een zekere *x* heet de **beginwaarde** (ook als hij niet aan het begin van het domein van de functie ligt). Verderop in dit hoofdstuk zullen we zien welke de formules van de mogelijke functies zijn.

Een differentiaalvergelijking geeft de groeisnelheid van een functie in een punt als je de coördinaten van dat punt kent.
Een functie die in elk punt van de grafiek de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven groeisnelheid heeft, dus in het richtingsveld 'past', is een **oplossingsfunctie** van de differentiaalvergelijking.


Galileo Galilei, 1564-1642

7 De vrije val
Een steen valt van een toren. Hierbij verwaarlozen we de wrijving: er is sprake van een "vrije val". Neem aan dat de steen na *t* seconden *y* meter gevallen is.
Galileï heeft twee modellen voor de vrije val beschouwd.
Eerste model: de valsnelheid is evenredig met de valweg.
Tweede model: de valsnelheid is evenredig met de valtijd.
Een differentiaalvergelijking die bij het eerste model past is van de vorm: $\frac{dy}{dt} = -c \cdot y$, voor een of ander getal $c > 0$.

(Het minteken staat er omdat de beweging naar beneden gaat.)
a. Schrijf een differentiaalvergelijking op die bij het tweede model hoort.

b. Ga na dat functies van de vorm $y = a \cdot e^{-ct}$ aan de differentiaalvergelijking bij het eerste model voldoen.

Galilei had zich vergist: het eerste model kan onmogelijk goed zijn. We komen hier nog op terug.

De differentiaalvergelijking bij het tweede model is $\frac{dy}{dt} = -c \cdot t$, waarbij c de valversnelling is. We ronden c af op 10, zodat de differentiaalvergelijking bij het tweede model wordt: $\frac{dy}{dt} = -10 \cdot t$.
c. Bedenk oplossingsfuncties y die aan de differentiaalvergelijking bij het tweede model voldoen.

Het tweede model blijkt correct te zijn.

De toren is 50 meter hoog. De oplossingsfunctie heeft dus startpunt (0,50).
d. Bepaal de formule voor y bij het tweede model met startpunt (0,50).
e. Bereken met welke snelheid de steen de grond raakt.

Overzichtsvragen

1 *De groeisnelheid van een hoeveelheid is evenredig met de wortel uit de hoeveelheid.* Deze zin is een differentiaalvergelijking (in woorden).
a. Schrijf de differentiaalvergelijking in formulevorm.

Neem als evenredigheidsconstante 2.
b. Wat is de groeisnelheid van de hoeveelheid op het moment dat de hoeveelheid 9 is?
c. Hoe groot is de hoeveelheid als de groeisnelheid 5 is?

2 Toon aan dat $y = 3x$ oplossingsfunctie is van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 3$ en ook van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

2 Richtingsvelden

8 Bekijk opnieuw de differentiaalvergelijking van opgave **4**:

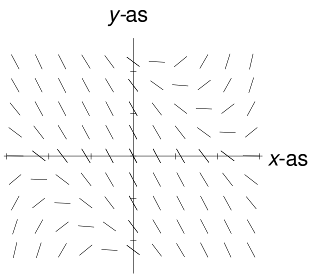
$\frac{dy}{dx} = -0{,}24\,y.$

a. Teken het richtingsveld bij deze differentiaalvergelijking.
b. Schets een oplossingsfunctie met startpunt (0,4).

9 Bekijk de functies met de eigenschap: $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

a. Schrijf op aan welke differentiaalvergelijking de functies met die eigenschap voldoen: $\frac{dy}{dx}$ = ______ · ____.
b. Teken het richtingsveld van de differentiaalvergelijking.
c. Lees uit het richtingsveld af welke functies *f* kan zijn.
d. Ga na dat voor deze functies *f* inderdaad geldt:

$f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.



* **10** Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(x+y)^2 - 2$.

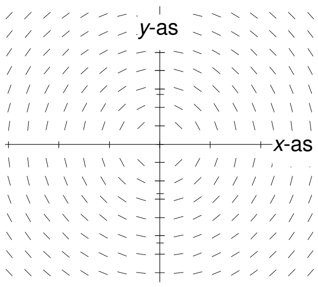
Hiernaast is het richtingsveld van deze differentiaalvergelijking getekend.
Twee oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking zijn lineair, namelijk $y = -x+2$ en $y = -x-2$.
a. Controleer dat in het richtingsveld.

Dat $y = -x+2$ inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet, kun je als volgt controleren:
Enerzijds: in elk punt van de grafiek van $y = -x+2$ geldt dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn -1 is.
Anderzijds: in elk punt van de lijn $y = -x+2$ geldt:
$\frac{1}{4}(x+y)^2 - 2 = \frac{1}{4}(x+-x+2)^2 - 2 = -1.$
Dus in elk punt van de functie $y = -x+2$ is de groeisnelheid gelijk aan de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven groeisnelheid.
We noemen dit *controle door substitutie.*

b. Controleer zo ook door substitutie dat $y = -x-2$ aan de differentiaalvergelijking voldoet.
c. Wat is de kleinste waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijnstukjes? In welke punten is de richtingscoëfficiënt gelijk aan deze minimale waarde?
d. Schets op het werkblad van enkele oplossingsfuncties de grafiek.

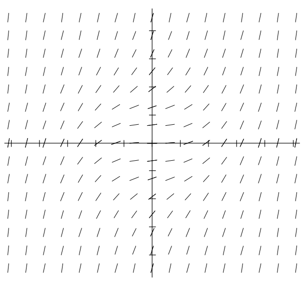
Van een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is gegeven dat hij een extreme waarde heeft in een punt met eerste coördinaat 2.
e. Hoe groot is die extreme waarde?

Een andere oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking heeft een buigpunt met eerste coördinaat -3.
f. Wat is de tweede coördinaat van het buigpunt?
Geef ook een vergelijking van de buigraaklijn.



11 Hiernaast staat het richtingsveld van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.
a. Ga voor enkele raaklijnstukjes na dat ze de juiste richting hebben.
b. Hoe zien de oplossingskrommen eruit?

We bekijken de cirkel met middelpunt (0,0) en straal 4. Een vergelijking van de cirkel is: $x^2 + y^2 = 16$. De bovenste helft van de cirkel is de grafiek van de functie
$y = \sqrt{16 - x^2}$.
c. Ga door substitutie na dat deze functie oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is.
d. Geef de formule van de functie waarvan de onderste helft van de cirkel de grafiek is.
Controleer ook door substitutie dat deze functie oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is.



* **12** $\frac{dy}{dx} = 0{,}2(x^2 + y^2)$
Hiernaast staat het richtingsveld van deze differentiaalvergelijking.
a. Schets op het werkblad van enkele oplossingsfuncties de grafiek.

Alle oplossingsfuncties zijn stijgend.
b. Hoe zie je dat aan de differentiaalvergelijking?
c. In welke punten is de richtingscoëfficiënt van het raaklijnstukje gelijk aan 1? En waar is de richtingscoëfficiënt gelijk aan 4?

13 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 4x$.

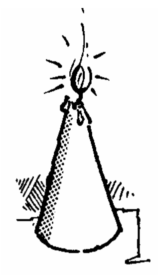
a. Teken de verzameling punten (x,y) waarin het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt 0 heeft.

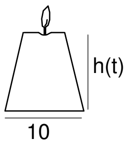
Een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking heeft als grafiek een parabool.

b. Geef een vergelijking van die parabool.

Tip. Je zoekt een oplossingsfunctie van de vorm: $y = ax^2 + bx + c$, voor zekere a, b en c, met $a \neq 0$.

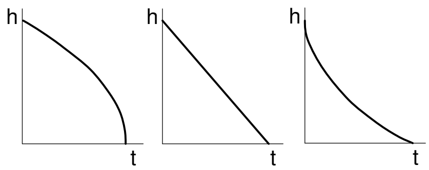
14 **Een kaars brandt op**





Een kegelvormige kaars is 20 cm hoog en aan de onderkant 10 cm breed. Hiernaast staat ook het zijaanzicht van de kaars na t branduren. We beschouwen de hoogte h van de kaars (in cm) als functie van de tijd t dat de kaars brandt (in uren).

a. Welke van de drie grafieken hieronder past het best bij deze functie?



$r(h)$ is de straal van de doorsnede van de kaars op hoogte h.

b. Toon aan dat $r(h) = 5 - \frac{1}{4}h$.

$O(h)$ is de oppervlakte van de doorsnede van de kaars op hoogte h. Er geldt: $O(h) = \pi(r(h))^2$.

Veronderstel dat de snelheid waarmee de kaars korter wordt omgekeerd evenredig is met $O(h)$. (Vind je dit een redelijke veronderstelling?)

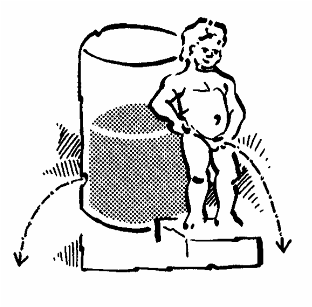
c. Laat zien dat h voldoet aan het beginwaardeprobleem

$\frac{dh}{dt} = c \cdot \frac{-1}{(20-h)^2}$ en $h(0) = 20$. Hierbij is c een positieve constante die bijvoorbeeld afhangt van de kwalititeit van de was van de kaars.

d. Toon aan dat $h = 20 - \sqrt[3]{3ct}$ oplossingsfunctie van het beginwaardeprobleem is.

De kaars is na 8 uur opgebrand.

e. Bereken c.



15 Een leegstromend vat

Een cilindervormig vat is gevuld met water. Onderin zit een gaatje waardoor water wegstroomt. We bekijken de hoogte h (in cm) van de waterspiegel als functie van de tijd t (in minuten). Een wet uit de hydrodynamica zegt:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -c \cdot \sqrt{h}\ .$$

Hierbij hangt de positieve evenredigheidsconstante c af van de vorm en grootte van het gaatje en van de straal van het vat. Voor c nemen we 2.

a. Hoe snel daalt de waterspiegel als het water nog maar 25 cm hoog staat?

b. Laat zien dat voor elke $p > 0$ de functie $h = (p - t)^2$ oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is voor $0 \leq t \leq p$.

Op tijdstip 0 staat het water 1 meter hoog.

c. Bereken p.

d. Na hoeveel minuten is het vat leeg?

Overzichtsvragen

1 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$.

a. Hoe ziet het richtingsveld eruit?

b. Wat voor soort oplossingsfuncties heeft de differentiaalvergelijking?

2 Van een richtingsveld is het volgende gegeven: in het punt P (niet O=(0,0)) staat het raaklijnstukje loodrecht op OP.

a. Teken enkele raaklijnstukjes.

b. Hoe zien de oplossingsfuncties eruit?

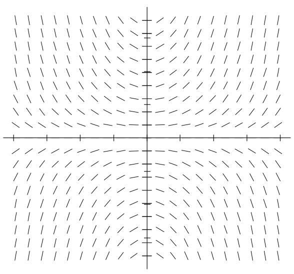
3 De methode van Euler

Leonard Euler 1707-1783

16 Van een functie f is gegeven $f(1)=3$ en $f'(1)=2$.
Hoe groot schat je op grond hiervan $f(1{,}01)$?

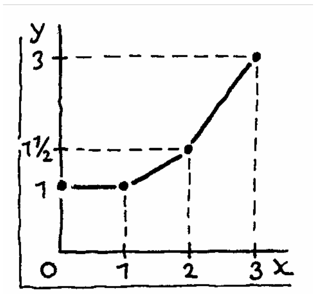
In opgave **16** heb je gebruik gemaakt van:
$f'(\mathrm{a}) \approx \dfrac{f(a+\Delta)-f(a)}{\Delta a}$, dit geeft:
$f(a+\Delta a) \approx f(\mathrm{a}) + \Delta \mathrm{a} \cdot f'(\mathrm{a})$.
Dus $f(1+0{,}01) \approx f(1) + 0{,}01 \cdot f'(1) \approx 3{,}02$.

Voor kleine Δa geldt: $f(a+\Delta a) \approx f(a) + \Delta a \cdot f'(a)$.



* **17** We bekijken de volgende differentiaalvergelijking:
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x \cdot y$.
Het richtingsveld van de differentiaalvergelijking is hiernaast getekend en staat ook op het werkblad.
f is de oplossingsfunctie met $f(0)=1$.
a. Schets de grafiek van f op het werkblad.

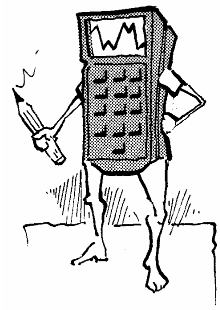
We gebruiken de regel $f(a+\Delta a) \approx f(\mathrm{a}) + \Delta \mathrm{a} \cdot f'(\mathrm{a})$, waarbij we voor Δa steeds 1 nemen om uitgaande van $f(0)$ achtereenvolgens $f(1)$, $f(2)$, ... enzovoort te benaderen.



In (0,1) heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt 0, dus $f(1) \approx f(0) + 1 \cdot 0 = 1$.
In (1,1) heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$, dus $f(2) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1\frac{1}{2}$.
In $(2,1\frac{1}{2})$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $1\frac{1}{2}$, dus $f(3) \approx 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot 1 = 3$.
b. Geef, op dezelfde manier verder gaand, een benadering voor $f(4)$.
c. Zijn de benaderingen die we hierboven voor $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ en $f(4)$ gegeven hebben groter of kleiner dan de echte functiewaarden van f in 1, 2, 3 en 4? Leg dat uit.

We hebben benaderingen van de functiewaarden van f gekregen door stappen van lengte 1 in de x-richting te nemen. Je krijgt betere benaderingen, door in de x-richting stappen van $\frac{1}{2}$ te nemen.
Je vindt dan: $f(\frac{1}{2}) \approx 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

In ($\frac{1}{2}$,1) heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$, dus $f(1) \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{8}$.
d. Welke benadering vind je zo voor $f(1\frac{1}{2})$ en $f(2)$?



GR-tip
Op de GR kun je de benaderingen van *f* handig als volgt berekenen.
Zet de GR in de Seq-mode.
Om de benaderingen van *f* bij stapgrootte 1 en startpunt (0,1) te krijgen voer je in:
nMin = 0
u(n) = u(n – 1) + 1
u(nMin) = 0
v(n) = v(n –1) + .5∗u(n –1)∗v(n –1)∗1
v(nMin) = 1
In de tabel vind je bij u(n) de eerste coördinaat en v(n) de tweede coördinaat van de grafiek van de benadering van *f* ; (u(0),v(0)) is het startpunt.

e. Hoe moet je de invoer veranderen om de benaderingen met stapgrootte $\frac{1}{2}$ uit **c** met de GR te vinden?

Hoe kleiner de stapgrootte genomen wordt, hoe beter de benaderingen zijn.
Deze manier om de oplossingsfunctie te benaderen, heet de **methode van Euler**.

We gaan *f* (2) nu nauwkeurig benaderen door stapgrootte 0,01 te nemen.
f. Schrijf op hoe je dat op de GR kunt doen.
Geef het antwoord in drie decimalen.

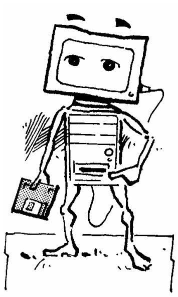
De oplossingsfunctie met startpunt (2,1) noemen we *g*
g. Schets de grafiek van *g* op het werkblad.

We benaderen de functiewaarden van *g* volgens de methode van Euler met stapgrootte $\frac{1}{2}$.
h. Schrijf op hoe je de benaderingen voor $g(\frac{1}{2})$, $g(1)$, $g(1\frac{1}{2})$, ... kunt vinden met de GR.

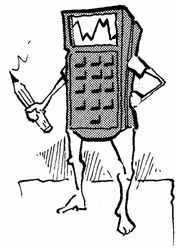
De functie *f* wordt gegeven door de formule $y = e^{\frac{1}{4}x^2}$.

i. Ga na dat $y = e^{\frac{1}{4}x^2}$ een oplossingsfunctie is van de differentiaalvergelijking die door (0,1) gaat.
Dus: $f(2) = \mathrm{e}$ exact. Vergelijk dit antwoord met de benadering uit vraag **f**.

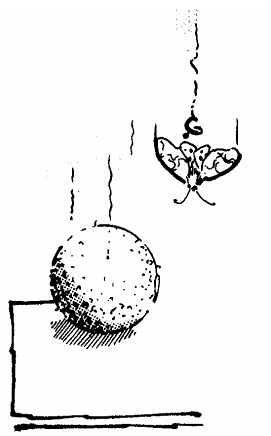
j. Ga na dat de functies $y = c \cdot e^{\frac{1}{4}x^2}$ voor elke waarde van *c* oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking zijn.
k. Geef een formule voor *g*.



Met het programma WINPLOT kun je de grafiek van een oplossingsfunctie laten teken met behulp van de methode van Euler.
Scherm: 2-dim
Verg: Diffverg: dy/dx
dy/dx = …. (vul in); ok
Een: dy/dx integraalkromme: teken



GR-tip
Het is mogelijk de Euler-benadering van een oplossingsfunctie te tekenen op de GR. We gaan uit van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x \cdot y$.
We benaderen de oplossingsfunctie f met $f(0) = 1$ met stapgrootte 0,1. Punten van de grafiek van f zijn (u(n),v(n)), waarbij u(n) en v(n) als volgt zijn ingevoerd.
nMin = 0
u(n) = u(n − 1) + .1
u(nMin) = 0
v(n) = v(n − 1) + .5∗u(n − 1)∗v(n − 1)∗.1
v(nMin) = 1
We voeren deze rijen in bij L_1 en L_2. Vervolgens tekenen we een stippengrafiek via STAT PLOT. In detail gaat dat zo.
LIST, OPS, 5, seq(u(n),n,0,20) STO L_1, ENTER
LIST, OPS, 5, seq(v(n),n,0,20) STO L_2, ENTER
We hebben nu van de eerste twintig punten de x-coördinaat in L_1 en de y-coördinaat in L_2.
Vervolgens stellen we het WINDOW in.
nMin = 0
nMax = 20
PlotStart = 0
Xmin = 0
Xmax = 2
Xscl = .1
Ymin = 0
Ymax = 3
Yscl = .1
Dan tekenen we de stippengrafiek:
STAT PLOT, Plot1, eerste type, Xlist: L_1, Ylist: L_2, Mark: ·
GRAPH

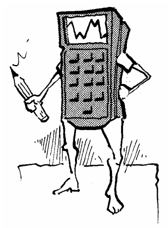


18 Mottenbal
Een mottenbal is een bolletje kamfer. Door verdamping wordt het bolletje steeds kleiner.
a. Wat is de oppervlakte van een mottenbal met een volume van 1,2 cm^3?
Een bol met straal r heeft oppervlakte $4\pi r^2$ en inhoud $1\frac{1}{3}\pi r^3$.

b. Stel een formule op voor de oppervlakte O van de mottenbal als functie van zijn volume V.

Het gewicht van de mottenbal noemen we G (in grammen), de tijd noemen we t (in weken).
Hoe groter de oppervlakte van de mottenbal, hoe groter de verdamping. We nemen aan dat de snelheid waarmee het gewicht afneemt evenredig is met de oppervlakte van het bolletje. Deze aanname leidt tot de volgende differentiaalvergelijking:
$\frac{dG}{dt} = -c \cdot G^{\frac{2}{3}}$, voor een of ander getal c.
c hangt af van de omstandigheden en kan experimenteel bepaald worden. We nemen voor $c = 0{,}3$.

Een mottenbal weegt 8 gram.
c. Bepaal met de methode van Euler hoeveel gram de mottenbal weegt na 1 week. Neem stapgrootte 0,1.



Je kunt deze waarde met de GR eenvoudig als volgt vinden.
8 ENTER
ANS + -.3∗ANS^(2/3)∗.1
Elke keer dat je op ENTER drukt, krijg je de volgende benadering.

Met het programma WINPLOT kun je het gevraagde antwoord aflezen met behulp van de optie Muis.

Overzichtsvraag

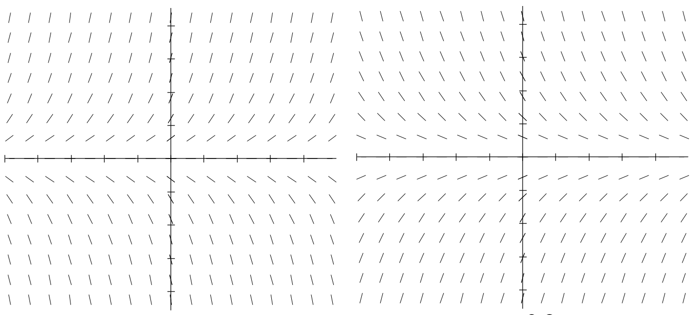
1 Y is een hoeveelheid die zich ontwikkelt in de tijd t. We gaan de methode van Euler toepassen met stapgrootte 0,1.
a. Hoe groot is $Y(t + 0{,}1)$ ongeveer, uitgedrukt in $Y(t)$ en $Y'(t)$?

Neem $\frac{dY}{dt} = \frac{0{,}2}{Y}$ en $Y(1) = 3$.
b. Hoeveel stappen heb je nodig om $Y(2{,}5)$ uit te rekenen?
c. Bereken $Y(2{,}5)$ op de GR.

4 Ongeremde groei

19 In paragraaf **1** hebben we de bevolkingsgroei volgens Malthus bekeken. De bijbehorende differentiaalvergelijking was van de vorm: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot y$, waarbij c een of andere constante is. Een oplossingsfunctie van deze differentiaalvergelijking is een voorbeeld van **ongeremde groei**.

Hieronder zie je richtingsvelden van de differentiaalvergelijking als $c = 1{,}2$ en als $c = -0{,}8$.



$c = 1{,}2$ $c = -0{,}8$

a. Wat kun je zeggen over oplossingsfuncties bij $c = 1{,}2$ in vergelijking met oplossingsfuncties bij $c = -0{,}8$?

Een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking bij $c = 1{,}2$ is: $y = \mathrm{e}^{1{,}2x}$ en een oplossingsfunctie bij $c = -0{,}8$ is: $y = \mathrm{e}^{-0{,}8x}$. Beide oplossingsfuncties gaan door (0,1).
b. Controleer dat.

c. Ga na dat de functies $y = a \cdot \mathrm{e}^{1{,}2x}$ oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking bij $c = 1{,}2$ zijn voor elke waarde van a.
Geef een formule van de oplossingsfunctie die door het punt (1,-1) gaat.
d. Geef een formule van de oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking bij $c = -0{,}8$, die door (1,1) gaat.

We bekijken de functie $y_k = \mathrm{e}^{1{,}2(x-k)}$, voor elke waarde k.
Omdat $y_0 = \mathrm{e}^{1{,}2x}$ aan de differentiaalvergelijking voldoet, voldoet elke functies y_k.
e. Hoe zie je dat aan het richtingsveld (links)?
f. Controleer door substitutie dat de functie y_k aan de differentiaalvergelijking bij $c = 1{,}2$ voldoet.

20 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$.

a. Ga na dat de functie $y = a \cdot e^{cx}$ oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking zijn, voor elke waarde van a.

We nemen $c = 1{,}5$.
b. Voor welke a is $y = a \cdot e^{1{,}5x}$ de oplossingsfunctie die door (1,2) gaat?
En voor welke a is $y = a \cdot e^{1{,}5x}$ de oplossingsfunctie die door (1,-2) gaat?
En voor welke a is $y = a \cdot e^{1{,}5x}$ de oplossingsfunctie die door (-1,-2) gaat?

Het zal duidelijk zijn dat bij gegeven waarde van c kun je bij elk punt van het vlak de waarde van a berekenen, zo dat de functie $y = a \cdot e^{cx}$ door dat punt gaat.

Ongeremde groei

Hierbij hoort de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$.
Oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking zijn van de vorm $y = a \cdot e^{cx}$.
Door elk punt van het vlak gaat een functie van deze vorm. Een oplossingsfunctie is door zijn startpunt vastgelegd.

De laatste bewering bewijzen we in de volgende opgave.

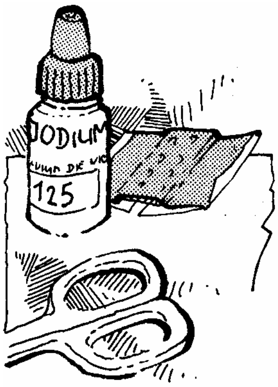
Opmerking Neem de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Dan is de functie $\begin{cases} y = 3\, e^{2x} \ \ voor \ \ x > 0 \\ y = 2\, e^{2x} \ \ voor \ \ x < 0 \end{cases}$ oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking. Deze functie ontstaat door "knippen en plakken" uit de oplossingsfuncties $y = a \cdot e^{cx}$.

21 Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$. Neem een oplossingsfunctie f van de differentiaalvergelijking.
a. Toon aan dat de functie $y = f(x) \cdot e^{-cx}$ afgeleide 0 heeft.

Vanwege **a** is de functie $y = f(x) \cdot e^{-cx}$ constant.
b. Hoe volgt nu dat $f(x)$ van de vorm $y = a \cdot e^{cx}$ is?

22 Radioactief verval



Radioactieve stoffen worden naarmate de tijd verstrijkt minder radioactief. Experimenteel is vastgesteld dat de snelheid waarmee de radioactiviteit afneemt (de vervalsnelheid) evenredig is met de hoeveelheid aanwezige stof. Als y de hoeveelheid radioactive stof (in gram) is, geldt dus:

$\frac{dy}{dx} = -c \cdot y$, voor een of ander positief getal c.

a. Verklaar het minteken in de differentiaalvergelijking.

In de geneeskunde wordt vaak jodium-125 gebruikt. De halveringstijd hiervan is 60 dagen. We rekenen de tijd t in dagen.

b. Toon aan dat $c = \frac{\ln 2}{60}$.

De differentiaalvergelijking die het verval van een andere radioactieve stof beschrijft luidt:

$\frac{dy}{dx} = -0{,}0035 \cdot y$, met t in dagen.

c. Wat is de halveringstijd van deze radioactieve stof?

23 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = c \cdot y$.

De oplossingsfuncties zijn exponentiële-groeifuncties.
Wat is het verband tussen c en de groeifactor?

De oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = c \cdot y$ zijn exponentiële groeifuncties met groeifactor e^c.

24 Afkoeling

De eerste opgave van dit hoofdstuk ging over het afkoelen van een ketel water in een omgeving van 0 °C.
Voor de temperatuur T in °C is na t minuten afkoelen, gold: $\frac{dT}{dt} = -0{,}2T$.
Veronderstel dat de begintemperatuur 80 °C is.

a. Bepaal de temperatuur van de ketel na 5 minuten afkoelen.
Doe dit ook als de begintemperatuur 60 °C is.

De afkoelingswet van Newton zegt dat de snelheid waarmee de temperatuur T afneemt evenredig is met het *verschil* met de omgevingstemperatuur. Dus als de omgevingstemperatuur 20 °C is, luidt de differentiaalvergelijking $\frac{dT}{dt} = -0{,}2(T-20)$.

De omgevingstemperatuur is 20 °C.
b. Veronderstel dat de begintemperatuur 100 °C is.
Bepaal de temperatuur van de ketel na 5 minuten afkoelen.
Doe dit ook als de begintemperatuur 80 °C en als die 60 °C is.

c. Geef de oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking $\frac{dT}{dt} = -0{,}2T$, met $T = 100$ als $t = 0$.
Geef ook de oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking $\frac{dT}{dt} = -0{,}2(T-20)$, met $T = 100$ als $t = 0$.

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c(y-p)$, waarbij p en c gegeven constanten zijn.
De oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking zijn:
$y = a \cdot e^{cx} + p$, voor alle waarden van *a.*

25 Toon aan dat de functies $y = a \cdot e^{cx} + p$ voor elke waarde van *a* oplossing zijn van de differentiaalvergelijking
$\frac{dy}{dx} = c(y-p)$.

26 Haringvangst
Internationaal is afgesproken hoeveel haring er jaarlijks gevangen mag worden: elk land heeft een zekere hoeveelheid (quotum) toegewezen gekregen. Dit om te voorkomen dat de Noordzee overbevist wordt en er na een paar jaar geen haring meer over is.
In 1988 zat er 700.000 ton haring in de Noordzee.
$H(t)$ is de haringstand (in honderdduizenden tonnen) in het jaar $1988 + t$. Als er geen haring zou worden gevangen is de groeisnelheid van H evenredig met H zelf,

met evenredigheidsconstante 0,5. Het totale jaarlijkse quotum bedraagt q (in honderdduizenden tonnen).

a. Leg uit dat geldt: $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0{,}5H - q$.

b. Bepaal de functie H, uitgedrukt in q.

Neem aan dat elk jaar het quotum q even groot is.

c. Bij welke waarden van q zal de haring in de Noordzee uitsterven?

27 Frisse lucht

In een kamer van 50 m^3 is de concentratie CO_2-gas 0,2 volumeprocent. Op zeker ogenblik zet iemand de ventilator aan. Zo wordt er per minuut 5 m^3 van de lucht in de kamer vervangen door buitenlucht met slechts 0,05% CO_2-gas. $C(t)$ is de concentratie CO_2 na t minuten in %.

De toename van C gedurende de tijd Δt noemen we ΔC.

a. Toon aan: $\Delta C = -0{,}1C \cdot \Delta t + 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot \Delta t$ voor kleine Δt.

b. Welke differentiaalvergelijking voor C volgt uit **a**?

c. Geef de formule van C, uitgedrukt in t.

d. Hoe lang duurt het voordat de CO_2-concentratie is teruggelopen tot 0,07%?

Overzichtsvragen

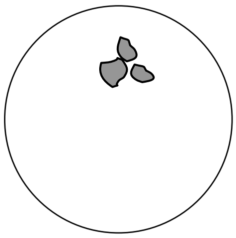
1 Van een zekere differentiaalvergelijking zijn $y = c \cdot 2^x$ oplossingsfuncties, voor elke getal c. Welke differentiaalvergelijking is dat?

2 Een kapitaal K groeit met 10% per jaar. In het begin van elk jaar wordt 10.000 euro opgenomen.

a. Vul in: het kapitaal voldoet aan de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \_\_ \ (K - \_\_)$.

b. Geef een formule voor K, als $K(0) = 100.000$.

5 Logistische groei

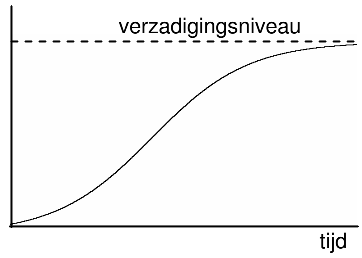


petrischaal

petrischaal - [genoemd naar de Duitse bacterioloog R.J.Petri (1852-1921*)*], platronde ondiepe schaal met overvallend deksel van kleurloos glas voor het kweken van micro-organismen
Uit van Dale

28 Petrischaal

Onder ideale omstandigheden (voldoende voedsel en warmte) breiden gistcellen zich exponentieel uit.
Op een petrischaal wordt een kolonie gistcellen geënt. Aanvankelijk zijn de omstandigheden nog ideaal: de kolonie groeit exponentieel. De schaal raakt vol, de omstandigheden worden slechter, de groei remt af. Op een gegeven moment is de schaal zo goed als vol: het verzadigingsniveau is nagenoeg bereikt.
Een grafiek bij zo'n groei heeft de volgende vorm.



Een dergelijke grafiek heet *S-kromme of sigmoïde*.

De hoeveelheid gistcellen (in grammen) op de schaal na t uur noemen we $G(t)$.
We bekijken een model voor de groeisnelheid van G.

Veronderstel dat de petrischaal maximaal 500 gram gistcellen kan bevatten, dus dat het verzadigingsniveau 500 is.

- Van de ene kant is de groeisnelheid van G evenredig met de al aanwezige hoeveelheid gistcellen, dus met G (als er tweemaal zoveel gistcellen zijn, groeit de kolonie tweemaal zo hard).
- Van de andere kant is de groeisnelheid. van G evenredig met de ruimte die er nog op de schaal is (als er half zoveel ruimte (voedsel) is, groeit de kolonie half zo hard).

Dit leidt tot de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = c \cdot G(500 - G).$$

Hierbij is c een evenredigheidsconstante.
Groei die zich volgens deze differentiaalvergelijking gedraagt, heet **logistische groei**.

We nemen voor $c = 0{,}003$.
De differentiaalvergelijking wordt:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = 0{,}003 \cdot G(500 - G).$$

a. Ga door substitutie na dat de functie

$G = \dfrac{500}{1 + 100 \cdot e^{-1,5t}}$ aan de differentiaalvergelijking voldoet.

b. Teken de grafiek van G op de GR.
Merk op dat die zo'n S-vorm heeft en dat het verzadigingsniveau 500 is.

c. Hoe kun je het verzadigingsniveau uit de formule van G afleiden?

Logistische groei

De hoeveelheid y groeit logistisch met **verzadigingsniveau M** als de groeisnelheid evenredig is met $y(M-y)$, dus

$\dfrac{dy}{dt} = c \cdot y(M-y)$, voor een of ander positief getal c.

De oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking zijn:

$$y = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-cMt}}$$

Hierbij wordt b bepaald door het startpunt van de oplossingsfunctie.

d. Laat zien dat de functies $y = \dfrac{M}{1 + b \cdot e^{-cMt}}$ aan de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dt} = c \cdot y(M-y)$ voldoen.

e. Druk b uit in de startwaarde $y(0)$.

In opgave **34** zullen we laten zien dat de oplossingsfunctie vastligt door zijn startpunt.

29 $H = \dfrac{1000}{1 + 99 \cdot e^{-0,2t}}$ is een voorbeeld van een logistische groeifunctie.

a. Wat moet je in de formule $H = \dfrac{M}{1 + b \cdot e^{-cMt}}$ voor M, b en c invullen om de gegeven functie te krijgen?

b. Teken de grafiek van H op de GR.

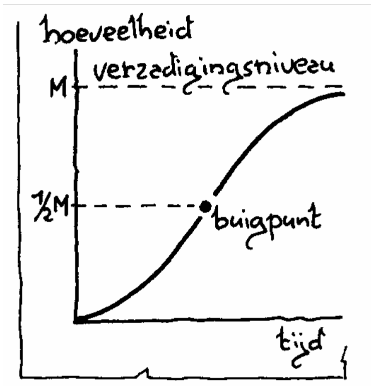
c. Schrijf de bijbehorende differentiaalvergelijking op.

d. Voor welke H is $0,0002 \cdot H(1000-H)$ maximaal?

Dus het buigpunt van de grafiek van H ligt op hoogte 500.

e. Leg dat uit.

f. Bereken de t-coördinaat van het buigpunt.



Het buigpunt bij een logistische groeifunctie ligt half zo hoog als het verzadigingsniveau.

Je kunt de differentiaalvergelijking waaraan H voldoet schrijven als:

$$\frac{dH}{dt} = 0{,}2H - 0{,}0002H^2.$$

Aan het begin van het proces ($t = 0$) is H klein. Dan speelt de term $0{,}0002H^2$ bijna geen rol, dus dan is $\frac{dH}{dt} \approx 0{,}2H$. De groei van H gaat dan ongeveer exponentieel.

g. Bepaal de groeifactor van de oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dt} = 0{,}2y$.

We nemen als beginhoeveelheid 10. De logistische groeifunctie is: $H = \frac{1000}{1 + 99 \cdot e^{-0{,}2t}}$.

Bekijk verder de exponentiële functie G met dezelfde beginhoeveelheid en met groeifactor $e^{0{,}2}$.

Dus $G(t) = 10 \cdot e^{0{,}2t}$.

h. Ga op de GR na dat G en H aanvankelijk gelijk lopen.

Logistische groei bij de differentiaalvergelijking

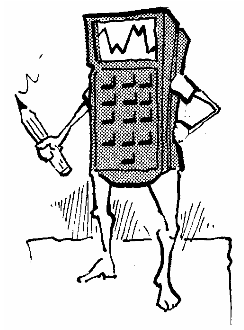
$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y(M - y)$$

is aanvankelijk nagenoeg exponentiëel met groeifactor e^{cM}.

30 De bevolkingsgroei in de VS

De tabel hieronder geeft informatie over de bevolkingsgroei in de VS.

jaar	*Aantal inwoners (x 1000)*	*jaar*	*Aantal inwoners (x 1000)*	*jaar*	*Aantal inwoners (x 1000)*
1790	3929	1850	23192	1910	91972
1800	5308	1860	31443	1920	105711
1810	7240	1870	38558	1930	122775
1820	9638	1880	50156	1940	131669
1830	12866	1890	62948	1950	150697
1840	17069	1900	75995	1960	179323



a. Maak met de GR een plaatje bij deze gegevens.
Dat gaat bijvoorbeeld als volgt.
Maak een lijst L_1 met daarin de jaartallen. Maak een lijst L_2 met daarin de aantallen inwoners. Met STAT PLOT teken je de grafiek.
In detail:

{1790,1800,1810,1820,1830,1840,1850,1860,1870, 1880, 1890,1900,1910,1920,1930,1940,1950, 1960}

STO→ L_1, ENTER

{3929,5308,7240,9638,12866,17069,23192,31443, 38558,50156,62948,75995,91972,105711,122775, 131669,150697,179323}

STO→ L_2, ENTER

STAT PLOT, 1: ENTER On, Type:stippengrafiek (linksboven), Xlist: L_1 Freq: L_2

Graph

De grafiek heeft een S-vorm. We proberen de bevolkingsgroei in de VS met een logistische groeifunctie te benaderen: $B = \dfrac{M}{1 + b \cdot e^{-cMt}}$, waarbij het aantal inwoners in duizendtallen is en t de tijd in tientallen jaren vanaf 1790.

Aanvankelijk (tot 1840), is de groei van de bevolking nagenoeg exponentieel.

b. Bepaal de groeifactor per 10 jaar uitgaande van exponentiële groei van B, waarbij $B = 3929$ in 1790 en $B = 17069$ in 1840.

Neem aan dat het buigpunt van de grafiek bij 1920 ligt.

c. Wat is het verzadigingsniveau M?

d. Bepaal nu met behulp van **b** en **c** de waarde van *c.*

e. Bereken nu ook b met behulp van het 'startpunt'.

f. Vergelijk de logistische groeifunctie met de waarden uit de tabel hierboven.

Opmerking Dat de werkelijkheid zich niet altijd volgens het voorgestelde model gedraagt is ook hier duidelijk: de VS hadden in 1999 ongeveer 265 miljoen inwoners.

De differentiaalvergelijking bij logistische groei:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y(M - y)$$

kom je ook wel in de volgende gedaante tegen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y(1 - \frac{y}{M}).$$

31 a. Laat zien dat je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y(M - y)$ kunt herschrijven tot: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y(1 - \frac{y}{M})$.
Wat is het verband tussen k en c?

b. Geef de algemene formule voor de oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{y}(1 - \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{M}})$.
Laat door substitutie zien dat deze voldoet.

De differentiaalvergelijking bij logistische groei wordt vaak zo geschreven:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y(1 - \frac{y}{M}).$$

De oplossingsfuncties zijn:

$$y = \frac{M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-kt}}.$$

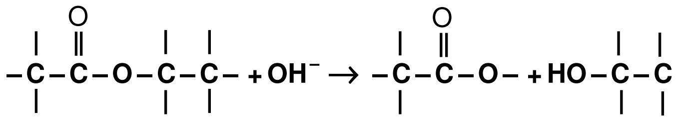
32 Gegeven is de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0{,}3y \cdot (1 - \tfrac{1}{200}y).$$

Voor een oplossingsfunctie f van de differentiaalvergelijking geldt: $f(10) = 80$.
Geef een formule voor f.

33 Verzeping

Een ester en een loog geven een zuurrest en een alcohol. Hieronder zie je een voorbeeld.



ethylethanoaat + hydroxide wordt: ethanoaat + ethanol

De concentraties (in mol per liter) van de ester en van het loog op tijdstip t noemen we respectievelijk $E(t)$ en $L(t)$. De reactiesnelheid (dat is de groeisnelheid van E) is evenredig met de concentratie van de ester en met de concentratie van het loog. Dus $E' = -c \cdot E \cdot L$ waarbij c een positieve evenredigheidsconstante is.
De beginconcentraties zijn gegeven:
$E(0) = 0{,}005$ en $L(0) = 0{,}01$.
Op elk tijdstip is er evenveel van de ester als van het loog omgezet: $E(0) - E(\text{t}) = L(0) - L(\text{t})$.
Bij een zekere temperatuur is $c = 0{,}06$ liter per molsec.
Uit de gegevens valt het volgende beginwaardenprobleem af te leiden:
$E' = -0{,}06 \cdot E \cdot (0{,}005 + E)$ met startwaarde $E(0) = 0{,}005$.

a. Leg dat uit.
b. Los dit beginwaardenprobleem op, dat wil zeggen geef de formule van $E(t)$.
c. Teken de grafiek van E op de GR.
Waarom lijkt die niet op een logistische groeikromme?
d. Na hoeveel tijd is 50% van de ester omgezet?
Deze tijdsduur wordt de *halfwaardetijd* van de reactie genoemd.

⌘ **34** Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y(M - y).$$

Voor een oplosingsfunctie f van de differentiaalvergelijking geldt: $f'(t) = cMf(t) - c(f(t))^2$.
a. Laat dat zien.
b. Laat zien dat daar uit volgt: $-\dfrac{f'(t)}{(f(t))^2} = -cM \cdot \dfrac{1}{f(t)} + c.$

We bekijken de functie $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

c. Laat zien dat $g'(t) = -\dfrac{f'(t)}{(f(t))^2}$.

Uit **b** en **c** volgt dat g oplossingsfunctie is van de differentiaalvergelijking: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{cM} \cdot (y - \dfrac{1}{M})$.

d. Laat dat zien.
In paragraaf **4 Ongeremde groei** hebben we gezien dat g dan een formule moet hebben van de vorm:

$$g(t) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{e}^{-cMt} + \frac{1}{M}.$$

e. Laat zien dat hieruit volgt: $f(t) = \dfrac{M}{1 + aM \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}$.

Hiermee hebben we dus aangetoond dat de oplossingsfuncties de in **e** voorgeschreven vorm hebben. Bij elke startwaarde is slechts één waarde van a mogelijk, de oplossingsfunctie van een logistische groeifunctie ligt dus vast door zijn startwaarde.

Overzichtsvragen

1 Teken de grafiek van de functie $y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}$ op de GR.
a. De grafiek heeft twee horizontale asymptoten. Welke?
b. Ga langs algebraïsche weg na dat $y(t)$ en $y(-t)$ gemiddeld $\frac{1}{2}$ zijn.
Wat betekent dat voor de grafiek?

Dit is (de meest eenvoudige) logistische groeifunctie.
c. Geef de bijbehorende differentiaalvergelijking.

2 Een logistische groeifunctie voldoet aan de differentiaalvergelijking $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 8y - 2y^2$.
a. Wat is het verzadigingsniveau?
b. Wat is de grootste groeisnelheid?

De enige oplossingsfuncties waarvan de grafiek een horizontale raaklijn heeft, zijn twee constante functies.
c. Welke functies?
Hoe zie je dat aan de differentiaalvergelijking?

6 Gemengde opgaven

35 Afbraak van penicilline

Ter bestrijding van een infectie begint een patiënt aan een penicillinekuur die bestaat uit het innemen van pillen. Iedere keer na het innemen van een pil stijgt de concentratie penicilline in het bloed met 350.000 eenheden per milliliter. Aan het begin van de kuur zit er geen penicilline in het bloed van de patiënt. De penicilline wordt afgebroken met een snelheid die evenredig is met de concentratie:

$$\frac{dP}{dt} = -0{,}3 \cdot P.$$

Hierbij is t de tijd (in uren) en P de concentratie penicilline (in eenheden per milliliter). De concentratie penicilline mag niet onder de 100.000 eenheden per milliliter komen.

Bereken hoeveel uur na het innemen van de eerste pil de tweede, derde en vierde pil moeten worden ingenomen. Geef je antwoorden in gehele uren.

Profi wiskunde B 1998I

36 Radioactief verval

Een manier om de ouderdom van organisch materiaal vast te stellen is de zogenaamde koolstof-14 methode. In levende organismen zit koolstof-12 en koolstof-14 in een vaste verhouding. Zodra het organisme sterft, vervalt het radioactieve koolstof-14. Het gehalte koolstof-14 noemen we K (in procenten van de oorspronkelijke hoeveelheid), de tijd t rekenen we in jaren vanaf het moment van sterven van het organisme.

De groeisnelheid van K is evenredig met K zelf.

a. Welke differentiaalvergelijking volgt hieruit voor K?

b. Is de evenredigheidsconstante c positief of negatief?

c. Wat is de beginwaarde van K? Met andere woorden, wat is $K(0)$?

d. Stel een formule op voor $K(t)$ uitgedrukt in c.

De halfwaardetijd is de tijd waarin K wordt gehalveerd. Voor koolstof-14 is de halfwaardetijd 5730 jaar.

e. Bereken c.

37 Liften

Een student zonder OV-jaarkaart lift elke dag naar de universiteit. De ene dag heeft hij snel een lift, de andere dag duurt dat langer. De kans dat hij langer dan t minuten moet wachten om een lift te krijgen, noemen we $w(t)$.

a. Leg uit dat $w(0) = 1$.
b. Maak aannemelijk dat voor alle getallen a en b geldt: $w(a) \cdot w(b) = w(a + b)$.

Uit **b** volgt: $w(t + \Delta t) = w(t) \cdot w(\Delta t)$, voor alle Δt en dus:

$$\frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} = w(t) \cdot \frac{w(0 + \Delta t) - w(0)}{\Delta t}.$$

c. Ga dat na en leid eruit af: $w'(t) = c \cdot w(t)$, waarbij $c = w'(0)$.

De ervaring leert dat de wachttijd in een kwart van de gevallen langer is dan 10 minuten.
d. Geef een formule voor $w(t)$.

38 Luchtdruk

De luchtdruk (in pascal) is gelijk aan het gewicht van de kolom lucht die zich boven een vierkante meter oppervlak bevindt. Volgens de wet van Boyle is de snelheid waarmee de luchtdruk afneemt bij toenemende hoogte boven het zeeniveau evenredig met de luchtdruk.

Dit leidt tot de differentiaalvergelijking $\frac{dp}{dh} = c \cdot p$, waarbij p de luchtdruk in hectopascal is en h de hoogte boven het zeeniveau in meters.
De luchtdruk op zeeniveau is 1030 hectopascal en op 5 km boven het zeeniveau 570 hectopascal.

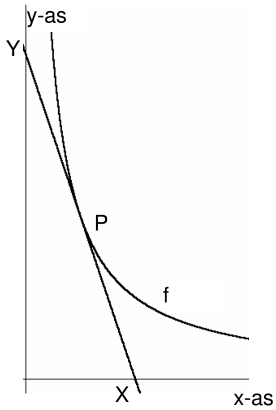
Bepaal de hoogte met luchtdruk 770 hectopascal.

39 Algen

In een poel leeft een algenpopulatie. De hoeveelheid algen die in de poel kan leven kent een natuurlijke bovengrens, zeg M. Hierdoor vindt geremde groei plaats. Noem $A(t)$ de omvang van de algenpopulatie op dag t, uitgedrukt in procenten van M. De groei van A wordt extra geremd doordat in de poel visjes leven die algen eten. Hierdoor verdwijnt een constante hoeveelheid algen per dag uit de poel. Er geldt nu:
$\frac{dA}{dt} = c \cdot A(1 - \frac{A}{100}) - v$, waarbij c en v positieve constanten zijn. Neem aan dat $A(0) = 70$, $c = 0{,}5$ en $v = 10$.
a. Benader $A(10)$ met de methode van Euler. Neem 1 als stapgrootte. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
b. Bereken uit de gegeven differentiaalvergelijking op welk percentage van M de algenpopulatie zich zal stabiliseren. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Wiskunde B Profi 1998II

40 In elk punt P van de grafiek van de functie f hiernaast geldt: de raaklijn in P aan de grafiek van f snijdt de x-as in X en de y-as in Y zó, dat P het midden van lijnstuk XY is.



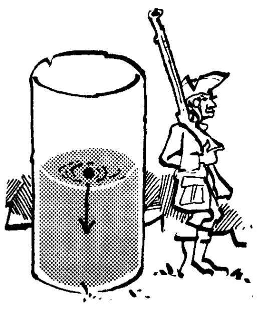
Gegeven is de differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

a. Laat zien dat f oplossingsfunctie is van de differentiaalvergelijking.

b. Toon aan dat de functies $f(x) = \frac{c}{x}$, waarbij c een willekeurig getal is, oplossingsfuncties zijn van de differentiaalvergelijking.

c. Teken op de GR de grafiek van een functie die door (2,3) gaat.

41 Val met wrijving



Een kogeltje valt in een bak met een of andere vloeistof. De snelheid van het kogeltje, t seconden nadat het in die vloeistof is gekomen, is $v(t)$ m/s. De val van het kogeltje wordt versneld door de gravitatiekracht en vertraagd door een wrijvingskracht. We nemen aan dat die evenredig met de snelheid is. Dit leidt tot de differentiaalvergelijking:

$\frac{dv}{dt} = -f \cdot v + 10$,waarbij f een positieve evenredigheidsconstante is.

Hierbij hebben we de valversnelling op 10 m/s^2 afgerond. De wrijvingsconstante f is afhankelijk van de "stroperigheid" van de vloeistof. (De opwaartse druk is verwaarloosd.)

a. Geef de algemene formule voor een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking.

De snelheid van het kogeltje wordt na enige tijd nagenoeg constant: 5 m/s.

b. Bereken hieruit f.

De snelheid waarmee het kogeltje in de vloeistof komt is 3 m/s.

c. Geef de formule van de oplossingsfunctie

De in de vloeistof afgelegde weg na t seconden noemen we $s(t)$.

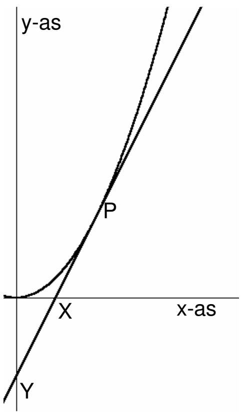
d. Geef een formule van $s(t)$ en bereken hiermee hoe diep het kogeltje na 20 seconden gevallen is.

e. Teken de grafiek van s op de GR.

De snelheid van het kogeltje wordt op den duur nagenoeg constant.

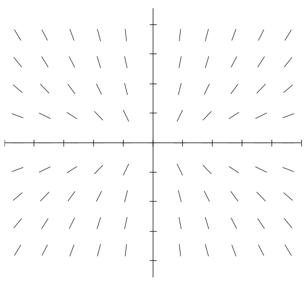
f. Hoe zie je dat aan de grafiek van s?
g. Geef een formule van de rechte lijn waarop de grafiek van s steeds meer lijkt.

42 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 2y - y^2$.
f is de oplossingsfunctie met $f(3) = 1$.
a. Geef een formule van f.
b. Hoe kun je aan de differentiaalvergelijking zien dat (3,1) een buigpunt van de grafiek van f is?



43 In elk punt P van de grafiek van de functie f hiernaast geldt: de raaklijn in P aan de grafiek van f snijdt de x-as in X en de y-as in Y zó, dat X het midden van lijnstuk PY is.

Gegeven is de differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$.
a. Laat zien dat f oplossingsfunctie is van de differentiaalvergelijking.

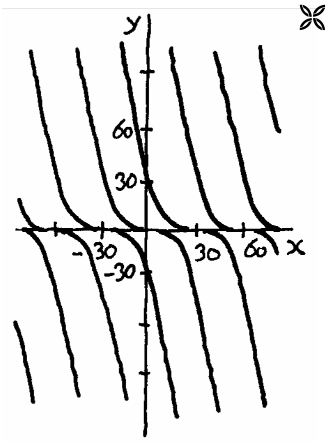


Hiernaast is het richtingsveld van de differentiaalvergelijking getekend. Het lijkt erop dat de oplossingsfuncties kwadratische functies met top (0,0) zijn.
b. Geef een formule van de kwadratische functie, met top (0,0) die door (1,3) gaat en laat zien dat deze oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is.

44 Glas
In de glastuinbouw is bekend dat licht aan intensiteit verliest wanneer het door een glasplaat valt. De afstand die het licht door het glas aflegt in mm noemen we s en de intensiteit I die voldoet aan de differentiaalvergelijking $\frac{dI}{ds} = -k \cdot I$, hierbij is k de uitdovingscoëfficiënt.
Een glasplaat van 3 mm dik laat 40% van het (loodrecht) erop vallende licht door.
Bereken k.

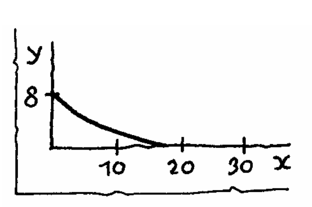
45 De Italiaan Volterra (1860-1940) heeft wiskundige modellen opgesteld die gebruikt worden bij populatievoorspellingen in de biologie. In een van deze modellen ging hij uit van twee vissoorten: R roofdieren en P prooidieren in een zeker gebied.
Volterra nam aan dat bij afwezigheid van roofdieren, het aantal prooidieren exponentieel zou toenemen, dus:
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = k \cdot P$, waarbij k een evenredigheidsconstante is.
Als er wel roofdieren zijn, zal de factor k afhankelijk zijn van het aantal roofdieren: hoe groter het aantal roofdieren, hoe kleiner de factor k. Volterra ging uit van een lineair verband: $k = a - bR$. Dit geeft de differentiaalvergelijking: $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (a - bR) \cdot P$.
Op dezelfde manier vond hij voor de groei van het aantal roofdieren: $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = (cP - d) \cdot R$.
a. Verklaar waarom $c > 0$ genomen moet worden.

We kiezen $a = 50$, $b = 2$, $c = 0{,}04$ en $d = 3$.
Op een gegeven moment zijn er 20 roofdieren en 60 prooidieren.
b. Geef een schatting van het aantal prooidieren en het aantal roofdieren 0,1 tijdseenheid later.
c. Bij welk aantal prooi- en roofdieren zullen beide populaties volgens dit model constant blijven?



46 Meer oplossingen door een punt
We bekijken opnieuw de differentiaalvergelijking bij de mottenbal (opgave **18** van paragraaf **3**).
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -0{,}3 \cdot y^{\frac{2}{3}}$.
We definiëren de functies y_k door $y_k = (k - 0{,}1x)^3$.
a. Laat zien dat alle functies y_k oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking zijn.

Hiernaast zijn de grafieken van enkele van deze oplossingsfuncties y_k getekend. Maar dat zijn in elk geval niet alle oplossingsfuncties!
b. Ga na dat de nulfunctie (dat is de functie die constant de waarde 0 heeft) ook een oplossing is.

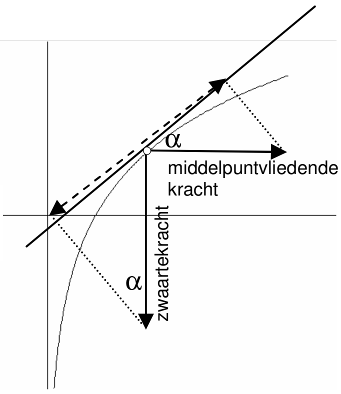


En er zijn nog meer oplossingen. Bijvoorbeeld de functie die ontstaat door een stuk van $y = (2 - 0{,}1x)^3$ aan een stuk van de nulfunctie te 'plakken':

$$\begin{cases} y = (2 - 0{,}1\,x)^3 \text{ als } 0 \le x \le 20 \\ y = 0 \text{ als } x > 20 \end{cases}.$$

En deze functie beschrijft precies het gewicht y van de mottenbal van opgave **18** als functie van de tijd x. Op tijdstip 20 wordt het gewicht 0 en blijft het 0!
Bij deze differentiaalvergelijking gaan er door alle punten van de x-as meer dan één oplossingsfunctie. In deze punten kun je van de ene oplossingsfunctie "overstappen" op de andere. Er zijn dus meerdere oplossingen van hetzelfde beginwaardeprobleem. Uit de context volgt welke oplossingsfunctie het fysische proces beschrijft.

Antwoorden



Intro de gravitatieput

a. De naar boven gerichte component is de middelpuntvliedende kracht maal cosα.
De hoek α zit ook in de andere driehoek. De naar beneden gerichte component is de zwaartekracht maal sinα.
b. Deel de factor *m* in beide leden weg. Deel daar cosα, dan wordt het linkerlid tanα. Deel nog door *g* en je vindt het gewenste resultaat.
c. $y = \frac{v^2}{g} \ln|x| + c$

Paragraaf 1 Differentiaalvergelijkingen

1 **a.** 1 jan 2011: 6,915 miljard
1 jan 2012: 6,992 miljard
1 jan 2013: 7,068 miljard
1 jan 2014: 7,146 miljard
1 jan 2015: 7,217 miljard
b. Elk jaar wordt de bevolking 1,011 *keer* zo groot. Het volgend jaar komt er 1,1% bij van een *groter* aantal dan dit jaar.
c. $y = 6{,}84 \cdot 1{,}011^{t} – 10$

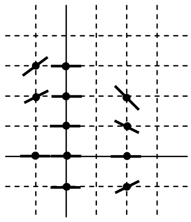
2 **a.** Na 2 min.: 80 – 0,2·80 = 66 °C
Na 3 min.: 66 – 0,2·66 = 52,8 °C
Na 4 min.: 52,8 – 0,2·52,8 = 42,24 °C
Na 5 min.: 33,792 °C
b. $100 \cdot 0{,}8^{t}$

3 **a.** Er komt per jaar bij $g / 100 \cdot N$ (geboortes)
Er gaat per jaar vanaf: $s / 100 \cdot N$ (sterftes)
Netto is dat $(g–s) / 100 \cdot N$ per jar.
In ΔT jaat is het ΔT keer zo veel.
b. Kettinngregel: $N' = a \cdot 0{,}017 \cdot e^{0{,}017t} = 0{,}017 \cdot N$
c. $5 \cdot 10^9 = a \cdot e^{0{,}017 \cdot 87}$, waaruit volgt dat $a = 1{,}139 \cdot 10^9$
d. $7 \cdot 10^9 = 1{,}139 \cdot 10^9 \cdot e^{0{,}017 \cdot t}$ geeft $t = 106{,}79$. Dus in 2006 of 2007.

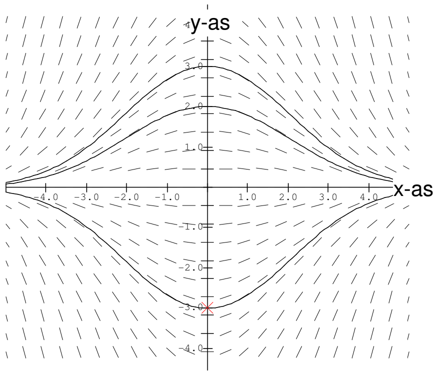
4 **a.** Deel beide leden van $T(t+\Delta t) – T(t) = c \cdot T(t) \cdot \Delta t.$ door Δt en laat Δt tot 0 naderen.
b. Kettingregel: $T' = a \cdot e^{-ct} \cdot c = c \cdot T$
c. $a = 100$
d. $30 = 100 \cdot e^{-c \cdot 5}$ geeft $c \approx 0{,}24$
e. $10 = 100 \cdot e^{-0{,}24t}$ geegt: $t \approx 9{,}6$

5 **a.** 4, 1, $\frac{4}{9}, \frac{1}{4}$
b. oneindig groot ; begint verticaal

6 a. $-\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3 = -1\frac{1}{2}$
b. $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$
c.



d.



7 **a.** $\dfrac{dy}{dt} = -c \cdot t$, met $c > 0$

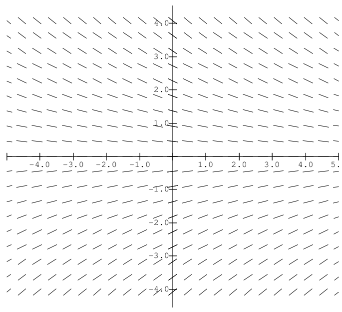
b. Enerzijds: $\dfrac{dy}{dt} = -ac \cdot e^{-ct}$, anderzijds $-c \cdot y = -ac \cdot e^{-ct}$,

dus voor de functie $y = a \cdot e^{-ct}$ geldt: $\dfrac{dy}{dt} = -c \cdot y.$

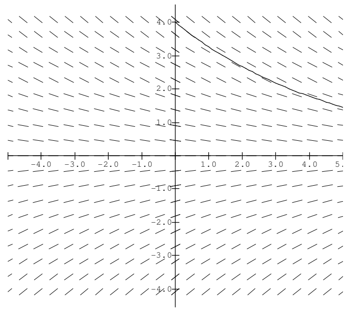
c. $y = -5t^2 + a$ voor elke waarde van a
d. $y = -5t^2 + 50$
e. $y = 0$ als $t = \sqrt{10}$, v = 10t, dus $10\sqrt{10}$ m/s

Paragraaf 2 Richtingsvelden

8 **a.**

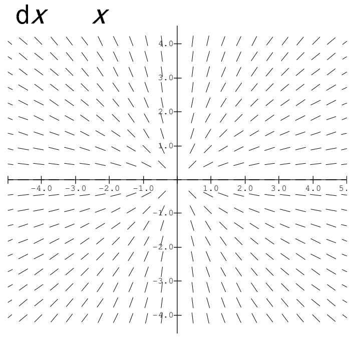


b.



9 **a.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

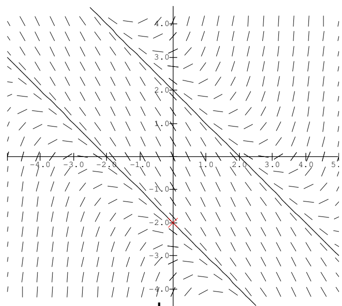
b.



c. $f(x) = ax$

d. $f'(x) = a$ en $\dfrac{y}{x} = a$, dus $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

10 **a.**

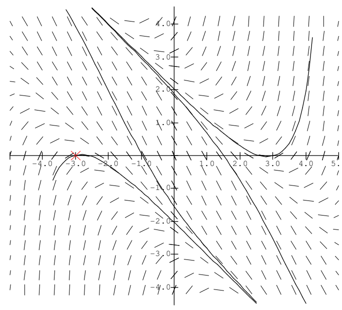


b. Enerzijds: $\dfrac{dy}{dx} = -1$ als $y = -x - 2$,

anderzijds: $\frac{1}{4}(x + y)^2 - 2 = \frac{1}{4}(x + -x - 2)^2 - 2 = -1$.

c. -2 als $(x + y)^2 = 0$, dus in alle punten op de lijn $y = -x$.

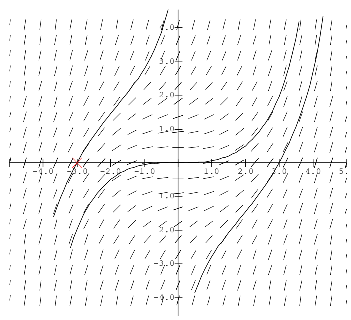
d.



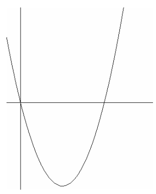
e. Zeg dat die extreme waarde a is, dan is het raaklijnstukje in $(2,a)$ horizontaal, dus $\frac{1}{4}(2+a)^2 - 2 = 0$, dus de extreme waarde is $-2 + 2\sqrt{2}$ of $-2 - 2\sqrt{2}$.
f. Dat gebeurt in een punt waar het raaklijnstukje maximale of minimale richtingscoëfficiënt heeft, dus op de lijn $y = -x$, zie **c**. Dus de tweede coördinaat is 3.
Vergelijking: $y = -2x - 3$

11 b. Halve cirkels met middelpunt O(0,0).
c. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}$ en $-\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$, klopt.
d. $y = -\sqrt{16-x^2}$
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{2\sqrt{16-x^2}}$ en $-\dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{-\sqrt{16-x^2}}$, klopt.

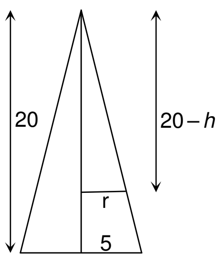
12 a.



b. De richtingscoëfficiënt van het raaklijnstukje is in elk punt buiten O(0,0) positief.
c. Op de cirkel met middelpunt O(0,0) en straal $\sqrt{5}$; op de cirkel met middelpunt O(0,0) en straal $\sqrt{20}$.



13 a. Dat is de parabool met vergelijking $y = x^2 - 4x$.
b. Substitutie in de differentiaalvergelijking geeft:
$2ax + b = ax^2 + bx + c - x^2 + 4x$. Dit moet voor elke x gelden, dus links en rechts moet dezelfde uitdrukking in x staan, dus: $a - 1 = 0$; $2a = b + 4$ en $b = c$, dit geeft: $a = 1$, $b = -2$ en $c = -2$, dus $y = x^2 - 2x - 2$.



14 a. De derde
b. Zie plaatje: $\dfrac{r}{5} = \dfrac{20-h}{20}$, dus $r = 5 - \frac{1}{4}h$
c. $O(h) = \pi \cdot (5 - \frac{1}{4}h)^2$,
dus $\dfrac{1}{O(h)}$ is evenredig met $\dfrac{1}{(20-h)^2}$.
d. $\dfrac{dh}{dt} = -\frac{1}{3}(3ct)^{\frac{2}{3}} \cdot 3c = c \cdot (3ct)^{-\frac{2}{3}}$ en $c \cdot \dfrac{1}{(20-(20-\sqrt[3]{3ct}))^2}$
$= c \cdot (3ct)^{-\frac{2}{3}}$ zijn hetzelfde, dus h is oplossingsfunctie.
e. $20 - \sqrt[3]{3c \cdot 8} = 0$, dus $c = 333\frac{1}{3}$

15 a. $-2\sqrt{25} = -10$, dus met 10 cm/min

b. $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2(p-t)$ en $-2\sqrt{h} = -2(p-t)$, want $p - t > 0$.

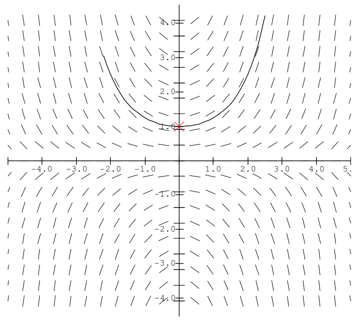
c. $(p-0)^2 = 100$, dus $p = 10$

d. Na 10 minuten

Paragraaf 3 De methode van Euler

16 $3 + 2 \cdot 0{,}01 = 3{,}02$

17a.



b. $7\frac{1}{2}$

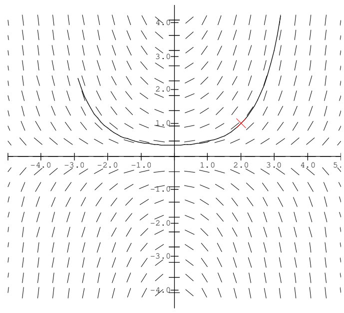
c. Kleiner, want het richtingsveld vertoont een toenemende stijging rechts van de y-as.

d. $1\frac{13}{32}$, $1\frac{239}{256}$

e. Regel 3 wordt: u(n) = u(n − 1) + .5.
regel 5 wordt: v(n) = v(n − 1) + .5∗u(n − 1)∗v(n − 1)∗.5

f. nMin = 0
u(nMin) = 0
u(n) = u(n − 1) + .01
v(nMin) = 1
v(n) = v(n − 1) + .5∗u(n − 1)∗v(n − 1)∗.01
De benadering voor $f(2)$ is: v(200) = 2,6958, dus in drie decimalen: 2,696.

g.



h. Zoals boven aan de bladzijde**,** behalve: u(nMin) = 2 en v(nMin) = 1

i. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{4}x^2}$ en $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{4}x^2}$, dus

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}xy$, dus y is oplossingsfunctie.

j. Substitueer maar!

k. $g(x) = \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{4}x^2} = e^{\frac{1}{4}x^2 - 1}$

18 a. $1\frac{1}{3}\pi r^3 = 1{,}2 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0{,}9}{\pi}}$ en $4\pi r^2 \approx 5{,}46$ cm^2

b. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \Rightarrow O = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)^2 = \sqrt[3]{36\pi V^2}$

c. 6,853412257

Paragraaf 4 Ongeremde groei

19 a. Bij $c = -0{,}8$ stijgend als $y > 0$ en dalend als $y < 0$; bij $c = -1{,}2$ is dat net andersom.

b. $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}e^{1{,}2x} = 1{,}2 \cdot e^{1{,}2x} = 1{,}2y$, klopt.

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}e^{-0{,}8x} = -0{,}8 \cdot e^{-0{,}8x} = -0{,}8y$, klopt.

c. $y = -\frac{1}{e^{1{,}2}} \cdot e^{1{,}2x} = -e^{1{,}2(x-1)}$

d. $y = e^{0{,}8(x-1)}$

e. De grafiek van y_k ontstaat uit de grafiek van y_0 door horizontaal k eenheden te schuiven. Omdat het veld invariant is onder horizontaal schuiven is y_k dus ook een oplossingsfunctie.

f. $\frac{dy_k}{dx} = 1{,}2\ y^{1{,}2(x-k)}$

20 a. Klopt (substitueren)

b. $2e^{-1{,}5}$; $-2e^{-1{,}5}$; $-2e^{1{,}5}$

21 a. $g'(x) = f'(x) \cdot e^{-cx} + f(x) \cdot -c \cdot e^{-cx} = c \cdot f(x) \cdot e^{-cx} - c \cdot f(x) \cdot e^{-cx}$
Dus $g'(x) = 0$.

b. g is een constante functie, dus er is een getal a zó dat $g(x) = a$, voor alle x, dus $f(x) = a \cdot e^{cx}$.

22 a. Afname

b. Oplossingsfunctie $y = a \cdot e^{-ct}$; $e^{-c \cdot 60} = \frac{1}{2}$, dus

$c = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{60} = \frac{\ln 2}{60}$

c. $y = a \cdot e^{-0{,}0035t}$ zijn de oplossingsfuncties ;

$e^{-0{,}0035t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{0{,}0035} \approx 198$ dagen

23 De groeifactor is e^c.

24 a. $T(0) = 80 \Rightarrow T(t) = 80 \cdot e^{-0{,}2t}$; $T(5) = 29{,}43$
$T(0) = 60 \Rightarrow T(t) = 60 \cdot e^{-0{,}2t}$; $T(5) = 22{,}07$
b. $80 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 5} + 20 \approx 49{,}43$; $60 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 5} + 20 \approx 42{,}07$
$40 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 5} + 20 \approx 34{,}72$
c. $T = 100 \cdot e^{-0{,}2t}$; $T = 80 \cdot e^{-0{,}2t} + 20$

25 Kettingregel: $\dfrac{d}{dx}(a \cdot e^{cx} + p) = a \cdot e^{cx} \cdot c$
en $c(y-p) = c \cdot (a \cdot e^{cx} + p - p) = c \cdot a \cdot e^{cx}$

26 a. Het quotum wordt weggevist, dus met zoveel neemt de toename af.
b. $H(t) = 2q + (7 - 2q) \cdot e^{\frac{1}{2}t}$
c. $q > 3\frac{1}{2}$

27 a. Enerzijds wordt in 1 minuut $\frac{1}{10}$ deel van de lucht weggezogen, dus ook $\frac{1}{10}$ deel van de aanwezige hoeveelheid koolzuur, dus *vermindert C* met $\frac{1}{10} \cdot C$ m^3; anderzijds komt er per minuut $0{,}05 \cdot \frac{1}{10}$ deel koolzuur *bij*, dus in Δt minuten is $\Delta C = (-0{,}1 \cdot C + 0{,}05 \cdot 0{,}1) \cdot \Delta t$.
b. $\dfrac{dC}{dt} = -0{,}1 \cdot C + 0{,}005$
c. $C(t) = 0{,}05 + 0{,}15 \cdot e^{-0{,}1t}$
d. $t = -10 \cdot \ln \dfrac{0{,}02}{0{,}15} \approx 20$ min.

Paragraaf 5 Logistische groei

28 a. $\dfrac{dG}{dt} = -500 \cdot \left(1 + 100 \cdot e^{-1{,}5t}\right)^{-2} \cdot -1{,}5 \cdot 100 \cdot e^{-1{,}5t} =$
$\dfrac{75000 \cdot e^{-1{,}5t}}{(1 + 100 \cdot e^{-1{,}5t})^2}$
$0{,}003 \cdot G \cdot (500 - G) =$
$0{,}003 \cdot \dfrac{500}{1 + 100 \cdot e^{-1{,}5t}} \cdot \left(500 - \dfrac{500}{1 + 100 \cdot e^{-1{,}5t}}\right) =$
$\dfrac{0{,}003 \cdot 500 \cdot 500 \cdot 100 \cdot e^{-1{,}5t}}{(1 + 100 \cdot e^{-1{,}5t})^2} = \dfrac{75000 \cdot e^{-1{,}5t}}{(1 + 100 \cdot e^{-1{,}5t})^2}$
c. Als $t \to \infty$, dan $1 + 100 \cdot e^{-1{,}5t} \to 1$, dus $G \to 500$.
d. $\dfrac{dy}{dt} = M(1 + b \cdot e^{-cMt})^{-2} \cdot -bcM \cdot e^{-cMt} =$
$\dfrac{-bcM^2 \cdot e^{-cMt}}{(1 + b \cdot e^{-cMt})^2}$

$$cy(M-y) = \frac{cM}{1+b\cdot \mathrm{e}^{-cMt}} \cdot \frac{-bM\cdot \mathrm{e}^{-cMt}}{1+b\cdot \mathrm{e}^{-cMt}} = \frac{-bcM^2\cdot \mathrm{e}^{-cMt}}{(1+b\cdot \mathrm{e}^{-cMt})^2},$$
dus klopt.

e. $y(0) = \dfrac{M}{1+b}$, dus $b = \dfrac{M}{y(0)} - 1$

29 a. $M = 1000$, $b = 99$, $c = 0{,}0002$

c. $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0{,}0002H(1000-H)$

d. $H = 500$

e. In een buigpunt is de helling extreem .

f. $1 + 99\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1$, dus $t = \dfrac{\ln 99}{0{,}2} \approx 22{,}98$

g. $\mathrm{e}^{0{,}2}$

30 b. $\left(\frac{17069}{3929}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}34$

c. $2\cdot 105711 = 211422$

d. $\mathrm{e}^{cM} = 1{,}34$, dus $c = \dfrac{\ln 1{,}34}{211422} \approx 0{,}0000014$

e. $B(0) = 3929$, dus: $3929 = \dfrac{211422}{1+\mathrm{b}}$, dus $b = 52{,}8$

31 a. $cy(M-y) = -cy^2 + cMy$ en $ky(1-\dfrac{y}{M}) = -\dfrac{k}{M}y^2 + ky$; deze twee zijn hetzelfde als $k = cM$.

b. $y = \dfrac{M}{1+b\cdot e^{-kt}}$

32 $f(x) = \dfrac{200}{1+b\cdot \mathrm{e}^{-0{,}3x}}$ en $f(10) = 80$, dus $b = (\frac{200}{80} - 1)\,\mathrm{e}^3 \approx 30$,
dus $f(x) = \dfrac{200}{1+30\cdot \mathrm{e}^{-0{,}3x}}$

33 a. $L(t) = L(0) - E(0) + E(t) = 0{,}01 - 0{,}005 + E(t)$.

b. We passen de formules van logistische groei toe: $E = \dfrac{-0{,}005}{1+b\cdot \mathrm{e}^{0{,}0003\,t}}$.
Er geldt: $E(0) = 0{,}005$, hieruit volgt: $1 + b = -1$, dus $b = -2$.
Dus: $E = \dfrac{0{,}005}{2\cdot \mathrm{e}^{0{,}0003\,\mathrm{t}} - 1}$

c. De constante M is niet positief.

d. Dan $2\cdot \mathrm{e}^{0{,}0003t} - 1 = 2$, dus $t = \ln 1\frac{1}{2} : 0{,}0003 \approx 1352$ sec.

34 a. Vul maar in.

b. $-\dfrac{cM\cdot f(t)-c(f(t))^2}{(f(t))^2}=-\dfrac{cM\cdot f(t)}{(f(t))^2}+\dfrac{c(f(t))^2}{(f(t))^2}=-cM\dfrac{1}{f(t)}+c$

Dit volgt uit de kettingregel.

b. Dit volgt meteen uit de twee voorgaande onderdelen.

c. $\dfrac{1}{f(t)}=a\cdot e^{-cMt}$, dus $f(t)=\dfrac{1}{\frac{1}{M}+a\cdot e^{-cMt}}=\dfrac{M}{1+aM\cdot e^{-cMt}}$

Paragraaf 6 Gemengde opgaven

35 $P(t)=a\cdot e^{-0,3t}$.

Na het innemen van de eerste pil: $P(t)=350000\cdot e^{-0,3t}$, dan $P(t)=100000 \Leftrightarrow t=\dfrac{\ln\frac{100}{350}}{-0,3}\approx 4,18$, dus 4 uur.

Na het innemen van de tweede pil: $P(t)=450000\cdot e^{-0,3t}$, dan $P(t)=100000 \Leftrightarrow t=\dfrac{\ln\frac{100}{450}}{-0,3}\approx 5$, dus 5 uur.

Daarna steeds 5 uur.

36 a. $\dfrac{dK}{dt}=-c\cdot K$

b. $c>0$ (als je in **a** $\dfrac{dK}{dt}=c\cdot K$ hebt, dan $c<0$)

c. 100

d. $K(t)=100\cdot e^{-ct}$

e. $e^{-c\cdot 5730}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow c=\dfrac{\ln 2}{5730}\approx 0,00012$

37 a. De kans dat je minstens 0 minuten moet wachten is 1.

b. De tijd die je al gewacht hebt is onafhankelijk van de tijd die je nog moet wachten.

c. $\dfrac{\Delta w}{\Delta t}=\dfrac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t}=\dfrac{w(t)\cdot w(\Delta t)-w(t)}{\Delta t}=\dfrac{w(t)(w(\Delta t)-1)}{\Delta t}$

Als $\Delta t\to 0$, dan wordt dit: $w'(t)=c\cdot w(t)$, waarbij $c=w'(0)$.

d. $w(t)=e^{ct}$ en $w(10)=\frac{1}{4}$, dus $c=\dfrac{\ln\frac{1}{4}}{10}$, dus $w(t)=4^{-0,1t}$.

38 $p(h)=1030\cdot e^{-ch}$; $p(5000)=570$ geeft $c=-0,00012$, dus $p(h)=1030\cdot e^{-0,00012h}$ en $p(h)=770 \Leftrightarrow h=2424$

39 a. Voer in in de GR:

70 ENTER

ANS + .5∗ANS∗(1 − .01∗ANS) − 10

De GR geeft na 10 keer ENTER het antwoord 72,16%

b. Na veel keer ENTER verandert het antwoord nauwelijks nog: het blijft dan 72,36%

40 a. Richtingscoëfficiënt $YX = -\frac{y}{x}$

b. $f'(x) = -\frac{c}{x^2}$ en $-\frac{y}{x} = -\frac{c}{x^2}$, klopt

41 a. $v = c \cdot e^{-ft} + \frac{10}{f}$

b. Als $t \to \infty$, dan $c \cdot e^{-ft} \to 0$, dus $\frac{10}{f} = 5$, dus $f = 2$.

c. $v(t) = c \cdot e^{-ft} + 5$, $v(0) = 3$, dus $c = -2$, dus $v = -2 \cdot e^{-2t} + 5$

d. $s(t) = e^{-2t} + 5t + d$ voor een of andere constante d;
$s(0) = 0$, dus $d = -1$ en $s(t) = e^{-2t} + 5t - 1$

e. $s(20) \approx 99$ m

f. De grafiek wordt nagenoeg recht.

g. $s = 5t - 1$

42 a. Logistische groei met $c = 1$ en $M = 2$, dus $y = \frac{2}{1 + b \cdot e^{-2t}}$

b. $2y - y^2$ is maximaal als $y = 1$, dus elke oplossingsfunctie heeft in een punt met tweede coördinaat 1 een buigpunt.

43 a. De richtingscoëfficiënt van lijn PX is $\frac{2y}{x}$.

b. $y = 3x^2$; $\frac{dy}{dx} = 6x$ en $\frac{2y}{x} = 6x$, klopt.

44 $I = a \cdot e^{-ks}$; $40 = 100 \cdot e^{-k \cdot 3}$, dus $k \approx 0{,}3$

45 a. Hoe meer prooidieren, hoe sneller het aantal roofdieren groeit.

b. $\frac{dP}{dt} = 600$ en $\frac{dR}{dt} = -12$,
dus P wordt 120 en R wordt 19.

c. Als $a - bR = 0$ en $cP - d = 0$, dus $R = 25$ en $P = 75$.

46 a. Enerzijds $\frac{dy_k}{dx} = 3(k - 0{,}1x)^2 \cdot -0{,}1 = -0{,}3(k - 0{,}1x)^2$,
anderzijds $-0{,}3y_k^{\frac{2}{3}} = -0{,}3(k - 0{,}1x)^2$, dus klopt.

b. Op de x-as hebben de raaklijnstukje en richtingscoëfficiënt 0.