

Spelen met Kansen

Bij wiskunde A, havo en vwo

In een heleboel gezelschapsspellen speelt het toeval een grote rol, bijvoorbeeld Patience, Ganzenbord, Thodi, Black Jack, Risk, Poker, Bridge. Deze spellen zijn te ingewikkeld om wiskundig volledig te behandelen. Daarom vereenvoudigen we hun spelregels. We zorgen er wel voor dat het idee van het spel intact blijft.

Het is goed de spellen eerst een paar keer zelf te spelen. Als je het spel niet hebt, kun je het misschien simuleren; raadpleeg zonodig je leraar.

Sommige opdrachten zijn erg bewerkelijk. Verdeel het werk.

Over verschillende spellen kun je informatie vinden op internet.

Je kunt de kansen met wiskunde technieken berekenen (bijvoorbeeld boomdiagramman), maar je kunt ook deze door simulaties achterhalen.

Hieronder staan enkele suggesties om je werkstuk te verfraaien. (Die kun je waarschijnlijk niet allemaal doen; ze hangen af van welk spel je doet.)

- Je hebt een sterk vereenvoudigde vorm van het spel gedaan. Hoe gaat het echte spel?
- Wat is de geschiedenis van het spel?
- Zijn er verschillende varianten?
- Bij sommige spellen is gokverslaving een serieus gevaar. Kun je daar iets over vertellen?
- Heb je speladviezen (hoe je het spel verstandig kunt spelen)?

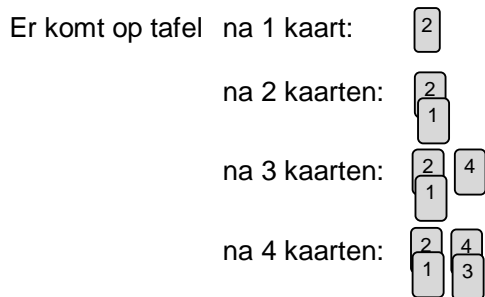
A. Patience

Dit is een spel voor één speler. Hij heeft een stapel van vier kaarten: 1, 2, 3, 4. De stapel wordt goed geschud. Hij legt de kaarten een voor een open op tafel. Het doel is zo weinig mogelijk stapels te maken. Er is één spelregel: er mag nooit een hogere kaart op een lagere kaart komen.

Patience gaat als volgt. De speler legt de bovenste kaart van de stapel open op tafel. Vervolgens neemt hij de tweede kaart van de stapel. Als die lager is dan de eerste kaart, legt hij de tweede kaart boven op de eerste kaart. Anders legt hij de tweede kaart naast de eerste kaart (en begint zodoende een tweede stapel). Dan neemt hij de derde kaart. Als die lager is dan de eerste, legt hij hem daarop. Als hij hoger is dan de eerste, maar lager dan de tweede, legt hij hem op de tweede. Anders legt hij hem ernaast (en begint dus een derde stapel). De laatste kaart legt hij ten slotte op de eerste als hij tenminste lager is dan de eerste, op de tweede als hij hoger is dan de eerste en lager dan de tweede, op de derde als hij hoger is dan de tweede maar lager is dan de derde, en anders komt hij er als vierde stapel naast te liggen.

Voorbeeld

Stel dat de vier kaarten liggen in de volgorde: 2143.



Het spel eindigt dus met twee stapels.

Vragen

1. Wat is de kans dat het spel eindigt met 1, met 2, met 3 en met 4 stapels?
2. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal stapels waarin het spel eindigt?

Stel jij hebt een Casino waarin je dit spel aanbiedt. Een deelnemer moet 10 euro betalen per keer dat hij speelt. Als zijn spel in 1 of 2 stapels eindigt, wint hij en betaalt het casino hem uit.

3. Hoeveel kan het casino hoogstens betalen om gemiddeld geen verlies te leiden.

Nu heeft de speler een stapel van vijf kaarten: 1, 2, 3, 4, 5.

4. Wat is de kans dat het spel eindigt met 1, met 2, met 3, met 4 en met 5 stapels?
5. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal stapels waarin het spel eindigt?
6. Dezelfde vraag als 3, maar nu voor vijf kaarten.

Nu heeft de speler een stapel van dertien kaarten.

7. Wat is de kans dat het spel eindigt met 1 stapel? En met 13 stapels?
8. Speel het spel met vijf kaarten een groot aantal keren. Zorg ervoor dat dat eerlijk gebeurt. Doe verslag van de opzet van je experiment. Bespreek de resultaten.

B. Poker (Yahtzee)

De speler werpt eenmaal met drie dobbelstenen. Hij kan het volgende gooien:

- twee gelijke
- drie gelijke
- drie opeenvolgende
- "niets" (in alle andere gevallen)

Vragen

1. Bereken de kans op elk van deze mogelijkheden.
2. Om een keer te spelen moet je €10 betalen. Als je "niets" gooit, krijg je niets. Welke uitbetalingen lijken je bij de verschillende andere mogelijkheden redelijk?

De speler werpt eenmaal met vier dobbelstenen. Hij kan het volgende gooien:

- one pair (twee gelijke)
- two pair
- three of a kind (drie gelijke)
- carré (vier gelijke)
- straat (vier opeenvolgende)
- "niets" (in alle andere gevallen)

Vragen

3. Bereken de kans op elk van deze mogelijkheden.
4. Om een keer te spelen moet je €10 betalen. Als je "niets" gooit, krijg je niets. Welke uitbetalingen lijken je bij de verschillende andere mogelijkheden redelijk?
5. Speel het spel met vier dobbelstenen een groot aantal keren. Zorg ervoor dat dat eerlijk gebeurt. Doe verslag van de opzet van je experiment. Bespreek de resultaten.

C. Thodi

Thodi is het aandenken aan de Kangoeroewedstrijd 2002



Thodi wordt gespeeld met drie speciale dobbelstenen:

Tetra: het regelmatige viervlak,

Hexa: de kubus

Octa: het regelmatig achthoekig vlak.

Werp met de drie dobbelstenen. Leg de dobbelstenen op volgorde: tetra, hexa, octa.

Alleen oplopende series tellen. Je score is:

- bij een serie van twee de som van de ogen in die serie,
- bij een serie van drie de som van de ogen.

Voorbeeld 1

Je gooit 4, 4, 2 met achtereenvolgens de tetra, hexa, octa. Je hebt geen oplopende serie gegooid, dus je score is 0 punten.

Voorbeeld 2

Je gooit 3, 2, 8. Je hebt een oplopende serie van twee gegooid: 2-8, dus je score is $2+8 = 10$.

Voorbeeld 3

Je gooit 1, 2, 8. Je hebt een oplopende serie van drie gegooid, dus je score is $1+2+8 = 11$.

Vragen

1. Wat is de hoogst mogelijke score? Wat is de kans daarop?
2. Wat is de kans dat het aantal ogen met de tetra lager is dan dat met de hexa?
3. Wat is de kans dat het aantal ogen met de hexa lager is dan dat met de octa?
4. Wat is de kans op een serie van drie?
5. Wat is de kans op een score van 0 punten?
6. Wat is de verwachtingswaarde van de score?
7. Als je het spel wilt spelen, moet je daarvoor een inzet betalen. Als uitbetaling krijg je zoveel euro als je score bedraagt. Hoeveel euro moet de inzet bedragen?
8. Speel het spel een groot aantal keren. Zorg ervoor dat dat eerlijk gebeurt. Doe verslag van de opzet van je experiment. Bespreek de resultaten.

D. Black Jack (eenentwintigen)

Een stapel kaarten bevat 2 vijven, 3 drieën en 5 enen. De speler neemt steeds een kaart van de stapel; hij telt de waarden van de kaarten op. Als hij op 9 of 10 komt, heeft hij gewonnen. Maar als hij boven de 10 komt is hij "dood".

Voorbeeld 1

Stel dat de kaarten in de volgorde 3 5 3 1 1 1 3 5 1 1 liggen. Dan heeft de speler na twee kaarten $3+5 = 8$ punten. De derde kaart die hij neemt brengt het totaal op $8+3 = 11$ punten. Dan is hij "dood" en heeft hij verloren.

Voorbeeld 2

Stel dat de kaarten in de volgorde 3 5 1 1 1 3 3 5 1 1 liggen. Dan heeft de speler na twee kaarten $3+5 = 8$ punten. De derde kaart die hij neemt brengt het totaal op $8+3+1 = 9$ punten. Hij heeft dan gewonnen.

Vragen

1. Stel de eerste kaart is een vijf. Wat is de kans dat hij wint?
2. Stel de eerste kaart is een drie. Wat is de kans dat hij wint?
3. Stel de eerste kaart is een een. Wat is de kans dat hij wint?
4. Om het spel te spelen, moet je een inzet van €10 betalen. Wat is een redelijke uitbetaling aan de speler als hij wint?
5. Hoeveel volgordes zijn er waarin de kaarten kunnen liggen?
6. Speel het spel een groot aantal keren. Zorg ervoor dat dat eerlijk gebeurt. Doe verslag van de opzet van je experiment. Bespreek de resultaten.

E. Ganzenbord

Je moet een traject afleggen van 6 velden. Hoeveel stappen je vooruit gaat, is het antal ogen van een dobbelsteen. Als je bijvoorbeeld achtereenvolgens 3, 1, 1, 5 werpt, ben je er. Je hebt dan vier beurten nodig gehad. Om het traject af te leggen, moet de som van de ogen dus 6 of meer zijn.

Vragen

1. Wat is de kans dat je maar één beurt nodig hebt?
En twee beurten? En drie beurten? En vier beurten? En vijf beurten? En zes beurten?
2. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal beurten dat je nodig hebt?

Elke beurt kost je €10. Als je het traject hebt afgelegd, betaalt het casino je uit.

3. Welk bedrag kan het casino hoogstens betalen als het gemiddeld geen verlies wil lijden?

Je moet een traject afleggen van 8 velden.

4. Wat is de kans dat je dat in twee beurten lukt?
5. En in drie beurten?

Je moet een traject van 35 velden afleggen.

6. *Schat* het aantal beurten dat je daarvoor nodig hebt. Toelichten.

Terug naar het begin met het traject van 6 velden.

7. Speel het spel een groot aantal keren. Zorg ervoor dat dat eerlijk gebeurt. Doe verslag van de opzet van je experiment. Bespreek de resultaten.

F. Risk

Bij Risk hebben de spelers allemaal een heleboel legers (dat zijn pionnen) waarmee ze elkaars gebieden willen veroveren. Stel dat speler I besluit een gebied van speler II aan te vallen. De aanvallende speler I en de verdedigende speler II kiezen dan eerst hoeveel legers (=pionnen) ze gaan inzetten.

Twee tegen één

Bij deze keuze zet speler I twee legers in en speler II één leger. In dit geval werpt I met twee dobbelstenen en II met één dobbelsteen. Als het hoogste (*) van de twee aantallen ogen die I gooit hoger is dan wat II gooit, dan wint I en verliest speler II één leger (dat gaat terug naar de bank). Anders verliest I één leger.

Vragen

1. Stel dat II 3 ogen gooit. Wat is de kans dat hij niet verliest?
Dezelfde vraag als II 1, of 2, of 4, of 5, of 6 ogen gooit.
2. Wat is de kans dat II niet verliest?

Drie tegen twee

Bij deze keuze zet speler I drie legers in en speler II twee legers. In dit geval werpt I met drie dobbelstenen en II met twee dobbelstenen. Als het hoogste (*) van de drie aantallen ogen die I gooit hoger is dan het hoogste van de twee aantallen die II gooit, dan wint I en verliest II één leger (dat gaat terug naar de bank). Anders verliest I één leger. Vervolgens wordt het op een na hoogste aantal ogen van I vergeleken met het laagste aantal ogen van II. Is het op een na hoogste aantal van I hoger dan het laagste aantal van II, dan verliest II één leger, anders I.

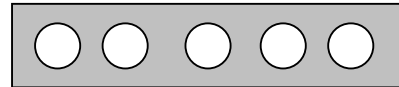
Vragen

4. Stel dat II 3 en 5 ogen gooit. Wat is de kans dat I en II dan allebei één leger verliezen?
Stel dat II 3 en 5 ogen gooit. Wat is de kans dat I dan twee legers verliest?
5. Wat is de kans dat II geen legers verliest? En dat hij één leger verliest? En dat hij twee legers verliest?
6. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal legers dat II verliest? En van het aantal legers dat I verliest?
7. Speel het spel een groot aantal keren. Zorg ervoor dat dat eerlijk gebeurt. Doe verslag van de opzet van je experiment. Bespreek de resultaten.

(*) Als de twee aantallen gelijk zijn, is er eigenlijk geen hoogste, maar dan bedoelen we gewoon dat aantal.

G. Krasloten

Een kraslot heeft vijf vakjes. Achter een van de vakjes zit een X verborgen, achter de andere vier een Y. Voor elke Y die je openkrast krijg je 1 euro. Maar als je de X openkrast, ben je alles kwijt.



Vragen

1. Stel dat je besluit 1 vakje open te krassen. Wat is de kans dat je 1 euro wint?
Stel dat je besluit 2 vakjes open te krassen. Wat is de kans dat je 2 euro wint?
Stel dat je besluit 3 vakjes open te krassen. Wat is de kans dat je 3 euro wint?
Stel dat je besluit 4 vakjes open te krassen. Wat is de kans dat je 4 euro wint?
Welk van deze vier strategieën is het verstandigst?
2. Dezelfde vragen als in vraag 1, maar nu voor een kraslot met zes vakjes (met één X en vijf Y's).
3. Heb je enig idee wat de verstandigste strategie is bij een kraslot met n vakjes (met één X en $n-1$ Y's)? Toelichten.

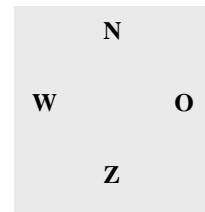
Zoals gezegd krijg je 1 euro voor elk opengekrast vakje met een Y (zolang je geen vakje met een X openkrast).

4. Wat moet een kraslot met vijf vakjes kosten, vind je?
En met zes vakjes?
En met n vakjes?
5. Speel het spel een groot aantal keren. Verzin daarvoor een manier om het spel na te bootsen. Zorg ervoor dat dat eerlijk gebeurt. Doe verslag van de opzet van je experiment. Bespreek de resultaten.

H. Bridge

Bridge wordt gespeeld door vier spelers: Noord, Oost, Zuid en West; elk met 13 kaarten.

Als Noord een spel speelt, ziet hij behalve zijn eigen kaarten ook die van Zuid. Nadat er acht slagen (*) zijn gemaakt, hebben de spelers elk nog 5 kaarten. Het is voor Noord belangrijk te weten hoe bijvoorbeeld de schoppens (**) die hij niet ziet verdeeld zijn over Oost en West.



Stel dat Noord in totaal 9 schoppens ziet bij zichzelf en Zuid. Oost en West hebben dus samen 4 schoppens, zeg dat dat zijn: Heer, Boer, Negen en Zeven. (Oost en West hebben samen nog 6 andere kaarten.)

De schoppen Heer, Boer, Negen en Zeven kunnen op allerlei manieren verdeeld zijn over Oost en West. Bijvoorbeeld: Oost heeft Boer en West heeft de andere drie.

Vragen

1. Op hoeveel manieren kunnen schoppen Heer, Boer, Negen en Zeven verdeeld zijn over Oost en West?
2. Wat is de kans dat West schoppen Heer heeft (en nog eventueel andere schoppens)?
3. Wat is dan de kans dat Oost en West allebei 2 schoppens hebben?
Wat is de kans dat een van de twee, Oost of West, alle vier de schoppens heeft?
Wat is de kans dat een van de twee, Oost of West, drie schoppens heeft en de ander één schoppen?

In bovenstaand geval zeggen we dat de schoppens 2-2-verdeeld zijn over Oost en West, respectievelijk 4-0-verdeeld en 3-1-verdeeld.

Stel dat Noord in totaal 8 schoppens ziet bij zichzelf en Zuid. Oost en West hebben dus samen 5 schoppens (en 5 andere kaarten).

4. Hoe kunnen die 5 schoppens verdeeld zijn over Oost en West.
5. Bepaal de kansen op elk van die verdelingen.
6. Speel het spel waarbij Oost en West samen 4 schoppens hebben (het spel van vraag 1) een groot aantal keren. Verzin daarvoor een manier om het spel na te bootsen. Zorg ervoor dat dat eerlijk gebeurt. Doe verslag van de opzet van je experiment. Bespreek de resultaten.

(*) In een slag leggen elk van de vier spelers een van hun kaarten op tafel. De hoogste kaart in de voorgespeelde kleur wint de slag, maar een kaart in de troefkleur wint het van de kaarten in de andere kleuren.

(**) Hier wordt het meervoud "schoppens" gebruikt.