Allerlei verbanden

Inhoudsopgave

Allerlei verbanden

Experimentele uitgave 2007 voor wiskunde D havo 4, 40 slu

Colofon

© 2007 Stichting De Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

Illustraties Wilson Design, Uden

Distributie Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

ISBN 978-90-811645-5-9

Homepage www.wageningse-methode.nl

Het is aan te bevelen in geen enkele opgave het rekenmachientje te gebruiken.

1 Breuken

Je herinnert je de volgende sommetjes van de basisschool nog wel:

$3 \cdot \_\_\_ = 12$; $7 \cdot \_\_\_ = 140$ enzovoort.

De getallen die ingevuld moeten worden, kun je ook schrijven als:

$12:3$; $140:7$ enzovoort

of als

12/3 , 140/3 enzovoort

of als

$\frac{12}{3}$, $\frac{140}{7}$ enzovoort.

De getallen die je in moet vullen, hoeven niet geheel te zijn, bijvoorbeeld 13/3.

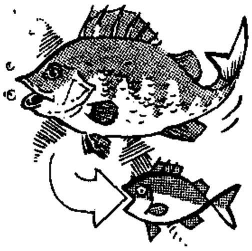
> $\frac{a}{b} = c$ komt op hetzelfde neer als $a = b \cdot c$.
>
> Dus: $b \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot b = a$.
>
> Dit geldt voor alle getallen a, b en c met $b \neq 0$.

Waarom heeft de uitdrukking $\frac{a}{b}$ geen zin als $b = 0$?

1 Bereken (schrijf zo eenvoudig mogelijk):

$111 \cdot \frac{87}{111}$	$222 \cdot \frac{87}{111}$	$111 \cdot \frac{87}{222}$
$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{22}{303} \cdot \frac{505}{9} \cdot \frac{9}{55}$	$\frac{a}{5} \cdot \frac{5}{2a}$
$a \cdot \frac{b}{a}$	$ap \cdot \frac{b}{a}$	$a^2 \cdot \frac{b}{a}$
$a \cdot \frac{b}{a^2}$	$a \cdot \frac{b}{ap}$	$a \cdot \frac{bp}{a}$

Hierbij zijn a, b en p getallen met $a \neq 0$ en $p \neq 0$.



2 Vereenvoudig

$\frac{3}{x+1}\cdot\frac{x+1}{7}$ $\frac{3}{x+1}\cdot\frac{2x+2}{7}$

$\frac{3}{5x+5}\cdot\frac{2x+2}{7}$ $\frac{3x-3}{5x+5}\cdot\frac{2x+2}{7x-7}$

$\frac{x^2}{33}\cdot\frac{22}{5x}$ $\frac{(x+1)^2}{33}\cdot\frac{22}{(x+1)^2}$

3 Welke van de volgende formules zijn goed?
(Dat wil zeggen, zijn ze waar voor alle *a* en *b* waarvoor ze zin hebben?)

$\frac{a-2}{a}=a$ $\frac{2-a}{2+a}=-1$

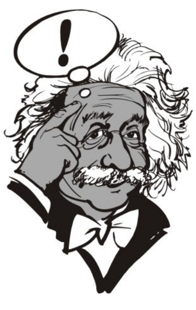
$\frac{2a}{2+a}=\frac{a}{1+a}$ $\frac{a}{2+a}=\frac{1}{2}$

$\frac{2+a}{2+b}=\frac{a}{b}$ $\frac{2a+b}{a+\frac{1}{2}b}=2$

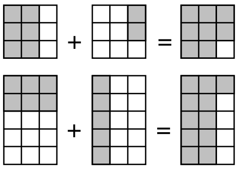
$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{3}b}=\frac{3a}{2b}$ $\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$

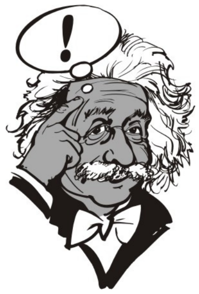
$\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$ $\frac{a-3b}{b-2a}=\frac{3b-a}{2a-b}$

4 Verandert in het algemeen een breuk als
- je bij teller en noemer hetzelfde getal optelt?
- als je teller en noemer kwadrateert?
- als je van teller en noemer het tegengestelde neemt?
- als je van teller en noemer het omgekeerde neemt?
- als je teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt?



Voor alle getallen *t*, *n* en *p* met $n\neq 0$ en $t\neq 0$ geldt:
$\frac{t}{n}=\frac{t\cdot p}{n\cdot p}$





De som van twee breuken

De som van twee breuken kun je als één breuk schrijven door de noemers gelijknamig te maken.
Voorbeelden:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9} \qquad \frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}=\frac{ab}{a^2}+\frac{b}{a^2}=\frac{ab+b}{a^2} \qquad \frac{2}{a}+\frac{b}{3}=\frac{6}{3a}+\frac{ab}{3a}=\frac{6+ab}{3a}$$

5 Schrijf als één breuk met zo eenvoudig mogelijke noemer.

$$\frac{7}{9}-\frac{1}{3} \qquad \frac{5}{11}-\frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{10}+\frac{5}{12}+\frac{2}{15} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$$

$$\frac{3}{t}+\frac{2}{t} \qquad \frac{3}{t}+\frac{t}{3}$$

$$\frac{t}{2}+\frac{t}{3} \qquad \frac{3}{t}+2$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} \qquad \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x-1} \qquad \frac{x}{x+1}-1$$

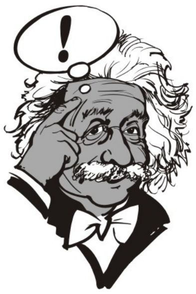
$$x+\frac{3x}{x-3} \qquad x-\frac{3x}{x-3}$$

$$\frac{5}{x+5}-\frac{3}{x+3} \qquad \frac{x}{(x+5)^2}-\frac{1}{x+5}$$

6 Los op:

$$\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x-1}=3 \qquad \frac{1}{x}+\frac{3}{x+2}=2$$

$$\frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{x+3}=1 \qquad x-\frac{x^2+1}{x}=1$$



Vereenvoudigen
Nog twee voorbeelden

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 12}{\frac{3}{4}\cdot 12}=\frac{8}{9} \qquad \frac{2}{\frac{3}{x}}=\frac{2\cdot x}{\frac{3}{x}\cdot x}=\frac{2x}{3}$$

7 Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{9}} \qquad \frac{\frac{3}{8}}{\frac{9}{16}} \qquad \frac{\frac{6}{t}}{\frac{3}{t}} \qquad \frac{\frac{6}{t}}{\frac{6}{n}}$$

$$\frac{t}{\frac{3}{t}} \qquad \frac{t}{\frac{t}{3}} \qquad \frac{\frac{6}{t}}{t} \qquad \frac{1}{\frac{t}{n}}$$

8 Maak de breuk rechts van het $=$-teken af.

$$\frac{\frac{1}{2}+a}{3+b}=\frac{3+}{} \qquad \frac{\frac{1}{2}+a}{\frac{1}{2}-a}=\frac{1+}{}$$

9 Schrijf als **enkelvoudige breuk**, dat wil zeggen zonder breuk in teller en noemer.

$$\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}{1-\frac{1}{200}} \qquad \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{ab}}$$

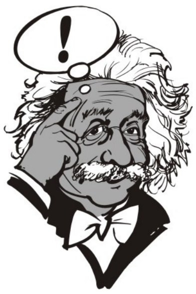
$$\frac{11}{11+\frac{11}{12}} \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{a+1}}$$

$$\frac{\frac{1}{a}}{a+1} \qquad \frac{a+1}{\frac{1}{a}}$$

10 Welke van de volgende formules zijn goed?

$$\frac{a}{a+b}=1+\frac{a}{b} \qquad \frac{a+b}{a}=1+\frac{b}{a}$$

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d} \qquad \frac{a+b}{a+d}=\frac{b}{d}$$



Vereenvoudigen
Voorbeeld

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+3}{x-2}$$

11 Vereenvoudig door teller en noemer eerst te ontbinden.

$\dfrac{9-x^2}{x^2-x-6}$ $\qquad$ $\dfrac{x^2+3x}{x^2+x-6}$

$\dfrac{x^4+2x^3-8x^2}{x^3+x^2-12x}$ $\qquad$ $\dfrac{2x+6}{\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}}$

$\dfrac{4x+8}{x^2-4}$ $\qquad$ $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

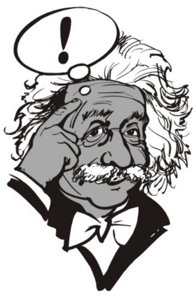
$\dfrac{-2x+4}{x^2-4}$ $\qquad$ $\dfrac{x^{10}-1}{x^5-1}$

Op de GR zit de toets x^{-1}. Een andere schrijfwijze van x^{-1} is $\dfrac{1}{x}$. We noemen x^{-1} het **omgekeerde** van *x*. Er geldt: $x\cdot\dfrac{1}{x}=1$. Als $x=\dfrac{t}{n}$ dan is $x^{-1}=\dfrac{n}{t}$.

In het volgende is $x=\dfrac{t}{n}$.

Er geldt:

$$a:x=\frac{a}{\frac{t}{n}}=\frac{a\cdot n}{\frac{t}{n}\cdot n}=\frac{a\cdot n}{t}=a\cdot\frac{n}{t}=a\cdot x^{-1}.$$



Conclusie (dit heb je misschien op de basisschool al gehad):

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

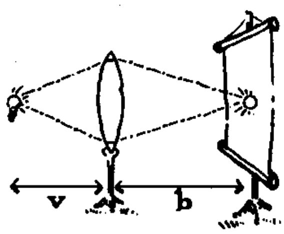
12 Bereken en schrijf zo eenvoudig mogelijk.

$\dfrac{2}{3}:\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{9}$	$0{,}27:0{,}03$
$\dfrac{a}{x}:\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{a}{x}:a$	$\dfrac{a}{x}:\dfrac{x}{a}$
$\dfrac{a}{x}:\left(\dfrac{b}{x}:\dfrac{a}{x}\right)$	$\left(\dfrac{a}{x}:\dfrac{b}{x}\right):\dfrac{a}{x}$	$\dfrac{x^2:a^2}{x:a}$
$(x-1):\dfrac{1}{x}$	$x-1:\dfrac{1}{x}$	$x:\dfrac{1}{x-1}$

13 Los de volgende vergelijkingen in x op.

$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{10}x = -1$

$0{,}11x = 1{,}21$ $\qquad$ $1\frac{1}{4}x = \frac{3}{8}$



14 Voorwerp en beeld

Een lampje is opgesteld voor een lens. Achter de lens bevindt zich een scherm waarop het beeld van het lampje wordt opgevangen. Als het lampje verplaatst wordt, moet je het scherm meebewegen om een scherp beeld te houden. De afstand lampje-lens noemen we v. (de voorwerpsafstand), de afstand scherm-lens noemen we b, (de beeldsafstand), beide in dm.

Voor onze lens geldt: $\frac{1}{v}+\frac{1}{b}=1$.

a. Geef een formule voor b uitgedrukt in v. Schrijf het antwoord als één zo eenvoudig mogelijke breuk.

De vergroting V van de lens is $\frac{b}{v}$.

b. Geef een formule voor V uitgedrukt in v. Schrijf het antwoord als één zo eenvoudig mogelijke breuk.

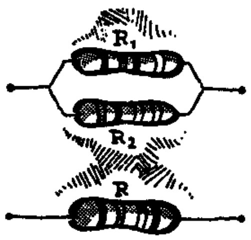
c. Voor welke v is $V = 2$?

We bewegen het lampje 1 dm verder van de lens af.

d. Beweegt het beeld dan naar de lens toe of er van af? Hoe kun je dat aan de formule $\frac{1}{v}+\frac{1}{b}=1$ zien?

Het aantal dm dat het beeld zich verplaatst naar de lens, noemen we A.

e. Geef een formule voor A uitgedrukt in v. Schrijf het antwoord als één zo eenvoudig mogelijke breuk.



15 Een schakeling

Ui de wet van Ohm volgt dat een parallelschakeling met twee weerstanden R_1 en R_2 kan worden vervangen door één weerstand R, waarbij: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

(Dat wil zeggen dat als je over de schakeling en over de weerstand R hetzelfde spanningsverschil zet, er bij beide schakelingen dezelfde stroom zal lopen.)

In de parallelschakeling hiernaast is R_1 een weerstand van 10 Ω en R_2 een schuifweerstand die kan variëren van 0 tot 10 Ω.

a. Wat gebeurt er met R als R_2 groter wordt?

b. Welke waarden kan R aannemen?

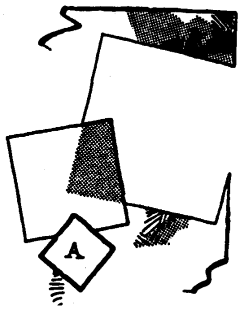
De schuifweerstand is gezet op x Ω.
c. Druk R uit in x.

De schuifweerstand wordt 1 Ω groter, dus R_2 wordt $x+1$.
d. Druk het aantal Ω dat R groter wordt uit in x.

16 a. Ga na dat $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$ enzovoort.

Bekijk de formule $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)}$.
b. Voor welke x heeft de formule geen betekenis?
c. Bewijs dat formule juist is voor alle getallen x waarvoor hij betekenis heeft.

2 Wortels

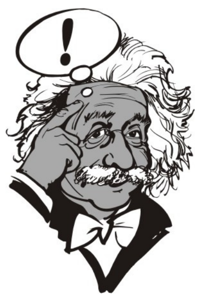


1 De oppervlakte van een vierkant hangt af van de grootte van zijn zijde. De zijde van een vierkant met oppervlakte A is $\sqrt{A}$.

a. Vul in:
als de oppervlakte 9 keer zo groot wordt, wordt de zijde zo groot. In formule: $\sqrt{9A} = \_\_\_ \cdot A$.

b. Vul in:
als de oppervlakte $\frac{1}{4}$ keer zo groot wordt, wordt de zijde zo groot.
In formule: $\sqrt{\frac{1}{4}A} = \_\_\_ \cdot A$.

c. Vul in:
als de oppervlakte 2 keer zo groot wordt, wordt de zijde zo groot.
Geef deze bewering ook in formulevorm.



Factoren voor het wortelteken brengen
Voorbeelden

$\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{700} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{7} = 10\sqrt{7}$

2 Schrijf zo ook met een zo klein mogelijk geheel getal onder het $\sqrt{}$ -teken.

$\sqrt{75}$ $\quad$ $\sqrt{80}$ $\quad$ $\sqrt{90}$

$\sqrt{0{,}05}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{5}{9}}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{3}{4}}$

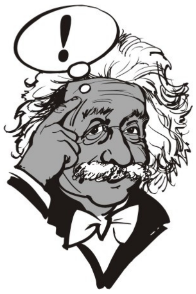
3 **a.** Leg uit dat $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

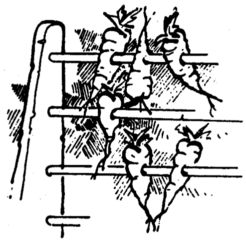
b. Behandel zo ook: $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{5}}$ en $\sqrt{\frac{1}{n}}$.

c. Leg uit dat geldt: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

d. Behandel zo ook: $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\sqrt{\frac{5}{7}}$ en $\sqrt{\frac{p}{q}}$.

De variabelen n, p en q zijn positief geheel.





Een wortel in de noemer
Voorbeeld

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}$$

Het kan ook zo:

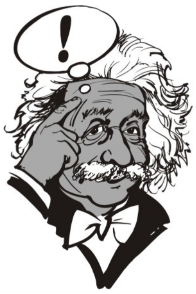
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}$$

van de noemer een kwadraat maken

4 Schrijf zonder wortel in de noemer, met een zo klein mogelijk getal onder het $\sqrt{\ }$ -teken.

$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

a en *b* zijn positieve gehele getallen.



Als wortel van één getal schrijven
Voorbeeld

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{\tfrac{1}{4}}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{\tfrac{7}{4}}$$

5 Schrijf als wortel van één getal.

$\tfrac{1}{2}\sqrt{8}$ $\qquad$ $\tfrac{1}{2}\sqrt{10}$ $\qquad$ $0{,}1\sqrt{8}$ $\qquad$ $0{,}1\sqrt{10}$

$3\sqrt{8}$ $\qquad$ $3\sqrt{10}$ $\qquad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ $\qquad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$

6 Toon aan

a. $\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}} = 3$

b. $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{2}$ Tip. Kwadrateer!

Peter kwadrateert $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$ en vindt 2.

c. Ga na dat Peter dat goed gedaan heeft.

Peter concludeert nu dat $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{2}$ **.**

d. Wat is hierop je commentaar?

7 Vereenvoudig:

$\sqrt{63}+\sqrt{28}$ $\quad$ $\sqrt{10}+\sqrt{2\tfrac{1}{2}}$

$\sqrt{63}-\sqrt{28}$ $\quad$ $\sqrt{10}-\sqrt{2\tfrac{1}{2}}$

$\sqrt{63}\cdot\sqrt{28}$ $\quad$ $\sqrt{10}\cdot\sqrt{2\tfrac{1}{2}}$

$\sqrt{63}:\sqrt{28}$ $\quad$ $\sqrt{10}:\sqrt{2\tfrac{1}{2}}$

8 Schrijf zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)$

$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$

$\left(2\sqrt{10}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{9}+\sqrt{\tfrac{1}{9}}\right)^2$

$\left(\sqrt{12}+\sqrt{8}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{10}+\sqrt{\tfrac{1}{10}}\right)^2$

$\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{11}+\sqrt{\tfrac{1}{11}}\right)^2$

$\left(\sqrt{14}+\sqrt{6}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{12}+\sqrt{\tfrac{1}{12}}\right)^2$

$\left(\sqrt{10+n}+\sqrt{10-n}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{10+n}+\sqrt{\tfrac{1}{10+n}}\right)^2$

9 Schrijf zo eenvoudig mogelijk, zonder wortel in de noemer ($x > 0$).

$\dfrac{9}{\sqrt{9}}$ $\quad$ $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

$\dfrac{2x}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $\dfrac{x}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $\dfrac{2x}{\sqrt{2x}}$

$\dfrac{2x+4}{\sqrt{2x+4}}$ $\quad$ $\dfrac{x}{\sqrt{2x}}$ $\quad$ $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$

$\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}+\tfrac{1}{2}x\sqrt{x}$

10 Schrijf zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

$\left(x+\sqrt{x}\right)^2$ $\left(x\sqrt{x}\right)^2$

$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)^2$ $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

11 a. Reken na dat $\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1$.

Kun je nu ook $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$ vereenvoudigen?

En $\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$?

b. Reken na dat $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{2\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

Kun je nu ook $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ vereenvoudigen?

En $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$?

c. Vul passende gehele getallen in:

$\sqrt{12+\sqrt{80}}=\sqrt{\_\_}+\sqrt{\_\_}$

12 Los de volgende vergelijkingen op.

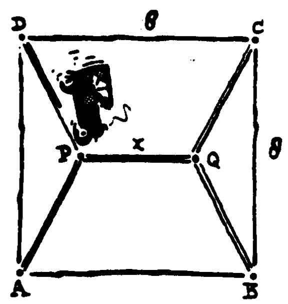
$\sqrt{x}=5$ $\sqrt{x}=-5$

$\sqrt{x}=x$ $\sqrt{x}=-x$

$\sqrt{x}=2x$ $x\sqrt{x}=2x$

$2\sqrt{x+1}=2+\sqrt{x+1}$ $\sqrt{x+2}=x$

$\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}=1+\sqrt{x}$ $\left(\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^2=4$



13 *A*, *B*, *C* en *D* zijn hoekpunten van een vierkant met zijden van lengte 8. *P* en *Q* liggen zó binnen het vierkant dat $AP=BQ=CQ=DP$. Er wordt een wegennet aangelegd zoals in de tekening hiernaast. De lengte van het net hangt af van de lengte van *PQ*, die we *x* noemen.

a. Druk *AP* in x uit.

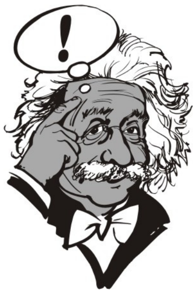
b. Bereken *x* als $AP=PQ$.

c. Bereken *x* als de lengte van het net 22 is.

14 Schrijf als één zo eenvoudig mogelijke enkelvoudige breuk.

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}$

$\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2x+2}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}{x-2}$



Voorbeeld
Schrijf zonder wortel in de noemer:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2}=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$$

15 Schrijf zonder wortel in de noemer.

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

$\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}$

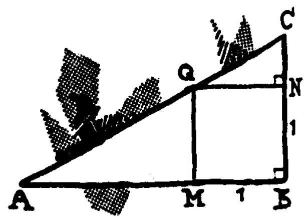
16 Bekijk de formule: $(x^2+1)\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$.

a. Laat dat deze formule geldt voor elke $x\neq 0$.

Bekijk de formule:

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\sqrt{(x+1)^2+\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}$$

b. Toon aan dat die voor positieve getallen x geldt.
Laat met een tegenvoorbeeld zien dat die niet voor negatieve getallen x geldt.



In de rechthoekige driehoek ABC hiernaast, ligt M op AB, N op BC en Q op AC zó, dat $BM=BN=1$ en $BNQM$ een rechthoek is. De lengte van AM noemen we x.

c. Toon aan dat $CN=\frac{1}{x}$. Tip. Gebruik gelijkvormigheid.

Door AC op twee manieren in x uit te drukken, kun je de formule boven aan de bladzijde meetkundig bewijzen.

d. Doe dat.

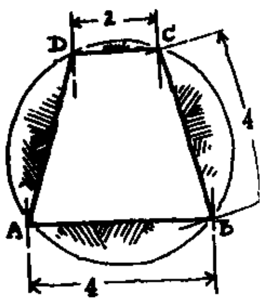
17 Bekijk de volgende formules:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \text{ en } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

a. Toon aan dat die voor positieve getallen x gelden.
Laat met een tegenvoorbeeld zien dat die niet voor negatieve getallen x gelden.

Bekijk nog eens de driehoek van de vorige opgave. Hoek CAB noemen we α.
Door in drie verschillende driehoeken te kijken, kun je $\cos\alpha$ op drie manieren in x uitdrukken.
b. Laat op die manier meetkundig zien dat de formules juist zijn voor positieve x.

18 Nederlandse wiskunde olympiade, 1991



Van trapezium $ABCD$ is gegeven: $DA=AB=BC=4$ en $CD=2$.
Bereken de oppervlakte van de cirkel door de punten A, B, C en D.

3 Evenredig

Voedingswaarde per 100 ml	
200 kilojoules	50 kilocalorieën
eiwit	3,5 gr
koolhydraten	5,0 gr
vet	1,5 gr
calcium	120 mg

1 Op een pak halfvolle melk van *Melkunie* is nevenstaande informatie te vinden.
a. Hoeveel gram eiwit zit er in een liter melk? En in een glas van 20 cl?
b. In een kop melk zit 180 mg calcium. Hoeveel gram koolhydraten zit er in?
c. Jaap moet van de dokter kalkrijker gaan eten. Daarom verhoogt hij het aantal bekers melk dat hij drinkt van één tot drie per dag. Hoeveel keer zoveel kalk (calcium) krijgt hij hierdoor binnen?

De hoeveelheid calcium (in mg) in een hoeveelheid melk noemen we x en de hoeveelheid koolhydraten y.
d. Maak de tabel en teken de grafiek (x horizontaal en y verticaal):

x	60	90	120	150	180	210	240	270	300
y									

e. Geef een formule voor het verband tussen y en x.

De status van een vrouw in een mannengezelschap neemt recht evenredig toe met haar kennis van en interesse in voetbal.
Stelling proefschrift
N. Tellegen, Amsterdam

> De variabele y is **evenredig** met de variabele x betekent:
> als x 2 keer zo groot wordt, dan wordt y ook 2 keer zo groot,
> als x $3\frac{1}{2}$ keer zo groot wordt, dan wordt y ook $3\frac{1}{2}$ keer zo groot,
> als x k keer zo groot wordt, dan wordt y ook k keer zo groot, voor elk getal k.
>
> **y is evenredig met x** noteren we met: y ~ x.

f. Is de hoeveelheid vet x (in gram) in een glas melk evenredig met de hoeveelheid eiwit y (in gram) in een glas melk?
Is de hoeveelheid calcium (in gram) in een kopje melk evenredig met de hoeveelheid melk (in cl) in dat kopje?

2 Witgoed-reparateur van Elten vraagt 30 euro voorrijkosten. Het arbeidsloon is 85 euro per uur. De firma Andriessen rekent geen voorrijkosten, maar een arbeidsloon van 110 euro per uur. Het totale bedrag dat je bij van Elten voor een reparatie betaalt, noemen we E, en bij Andries-

sen A. Het aantal uren dat er voor een reparatie nodig is, noemen we t.
a. Is E evenredig met t? Is A evenredig met t?
b. Bij welke reparatietijd is van Elten voordeliger dan Andriessen?

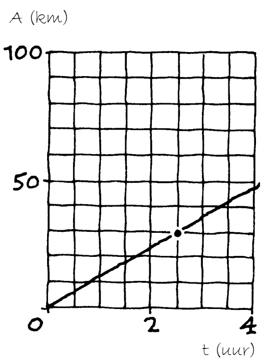
Als y ~ x, dan is er een constante c zó, dat $y = c \cdot x$.
Deze constante heet **evenredigheidsconstante**.

3 We bekijken alle mogelijke vierkanten. De oppervlakte van een vierkant noemen we A, de omtrek O, de zijde z.
a. Maak een tabel voor z en A en ook voor z en O.
b. Is A evenredig met z? Is O evenredig met z?
c. A is evenredig met een macht van z. Met welke macht van z?
d. Druk z uit in A.
e. Druk vervolgens O uit in A.

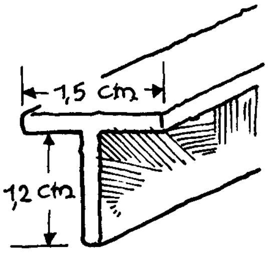
4 Een klaslokaal heeft een vloeroppervlakte van 60 m^2 en een hoogte van $3\frac{1}{2}$ m. Het aantal personen in het lokaal noemen we A, het beschikbare aantal m^3 per persoon M. Is A evenredig met M?

In de natuurkunde kom je vaak evenredige verbanden tegen.

Voorbeeld
De massa van een homogeen voorwerp is evenredig met zijn volume. Kort: massa ~ volume. De bijbehorende evenredigheidsconstante hangt af van het soort materiaal waarvan dat voorwerp gemaakt is. Die constante wordt dichtheid genoemd.



5 Van een schip wordt bijgehouden hoeveel kilometer het in een bepaalde tijd aflegt. In de grafiek hiernaast is de afgelegde afstand A in km verticaal uitgezet tegen de tijd t in uur horizontaal. A is evenredig met t.
a. Hoe zie je aan de grafiek dat A ~ t?
b. Bepaal de evenredigheidsconstante.
c. Wat is de natuurkundige betekenis van de evenredigheidsconstante?



6 In de winkel kun je diverse profielen van aluminium op verschillende lengtes krijgen. We bekijken een profiel dat van 2 mm dik aluminium gemaakt is. Hiernaast is de doorsnede van zo'n profiel getekend. De maten staan erbij. De dichtheid van aluminium is 2,70 kg per dm^3.

a. Wat weegt het profiel per meter?

b. Twee profielen hebben dezelfde afmetingen. Het ene is uitgevoerd in nikkel, het andere in aluminium. De dichtheid van nikkel is 8,90 (kg per dm^3). Het aluminiumprofiel weegt 100 gram.

Hoeveel weegt het nikkel profiel (in honderdste grammen)?

c. Het gewicht van een aluminium profiel noemen we x en dat van eenzelfde profiel in nikkel y (beide in gram).

Is $y \sim x$? Zo ja, bepaal de bijbehorende evenredigheidsconstante.

7 Oude klokken hebben een slinger. Die zorgt ervoor dat het uurwerk regelmatig loopt. De slingertijd van een klok is de tijd die nodig is voor één volledige slingerbeweging (bijvoorbeeld van helemaal links naar helemaal rechts en terug). Hoe langer de slinger is, hoe langzamer hij heen en weer gaat, dus hoe groter de slingertijd is. Uit proeven blijkt dat de slingertijd evenredig is met de wortel van de lengte van de slinger. In formule: $T = c \cdot \sqrt{L}$. Hierbij is T de slingertijd in seconden en L de lengte van de slinger in cm.

We bekijken een bepaalde klok. Als de lengte van de slinger 64 cm is, is de slingertijd 0,8 seconden.

a. Geef de formule voor de slingertijd T, uitgedrukt in de lengte van de slinger L.

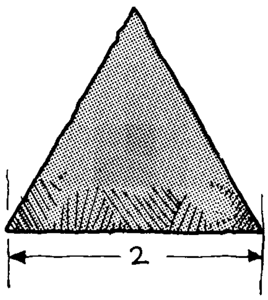
b. $L \sim T^2$, dus de lengte van de slinger is evenredig met het kwadraat van de slingertijd. Laat dit zien en bepaal de bijbehorende evenredigheidsconstante bij de klok hierboven.

c. Hoeveel slingeringen maakt de klok in een uur?

d. Iemand wil de klok één minuut per uur sneller laten lopen. Het aantal slingeringen uit **c** moet dan in 59 minuten gehaald worden.

Wat wordt de nieuwe slingertijd?

Hoeveel mm moet hij de slinger daarvoor korter maken?

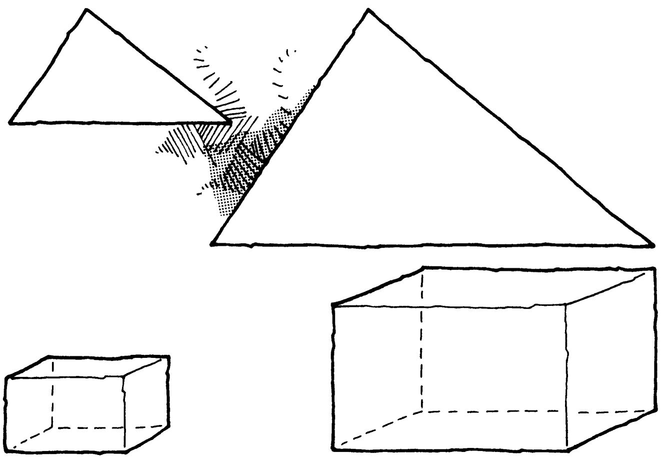


8 We bekijken alle mogelijke gelijkzijdige driehoeken. De oppervlakte van zo'n driehoek noemen we O en de lengte van een zijde z.
a. Bereken de exacte hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 2.

Voor O en z geldt een formule in de gedaante: $O = c \cdot z^2$.
b. Bepaal het getal c.
c. Als van een gelijkzijdige driehoek de zijde 3 keer zo groot wordt, hoeveel keer zo groot wordt dan de oppervlakte?

Je ziet dat O niet evenredig is met z. Maar: $O \sim z^2$.

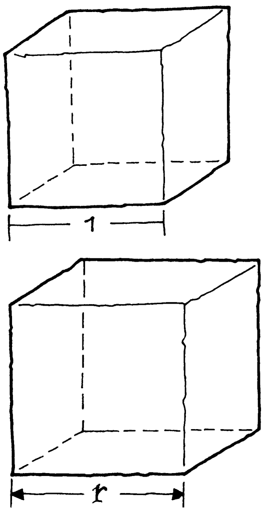
9 In de rechter driehoek hieronder zijn de zijden 2 keer zo groot als in de linker. We zeggen: de linker driehoek is met factor 2 uitvergroot tot de rechter. In het rechter blok zijn de ribben twee keer zo lang als in het linker.



a. Ga na hoe vaak de kleine driehoek in de grote past.
b. Ga na hoe vaak het kleine blok in het grote past.

In het boekje **15-Gelijkvormigheid** heb je het volgende gezien.

Als een ruimtelijke figuur met factor f wordt vergroot, dan wordt de oppervlakte vergroot met factor f^2 en de inhoud met factor f^3.



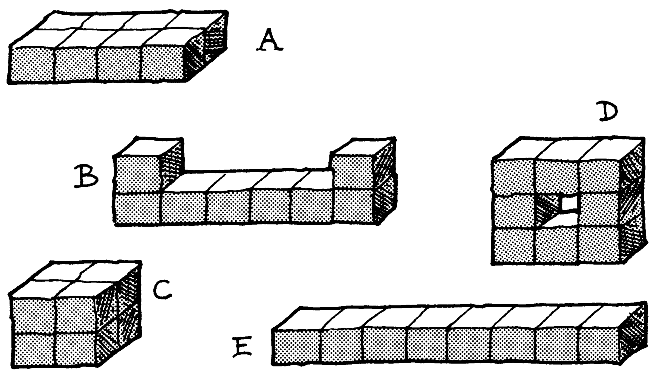
10 We bekijken eerst een kubus met ribbe 1.
a. Wat is de inhoud en wat is totale oppervlakte van de kubus?

We vergroten de kubus met factor r. Dan wordt de ribbe dus r. De totale oppervlakte van een kubus noemen we O en de inhoud I.
b. Druk I en O uit in r.
c. Toon aan: $O^3 \sim I^2$ en bepaal de bijbehorende evenredigheidsconstante.

Als je aanneemt dat mensen gelijkvormig zijn, dan volgt met een redenering als hierboven ook dat $H \sim \sqrt[3]{G^2}$, met H de huidoppervlakte van een mens en G zijn gewicht.

11 Meeh verrichtte bij mensen huidoppervlakte-metingen door de huid stukje voor stukje met millimeterpapier te bedekken. Zo vond hij de formule $H = 11{,}2\ \sqrt[3]{G^2}$, G in kg en H in dm^2. De evenredigheidsconstante is dus 11,2. Hierbij moet je wat lichaamsbouw betreft uitgaan van een 'gemiddelde' mens.
a. Wat is volgens Meeh de huidoppervlakte van een mens van 80 kg?
b. Druk G uit in H.

12 Om de maagsappen goed op het voedsel in te laten werken, wordt het gekauwd. Hoe groter de verhouding oppervlakte: inhoud van het voedsel, hoe beter de spijsvertering. De volgende bouwsels van 8 kubussen stellen stukjes voedsel voor. We bekijken de verhouding $O : \sqrt[3]{I^2}$; hierbij is O de oppervlakte van het bouwsel en is I de inhoud. Deze constante hangt niet af van de afmetingen van het bouwsel, maar alleen van de vorm. We mogen dus aannemen dat de ribben van de kubusjes 1 zijn.



a. Probeer zonder te rekenen de bouwsels te rangschikken naar grootte van hun verhouding $O : \sqrt[3]{I^2}$.

b. Bepaal die verhouding voor elk van de bouwsels.

13 We bekijken alle soorten rechthoeken. De mate waarin ze afwijken van een vierkant, geven we aan met de verhouding van hun lengte en breedte. Dit getal noemen we e (de excentriciteit van de rechthoek). Zo is $e = 2$ als de lengte van de rechthoek 1 en de breedte 2 is. We zorgen ervoor dat $e \geq 1$.

a. Hoe groot is de waarde van e voor een vierkant?

b. Wat kun je opmerken over rechthoeken met dezelfde e-waarde?

De oppervlakte van een rechthoek noemen we A en de omtrek O.

c. Voor rechthoeken met $e = 4$ geldt: $A = \frac{1}{25} O^2$.

Toon dat aan.

d. Rechthoeken met dezelfde e-waarde zijn uitvergrotingen van eenzelfde rechthoek.

Toon aan dat voor die rechthoeken geldt: $\frac{A}{O^2} = \frac{e}{4(e+1)^2}$.

14 Meneer Broekema geeft lessen van 50 minuten. Daarvan besteedt hij 20 minuten aan de bespreking van het huiswerk en uitleg; de rest van de tijd helpt hij de leerlingen individueel. Het aantal leerlingen dat hij in een lesuur heeft, noemen we A. De tijd (in minuten) die hij voor elke leerling individueel heeft, noemen we T.

a. Geef het verband tussen A en T.

b. Meneer Broekema heeft uitgerekend dat hij in een bepaalde klas 50 seconden voor elke leerling individueel heeft per les. Hoeveel leerlingen heeft hij in die klas?

c. Wat gebeurt er met T als A 2 keer zo groot wordt? Wat gebeurt er met T als A $1\frac{1}{2}$ keer zo groot wordt?

In een andere klas is één leerling vertrokken. Meneer Broekema heeft uitgerekend dat hem dat 3 seconden per leerling individueel scheelt.

d. Noem het aantal leerlingen dat hij eerst in de klas had x, dan geldt: $\left(\frac{30}{x} + \frac{1}{20}\right)(x-1) = 30$. Leg dat uit.

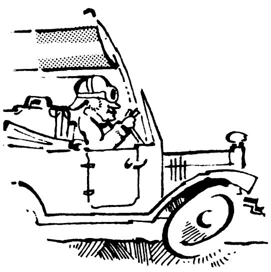
e. Los deze vergelijking op door de haakjes weg te werken en beide kanten met x te vermenigvuldigen.

f. Hoeveel leerlingen heeft hij nu nog in die klas?

> Als A k keer zo groot wordt, dan wordt T k keer zo klein en omgekeerd. A is dan evenredig met het omgekeerde van T. We zeggen: A is **omgekeerd evenredig** met T.

15 Meneer de Vrij rijdt 600 km over Duitse autowegen naar zijn vakantiebestemming. De reistijd T (in uren) hangt af van de (gemiddelde) rijsnelheid v (in km/u).
a. Geef een formule voor het verband tussen v en T.
Teken de grafiek van T als functie van v op je GR.
b. Meneer de Vrij heeft dit jaar een nieuwe auto gekocht. Zijn rijsnelheid was vorig jaar 90 km/u. Met zijn nieuwe auto weet hij de rijsnelheid op te voeren tot 100 km/u. Hoeveel scheelt dat in zijn reistijd over de Duitse autowegen?
c. Mevrouw de Vrij zit op de terugweg achter het stuur. Zij rijdt, ook omdat het wat minder druk is, met een gemiddelde rijsnelheid van 120 km/u. Meneer de Vrij rekent voor, dat de gemiddelde snelheid heen en terug dan 110 km/u is. Als volgt: heen 100 km/u en terug 120 km/u. Dat is gemiddeld 110 km/u. Mevrouw is het hier niet mee eens. Laat zien dat mevrouw gelijk heeft.

16 Jan van den Heuy is forens. Hij rijdt elke dag heen en weer tussen werk en huis. Zijn gemiddelde snelheid heen is 20 km/u. De gemiddelde snelheid terug 30 km/u.
Bereken zijn gemiddelde snelheid over het traject heen en terug. Doe dit als de weg naar het werk 30 km lang is en ook als die 60 km lang is.

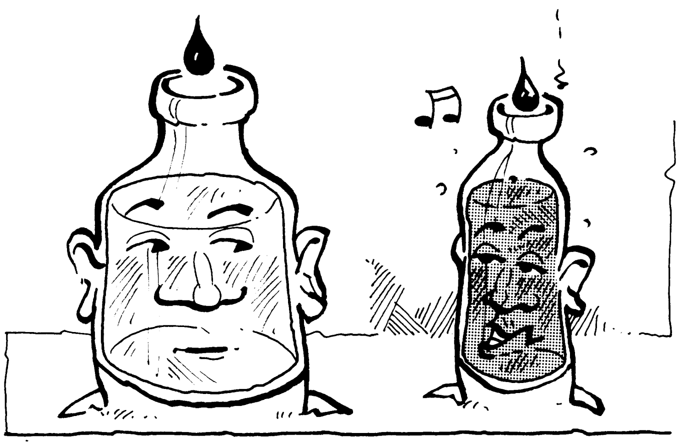


> Als $y \sim \frac{1}{x}$, dus $y = \frac{c}{x}$ voor een of ander getal c, dan is de grafiek van y als functie van x een hyperbool met de x-as en de y-as als asymptoten.

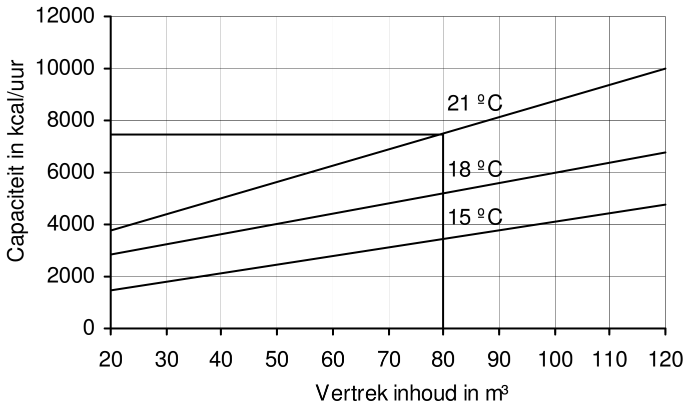
17 Voor x, y en z geldt: $x \sim y$ en $y \sim \frac{1}{z}$.
Als x = 3, dan y = 6 en z = 1.
Druk y uit in x, druk y uit in z en druk z uit in x.

4 Toepassingen

1 Alcoholpromillage
Van alcohol word je dronken. Hoe dronken je wordt, hangt niet alleen af van het aantal glazen alcoholische drank, maar ook van je lichaamsgewicht. Het aantal glazen alcoholische drank noemen we A, het gewicht G (in kg) en het alcoholpromillage in je bloed P. We nemen aan dat alle glazen evenveel alcohol bevatten.
Met de volgende vuistregel kun je P berekenen als je A en G kent: $P = 18 \cdot \frac{A}{G}$. Deze formule geldt een half uur nadat je snel achter elkaar de glazen hebt gedronken.
Als je met een alcoholpromillage boven 0,5 aan het verkeer deelneemt, ben je strafbaar.
a. Hoeveel glazen kan iemand van 72 kg maximaal drinken, wil hij nog aan het verkeer deel mogen nemen?
b. Iemand drinkt 3 glazen snel achter elkaar. P hangt af van zijn gewicht G.
Teken de grafiek van P als functie van G.
c. Neem voor G het getal 72.
Zijn A en P evenredige grootheden?
d. Neem voor A het getal 3.
Zijn P en G evenredige grootheden?
e. Neem voor P het getal 0,5.
Zijn A en G evenredige grootheden?



2 In kleinere kamers staan meestal kleinere cv-radiatoren dan in grotere kamers. Dit heeft te maken met de zogenaamde capaciteit van de verwarming; dit is een maat voor de hoeveelheid warmte die een radiator af kan geven. De grootte van de kamer bepaalt hoeveel capaciteit er nodig is. Hieronder zie je een grafiek waaruit je de benodigde capaciteit kunt aflezen als je de inhoud van de kamer kent.



Om een kamer van 80 m^3 op een temperatuur van 21 °C te houden is volgens de grafiek een capaciteit van ongeveer 7500 kcal/uur nodig.

a. Welke capaciteit is voldoende om de kamer op 18 °C te houden?

b. Een kamer van 8 m lang, 4 m breed en 2,60 m hoog moet een temperatuur van 18 °C hebben.
Welke capaciteit is nodig?

Dat de grafieken stijgend zijn is niet verwonderlijk. Ook niet dat de grafieken bij hogere temperaturen hoger liggen. Maar waarom lopen de grafieken niet parallel?

c. Een kamer moet op 15 °C gehouden worden.
Hoeveel moet de capaciteit stijgen als de kamer 1 m^3 groter wordt?
Een andere kamer moet op 18 °C gehouden worden.
Hoeveel moet de capaciteit stijgen als deze kamer 1 m^3 groter wordt?

d. Leg nu uit waarom de grafieken niet parallel lopen.

e. Een radiator heeft een capaciteit van 8000 kcal/uur.
Op welke temperatuur kan deze radiator een kamer van 110 m^3 ongeveer houden?

f. Een radiator heeft zo'n capaciteit dat een kamer van 50 m^3 op 18 °C gehouden kan worden.
Hoeveel m^3 mag de kamer zijn die door dezelfde radiator op 15 °C kan worden gehouden?

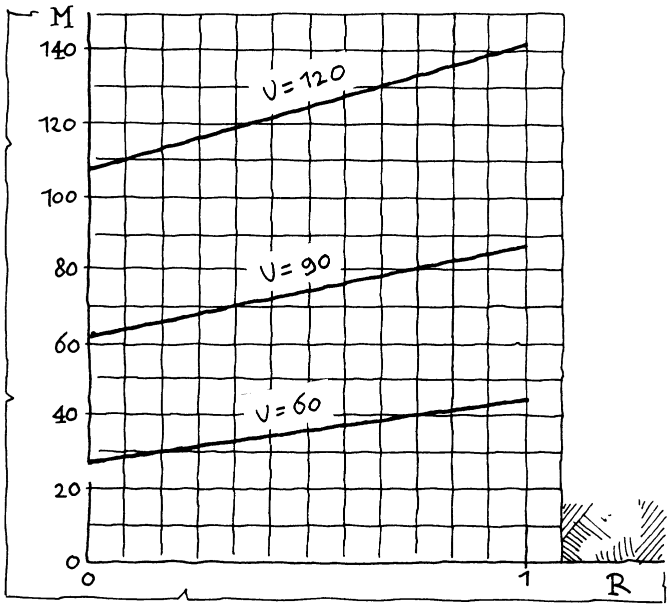
g. Bereken voor iedere lijn $\frac{\Delta cap}{\Delta inh}$.

h. Een kamer van 120 m^3 heeft een capaciteit van 6800 kcal/uur nodig om hem op 18 °C te houden.

Gebruik je antwoord op vraag **g** om te *berekenen* hoeveel capaciteit een kamer van 144 m^3 nodig heeft om hem op 18 °C te houden.

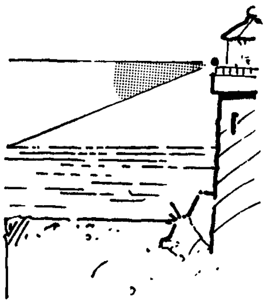
i. Stel voor elke lijn een formule op. Kies zelf letters voor de capaciteit en de inhoud.

3 Stel je voor, je rijdt op een autoweg en voor je wordt plotseling geremd. Jij remt ook uit alle macht. Hoeveel meter leg je af (sinds het moment waarop je voorganger remde) voordat je stil staat? Dat hangt af van twee factoren: je *reactietijd* (de tijd die verstrijkt tussen het moment dat je voorganger remt en het moment dat jij remt) en de *snelheid* waarmee je rijdt.
M = het aantal meters dat je af legt voordat je stil staat.
R = je reactietijd (in seconden).
Hieronder staan bij drie snelheden V (in km/u) de grafieken van het verband tussen M en R.



a. Stel een formule op voor de lijn V = 90.

b. Neem aan dat jouw reactietijd 0,5 sec bedraagt. Bij elke snelheid V hoort een waarde van M.
Hoe kun je uit de grafieken concluderen dat het verband tussen M en V *niet* lineair is?

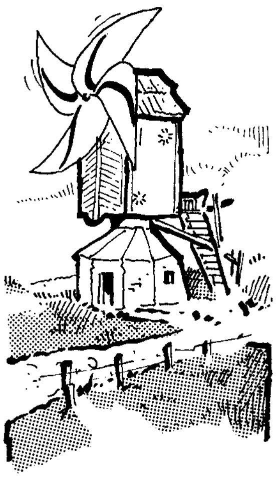


4 Kimduiking

Je staat op een vuurtoren aan het strand en je kijkt over zee. Omdat je je op een behoorlijke hoogte bevindt, ligt de horizon (de kim) duidelijk onder je. Hoeveel hij onder je ligt heet wel de *kimduiking* en wordt gemeten in minuten. Een minuut is het $\frac{1}{60}$ -ste deel van een graad.

In het plaatje hiernaast is aangegeven welke hoek de kimduiking is: de hoek tussen de horizontale lijn en en kijklijn waarlangs je de horizon ziet.
Duidelijk is dat de kimduiking k afhangt van de hoogte h waarop je je bevindt. Er geldt de volgende merkwaardige formule: $k = \sqrt{h}$, waarbij h gemeten wordt in voeten en k in minuten. Een voet is 30,5 cm.
a. Teken de grafiek van k als functie van h. Welk window kies je?
b. Hoe verandert k als h twee keer zo groot wordt?
Hoe moet je h veranderen als je k twee keer zo groot wilt maken?
c. Iemand verplaatst zich van hoogte 36 voet naar hoogte 36,4 voet.
Hoeveel neemt de kimduiking dan toe?
Hoeveel is dat gemiddeld per voet dat de hoogte toeneemt?

Het is ouderwets om hoeken in minuten te rekenen en hoogtes in voeten. Als we de kimduiking gewoon in graden rekenen en de hoogte in meters, wordt de formule minder mooi.
d. Stel de nieuwe formule op.



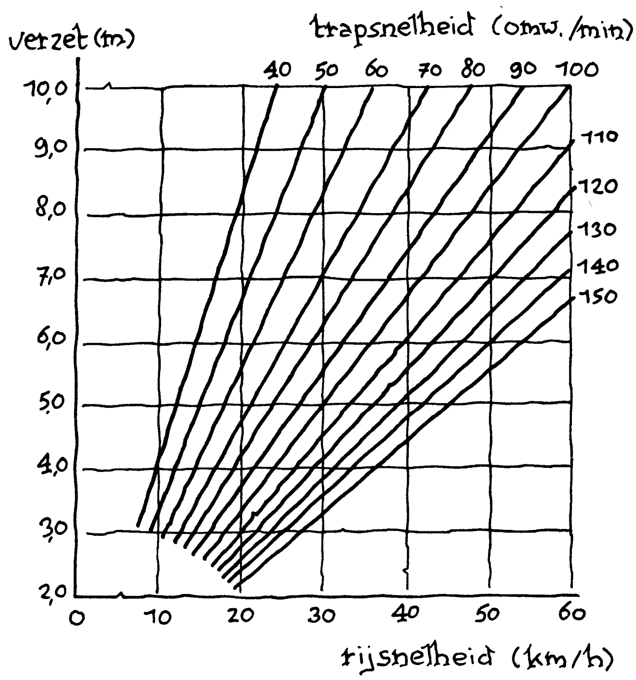
5 Windenergie

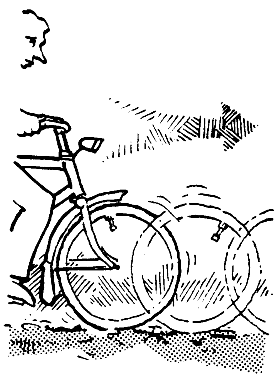
De hoeveelheid vermogen die een windmolen levert, is evenredig met de derdemacht van de windsnelheid. De windsnelheid noemen we w (m/s) en de geleverde energie E (watt). Er is dus een evenredigheidsconstante c, zo dat $E = c \cdot w^3$.
Een zekere molen levert 300 watt bij een windsnelheid van 10 m/s.
a. Bereken de evenredigheidsconstante c.
b. Teken de grafiek van E als functie van w. Kies bij het window: $0 \leq x \leq 50$. Wat zijn de bijbehorende y-waarden?
c. Hoe hard moet het waaien wil de geleverde energie 500 watt bedragen?
d. Als het harder gaat waaien neemt de geleverde energie toe. De windsnelheid neemt toe van 10 tot 10,6 m/s.
Met hoeveel watt neemt de geleverde energie dan toe?
Hoeveel is dat gemiddeld per m/s dat de windsnelheid toeneemt?

6 Verzet

Als je tegen een berg op fietst of tegen de wind in, kun je beter in een kleine versnelling rijden. In wielertermen: in een kleiner verzet. Dan gebruik je op het achterwiel een groot tandwiel, dus met veel tandjes.
Vergelijk een groot met een klein verzet. Bij beide trappen we de pedalen één keer rond.
a. Bij welk van de twee rijden we het hardst?
Bij welk van de twee kost dat het meeste moeite?

Hieronder staat een **bundel grafieken**, afkomstig uit het *Prisma Fietsboek*. Bij twaalf trapsnelheden is de grafiek getekend van het verband tussen de rijsnelheid en het verzet. Hierbij is het verzet het aantal meters dat je aflegt, als je de pedalen één keer rond trapt.



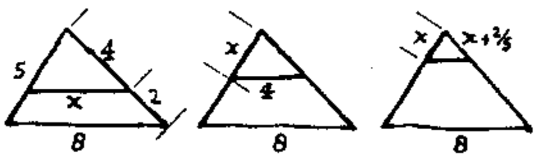


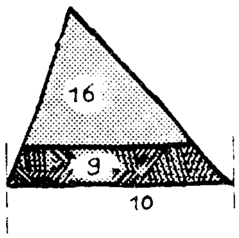
b. Anneke trapt de pedalen elke seconde één keer rond met een verzet van 6,0 meter.
Hoe hard fietst Anneke (in km/uur)?
c. Anneke rijdt in een zeker verzet en zal niet schakelen (van verzet veranderen). Als ze twee keer zo hard wil rijden, moet ze dan ook twee keer zo snel trappen?
Onderzoek met de grafiek of dat het geval is.

Algemener geldt: als Anneke p keer zo hard wil gaan rijden, moet ze ook p keer zo snel gaan trappen. De trapsnelheid noemen we T, de rijsnelheid S.
d. Teken de grafiek voor T en S, bij verzet V = 6 (T verticaal, S horizontaal).
e. Stel een formule op voor T uitgedrukt in S bij V = 6.

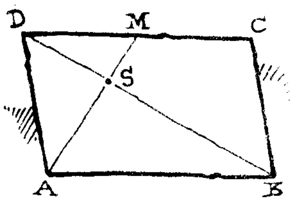
5 Rekenen in de meetkunde

1 We trekken in een driehoek met zijden 5, 6 en 8 een lijnstuk evenwijdig aan een van de zijden.
Bereken *x* in elk van de gevallen.

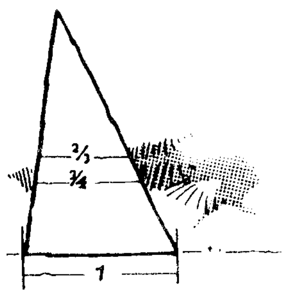




2 Een driehoek wordt door een lijnstuk evenwijdig aan de basis verdeeld in twee stukken. De oppervlakte van elk van de stukken is gegeven. De basis van de driehoek is gegeven.
Bereken de lengte van het lijnstuk.

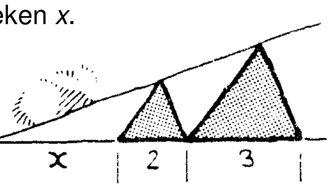


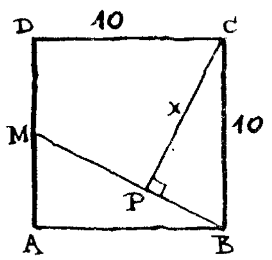
3 ABCD is een parallellogram. M is het midden van CD. S is het snijpunt van AM en BD. Gegeven is dat AM = 6 en BD = 10.
a. Bereken AS, BS, MS en DS.
b. Bereken de verhouding van oppervlakten van de vier stukken waarin het parallellogram is verdeeld.



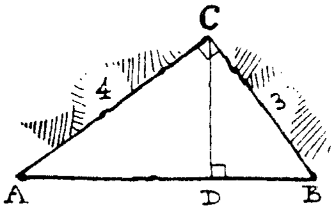
4 In een driehoek zijn twee lijnstukken evenwijdig aan de basis getekend. De lijnstukken hebben lengte $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$. De basis heeft lengte 1.
Bereken de verhouding van de drie stukken waarin de opstaande zijden worden verdeeld.

5 De twee driehoeken in de figuur hieronder zijn gelijkvormig. Verder zie plaatje.
Bereken *x*.



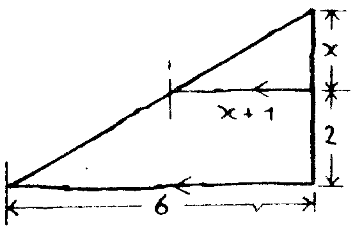


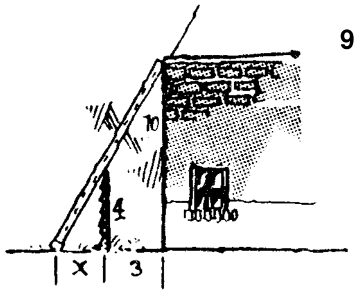
6 In vierkant *ABCD* is *M* het midden van *AD* en staat *CP* loodrecht op *BM*.
Bereken de lengte van *CP*.



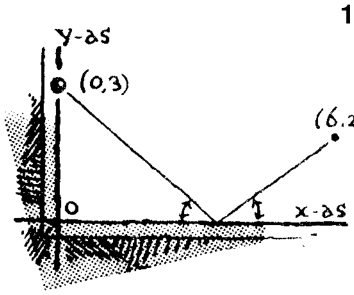
7 Driehoek *ABC* is rechthoekig. *CD* is de hoogtelijn op de schuine zijde.
a. Bewijs dat de driehoeken *ADC*, *CDB* en *ABC* gelijkvormig zijn.
b. Bereken de stukken waarin *D* de schuine zijde verdeelt.

8 Bereken *x* in de figuur hieronder.

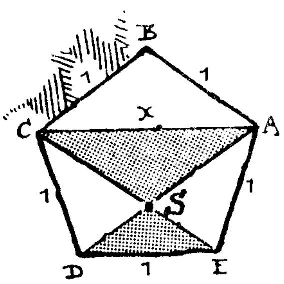




9 Op 3 meter afstand van een huis staat een viermeter hoge schutting. Een ladder staat tegen de gevel en steunt precies op de schutting.
Bereken hoe ver de voet van de ladder voor de schutting staat als hij 10 meter hoog reikt.



10 We biljarten zonder effect via de *x*-as van (6,2) naar (0,3). De bal vertrekt van de band onder dezelfde hoek als hij er aankomt.
In welk punt moeten we de *x*-as raken?

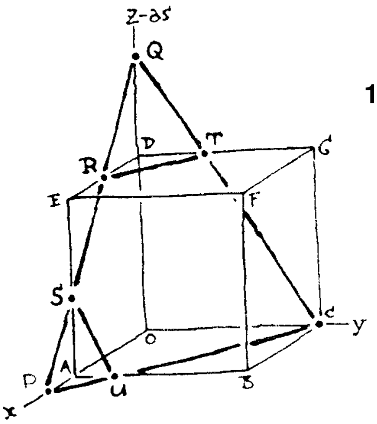


11 *ABCDE* is een regelmatige vijfhoek met zijden van lengte 1. De diagonalen *AD* en CE snijden elkaar in *S*.
a. Laat zien dat de driehoeken *ACS* en *DES* gelijkvormig zijn.

De lengte van *AC* noemen we *x*.
b. Laat zien dat $x^2 - x = 1$.
c. Bereken de exacte waarde van *x*.

De verhouding van de stukken waarin de diagonalen elkaar verdelen stond al bij de oude Grieken in de belangstelling. Het is de zogenaamde *gulden verhouding.*

$$\frac{\text{diagonaal}}{\text{grote stuk}} = \frac{\text{grote stuk}}{\text{kleine stuk}}$$



12 *OABC*·*EFGH* is een kubus met *O*(0,0,0), *A*(6,0,0), *C*(0,6,0) en *D*(0,0,6). Op de *x*-as ligt *P*(8,0,0) en op de *z*-as *Q*(0,0,9). Driehoek *PQC* snijdt vier ribben van de kubus. De snijpunten noemen we *R*, *S*, *T* en *U*, zie plaatje.

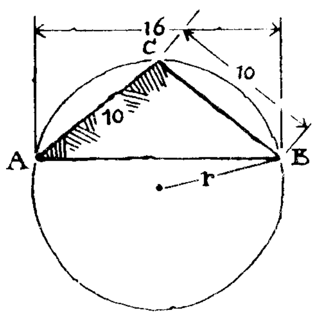
a. Bereken de coördinaten van de snijpunten.

b. Welk deel van de oppervlakte van driehoek *PQC* ligt binnen de kubus?

Q beweegt over de *z*-as. Hierdoor verandert de lengte van lijnstuk *TR*.

c. Bereken de *z*–coördinaat van *Q* als $T = (0,5,6)$.

d. Wat is de maximale lengte van lijnstuk *RT* en bij welke *z*-coördinaat van *Q* wordt die bereikt?



13 Van driehoek *ABC* hiernaast is gegeven $AB = 16$ en $AC = BC = 10$.

a. Bereken de oppervlakte van driehoek *ABC*.

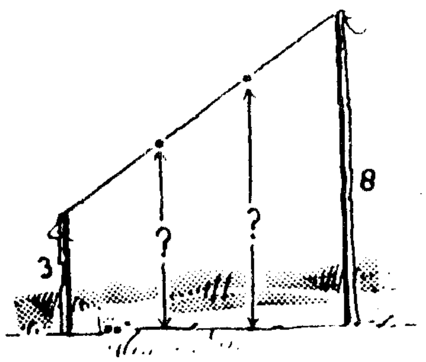
b. Bereken de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*.

Tip. Stel een vergelijking op met behulp van de stelling van Pythagoras.

14 De twee verticale palen van lengte 3 en 8 meter in het plaatje hieronder staan op een horizontaal terrein. Tussen de palen loopt een strak gespannen draad. De draad is verdeeld in drie even lange stukken.

a. Hoe hoog liggen de verdeelpunten boven het terrein?

b. Dezelfde vraag als de palen a en b meter lang zijn (met $a < b$). Vereenvoudig je antwoord.

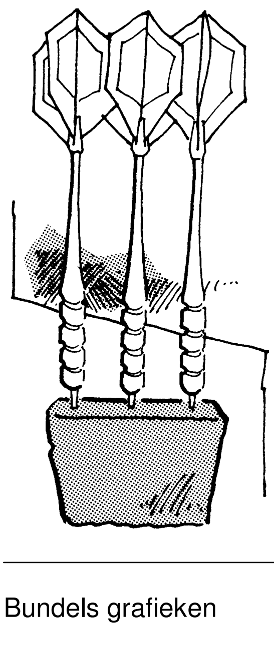


6 Bundels grafieken

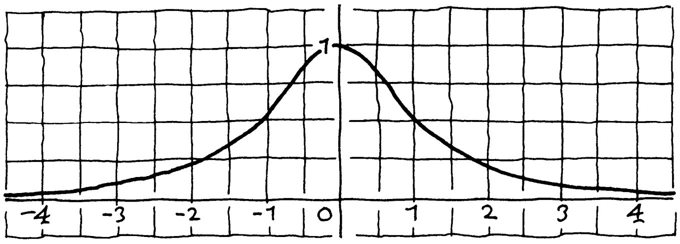
1 We bekijken voor elk getal a de functie $y = \frac{1}{2}(x-a)^2 - 2$. Als we bijvoorbeeld voor a het getal 3 kiezen, hebben we de functie $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$. Als we voor a het getal -1 kiezen, hebben we de functie $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$.
a. Welke functie krijg je, als je voor a het getal 0 kiest ?
b. De grafieken van alle functies $y = \frac{1}{2}(x-a)^2 - 2$ hebben dezelfde vorm. Welke vorm ?
Wat weet je van de top van de grafieken te vertellen ?
c. Teken op de GR in één window de grafieken bij a = 0, a = -1 en a = 3.
d. Hoe ontstaat de grafiek van $y = \frac{1}{2}(x-a)^2 - 2$ uit de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$?

De formule $y = \frac{1}{2}(x-a)^2 - 2$ legt een **bundel** functies vast. Voor elk getal a krijg je een exemplaar uit die bundel. Al die functies zijn “familie” van elkaar. In opgave **1** ontstaan de grafieken uit elkaar door horizontale verschuivingen.
De letter a in de formule $y = \frac{1}{2}(x-a)^2 - 2$ is de **parameter** van de bundel.

2 We gaan verder met de bundel grafieken uit opgave **1**. Een fraai beeld van de bundel krijg je door de grafieken op de grafische rekenmachine te tekenen. Dat gaat zo:
$Y_1 = \frac{1}{2}(x-\{0,1,2,3\})^2 - 2$.
a. Teken enkele exemplaren op de GR. Je kunt de functies een voor een invoeren. Maar je kunt ook de bundel als geheel invoeren.
b. In welke punten snijdt $y = \frac{1}{2}(x-7)^2 - 2$ de x-as ?
c. Er zijn twee exemplaren in de bundel die door het punt $(-5, 2\frac{1}{2})$ gaan.
Bereken de waarden van de parameter a van deze twee functies.
d. De grafiek van $y = \frac{1}{2}(x-7)^2 - 2$ verschuiven we 3 eenheden naar links.
Wat is de waarde van de parameter a van het exemplaar dat je dan krijgt?



3 Hieronder staat de grafiek van de functie $y = \frac{1}{1+x^2}$ met domein $-4\frac{1}{2} \le x \le 4\frac{1}{2}$.



Uit deze grafiek leiden we de bundel $y = \frac{a}{1+x^2}$ af.

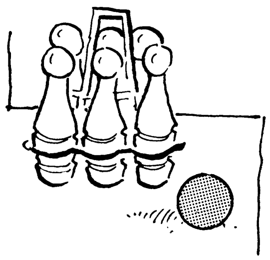
a. Kun je op grond van de formule zeggen hoe de grafieken in de bundel eruit zien ?
b. Teken enkele exemplaren van deze bundel op de GR.
c. Wat hebben alle grafieken in deze bundel gemeenschappelijk?
d. Voor welke waarden van a gaat de grafiek door het punt (1,-3)?
e. Voor welke waarden van a heeft de grafiek precies één punt gemeen met de lijn $y = 2$?

4 We bekijken de functies $y = \frac{a}{1+x^2}$.

a. Bepaal het getal a zo, dat de grafiek door het punt $(1, 2\frac{1}{2})$ gaat.
Controleer je antwoord op de GR.
b. Bepaal het getal a zo, dat het bereik van de functie is: de verzameling positieve getallen die kleiner dan of gelijk aan $2\frac{1}{2}$ zijn.

5 We bekijken voor elk getal a de functie: $y = x(x-a)$.

a. Teken voor enkele waarden van a de grafiek op de GR.
b. Voor welk getal a ligt het punt (-2,10) op de grafiek ?
c. Voor welk getal a liggen de snijpunten van de grafiek van de functie met de x-as op afstand 5 van elkaar ? (Twee mogelijkheden)
d. Voor welk getal a is de lijn $x = -2$ symmetrie-as ?
e. Voor welke a ligt de top van de grafiek op de lijn $y = -9$?

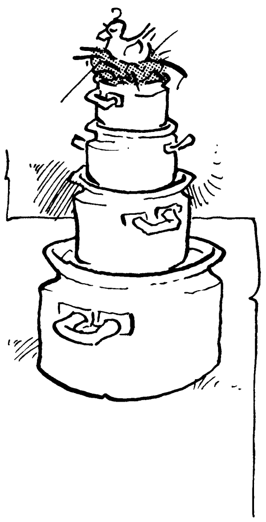


6 We bekijken de functies $f(x) = \frac{a}{x}$ met $a > 0$.

a. Wat voor soort grafiek hebben deze functies ?
b. Teken enkele grafieken op de GR.
c. Voor welke a ligt het punt (2,-5) op de grafiek ?
d. Kies $a = 6$. De lijn $y = x$ snijdt de grafiek van $f(x) = \frac{6}{x}$ in twee punten.
Bereken de afstand van deze twee punten.
e. De lijn $y = x$ snijdt de grafiek van $f(x) = \frac{a}{x}$ in twee punten die een afstand 4 tot elkaar hebben.
Bereken de waarde van a in dat geval.

7 We bekijken de functies $f(x) = 3 + a(x-2)$ en de functies $g(x) = b-x$.
a. Wat voor soort grafiek hebben de functies f ?

Je ziet dat de grafieken van alle functies f door één punt gaan.
b. Welk punt is dat ?
Kun je dat ook uitleggen aan de hand van de formule $f(x) = 3 + a(x-2)$?
c. Wat voor soort grafiek hebben de functies g ?
d. Wat hebben de functies g gemeenschappelijk ?
e. Er is één functie die tot beide bundels behoort. Welk functie is dat ? Wat zijn de bijbehorende waarden van de parameters a en b ?



Antwoorden

Paragraaf 1 Breuken

1

87	174	$43\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
b	bp	ab
$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{p}$	bp

2

$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$
$\frac{2x}{15}$	$\frac{2}{3}$

3

fout	fout
fout	fout
fout	goed
goed	fout
goed	goed

4

- ja
- ja
- nee
- ja
- nee

5

$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{99}$
$\frac{13}{20}$	$\frac{31}{32}$
$\frac{5}{t}$	$\frac{t^2+9}{3t}$
$\frac{5t}{6}$	$\frac{2t+3}{t}$
$\frac{2x}{x^2-1}$	$\frac{-2}{x^2-1}$
$\frac{x^2+1}{x^2-1}$	$\frac{-1}{x+1}$
$\frac{x^2}{x-3}$	$\frac{x^2-6x}{x-3}$
$\frac{2x}{(x+5)(x+3)}$	$\frac{-5}{(x+5)^2}$

6 $3, \frac{1}{3}$ | $1, -1$
geen oplossing | -1

7	$\frac{27}{64}$	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{n}{t}$
	$\frac{t^2}{3}$	3	$\frac{6}{t^2}$	$\frac{n}{t}$

8	$\frac{3+6a}{18+6b}$	$\frac{1+2a}{1-2a}$

9	$\frac{30}{199}$	$\frac{a+b}{ab-1}$
	$\frac{12}{13}$	$\frac{a+1}{a+2}$
	$\frac{1}{a^2+a}$	a^2+a

10	fout	goed
	fout	fout

11	$-\frac{x+3}{x+2}$	$\frac{x}{x-2}$
	$\frac{x(x-2)}{x-3}$	4
	$\frac{4}{x-2}$	$\frac{x+2}{x-2}$
	$\frac{-2}{x+2}$	x^5+1

12	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{2}$	9
	a	$\frac{1}{x}$	$\frac{a^2}{x^2}$
	$\frac{a^2}{bx}$	$\frac{x}{b}$	$\frac{x}{a}$
	x^2-x	0	x^2-x

13	$\frac{9}{8}$	$-\frac{10}{3}$
	11	$\frac{3}{10}$

14 a. $b=\frac{v}{v-1}$

b. $V = \dfrac{1}{v-1}$

c. $1\frac{1}{2}$

d. Naar de lens toe. Als v groter wordt, dan wordt $\dfrac{1}{v}$ kleiner, dus $\dfrac{1}{b}$ groter, dus b kleiner.

e. $\dfrac{1}{v(v-1)}$

15 a. $\dfrac{1}{R_2}$ wordt dan kleiner, dus $\dfrac{1}{R}$ ook, dus R wordt groter.

b. Als R_2 heel groot is, dan is $\dfrac{1}{R_2}$ bijna 0, dus dan $R \approx 10$. Als R_2 bijna 0 is, dan is $\dfrac{1}{R_2}$ erg groot, dus dan $R \approx R_2$, dus R neemt waarden tussen 0 en 10 aan.

c. $R = \dfrac{10x}{x+10}$

d. $\dfrac{10}{(x+10)(x+11)}$

16 b. $x = 0$ en $x = 1$

Paragraaf 2 Wortels

1 a. 3, 3,

b. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

c. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2A} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{A}$

2 $5\sqrt{3}$ $4\sqrt{5}$ $3\sqrt{10}$

$\frac{1}{10}\sqrt{5}$ $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

3 a. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\frac{1}{n}\sqrt{n}$

c. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

d. $\frac{1}{5}\sqrt{15}$, $\frac{1}{7}\sqrt{35}$, $\frac{1}{q}\sqrt{pq}$

4 $\frac{1}{5}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ $\sqrt{2}$ $\frac{1}{b}\sqrt{ab}$

5 $\sqrt{2}$ $\sqrt{2\frac{1}{2}}$ $\sqrt{0{,}08}$ $\sqrt{0{,}1}$

$\sqrt{72}$ $\sqrt{90}$ $\sqrt{16}$ $\sqrt{20}$

6 **a.** $\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\cdot\left(4+\sqrt{7}\right)\right)}=\sqrt{16-7}=3$

b. $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2=$

$\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2-2\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}+\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2=$

$4+\sqrt{7}+2\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}+4-\sqrt{7}=8-6=2.$

c. Zie **b**.

d. $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}=-\sqrt{2}$, want $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$ is negatief.

7 $5\sqrt{7}$ $1\frac{1}{2}\sqrt{10}$

$\sqrt{7}$ $\frac{1}{2}\sqrt{10}$

42 5

$\frac{3}{2}$ 2

8 $5-2\sqrt{6}$ 1

$21-2\sqrt{110}$ 1

$2n+1-2\sqrt{n(n+1)}$ 1

40 $11\frac{1}{9}$

$20+4\sqrt{6}$ $12\frac{1}{10}$

$20+2\sqrt{91}$ $13\frac{1}{11}$

$20+4\sqrt{21}$ $14\frac{1}{12}$

$20+2\sqrt{100-n^2}$ $12+n+\frac{1}{10+n}$

9 3 $\sqrt{3}$ $\sqrt{x}$

$2\sqrt{x}$ $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ $\sqrt{2x}$

$\sqrt{2x+4}$ $\frac{1}{2}\sqrt{2x}$ $x\sqrt{x}$

$x\sqrt{x}+\sqrt{x}$ $x\sqrt{x}+1$ $x\sqrt{x}$

10 $x^2+x+2x\sqrt{x}$ x^3

$2x+2\sqrt{x^2-1}$ $\qquad\qquad$ $x+2+\frac{1}{x}$

11 a. Kwadrateren geeft: $8+2\sqrt{7}=7+2\sqrt{7}+1$ en dat klopt.
Omdat $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$ en $\sqrt{7}+1$ beide positief zijn, geldt:
$\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1$.
$\left(\sqrt{7}-1\right)^2=8-2\sqrt{7}$, dus $\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{7}-1$.
$\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1-\left(\sqrt{7}-1\right)=2$
b. Kwadrateren geeft:
$\left(\sqrt{2\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=2\frac{1}{2}+2\sqrt{2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=3+\sqrt{4\cdot 2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=$
$3+\sqrt{5}$. Omdat $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ en $\sqrt{2\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$ beide positief zijn,
geldt dus $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{2\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=3-\sqrt{5}$ en $\left(\sqrt{2\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=3-\sqrt{5}$, en
omdat zowel $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ als $\sqrt{2\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$ positief zijn, geldt:
$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$.
$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=$
$\sqrt{2\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\left(\sqrt{2\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt{2\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

c.
$\sqrt{12+\sqrt{80}}=\sqrt{4\cdot 3+4\sqrt{5}}=2\sqrt{3+\sqrt{5}}=2\left(\sqrt{2\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{10}+\sqrt{2}$

12 25	geen oplossing
0, 1	0
0, $\frac{1}{4}$	0, 4
3	2
1	1, 9

13 a. $\sqrt{\frac{1}{4}x^2-4x+32}$
b. $\dfrac{-8+8\sqrt{7}}{3}$
c. 2, $4\frac{2}{3}$

14 $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}$ $\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

15 $2+\sqrt{2}$ $2-\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}-1$ $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}{a}$

16 a. $\left(x^2+1\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)=1+x^2+\dfrac{1}{x^2}+1$ en

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

b. $\sqrt{(x+1)^2+\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2}=\sqrt{x^2+2x+1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}+1}$

En:

$\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right)^2=x^2+1+2\sqrt{x^2+1}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+\dfrac{1}{x^2}+1$

$=x^2+1+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x^2}+1$ (de laatste gelijkheid volgt uit **a**.)

Als je voor $x=$ -1 neemt, dan is het linkerlid $2\sqrt{2}$ en het rechterlid 0.

c. De driehoeken *AMQ* en *QNC* zijn gelijkvormig, dus:

$\dfrac{QM}{AM}=\dfrac{CN}{QN}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{CN}{1}=CN$

d. *AB*= $x+1$ en $AC=1+\dfrac{1}{x}$. De stelling van Pythagoras in driehoek *ABC* geeft: $AC=\sqrt{(x+1)^2+\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2}$.

Stelling van Pythagoras in driehoek *AMQ* geeft:

$AQ=\sqrt{1+x^2}$

Stelling van Pythagoras in driehoek *CNQ* geeft:

$CQ=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

Als je dit invult in $AQ+QC=AC$ krijg je de gelijkheid

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}=\sqrt{(x+1)^2+\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2}$.

17 $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$ en

$$\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}}=$$

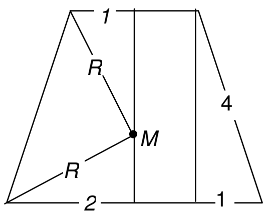
$$\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x}{x}=\frac{x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Bij de eerste gelijkheid krijg je voor $x=-1$ in het linkerlid een negatief getal en in het rechterlid een positief getal. Bij de tweede gelijkheid krijg je voor $x=-1$ in het linkerlid een negatief getal en in het rechterlid 0.

b. In driehoek CQN: $\cos\alpha=\dfrac{NQ}{CQ}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$,

in driehoek QAM: $\cos\alpha=\dfrac{AM}{AQ}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

in driehoek ABC: $\cos\alpha=\dfrac{AB}{AQ+QC}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$.



18 Zie plaatje. De hoogte van het trapezium is enerzijds: $\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$, anderzijds: $\sqrt{R^2-1}+\sqrt{R^2-4}$. Hierbij is R de straal van de cirkel.

Dus: $\sqrt{R^2-1}+\sqrt{R^2-4}=\sqrt{15}$.

Kwadrateren geeft:

$R^2-1+2\sqrt{R^2-1}\sqrt{R^2-4}+R^2-4=15$, dus:

$\sqrt{R^2-1}\sqrt{R^2-4}=10-R^2$. Nogmaals kwadrateren geeft: $R^4-5R^2+4=100-20R^2+R^4$, dus $R^2=\dfrac{96}{15}$. De oppervlakte van de cirkel is $\pi R^2=\frac{32}{5}\pi$.

Paragraaf 3 Evenredig

1 **a.** 35 gram; 7 gram

b. $\frac{180}{120} \cdot 5{,}0 = 7{,}5$ gram

c. drie keer zo veel.

d.

x	60	90	120	150	180	210	240	270	300
y	2,5	3,75	5,0	6,25	7,5	8,75	10,0	11,25	12,5

e. $y = \frac{5x}{120} = \frac{1}{24}x$

f. ja; ja

2 **a.** nee; ja

b. Als t groter is dan 1 uur en 12 minuten.

3 **b.** nee; ja

c. met z^2

d. $z = \sqrt{A}$

e. $O = 4z = 4\sqrt{A}$

4 Nee, als A k keer zo groot wordt, wordt M $\frac{1}{k}$ keer zo groot.

5 **a.** Het is een rechte lijn door de oorsprong.

b. $30 : 2\frac{1}{2} = 12$

c. snelheid

6 **a.** $2{,}70 \cdot (0{,}024 + 0{,}03) = 0{,}1458$ kg

b. $100 \cdot \frac{8{,}90}{2{,}70} \approx 329{,}63$ gram

c. ja; $\frac{8{,}9}{2{,}7}$

7 **a.** $T = 0{,}1 \cdot \sqrt{L}$

b. $T^2 = 0{,}01 \cdot L$, evenredigheidsconstante: 0,01
Je kunt ook zeggen: $L = 100 \cdot T^2$, dan is de evenredigheidsconstante 100.

c. 3600 : 0,8 = 4500

d. 0,7867 seconde ; 64 – 61,884 = 2,115 cm = 21,15 mm

8 **a.** $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

b. $O = \frac{1}{2} \cdot z \cdot z \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $c = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

c. 9 keer

9 **a.** 4 keer

b. 8 keer

10 a. inhoud = 1, oppervlakte = 6
b. $I = r^3$ en $O = 6r^2$.
c. $O^3 = (6r^2)^3 = 216r^6$, $I^2 = (r^3)^2 = r^6$,
evenredigheidsconstante = 216

11 a. $H = 11{,}2 \cdot \sqrt[3]{80^2} \approx 207{,}9 \text{ dm}^2$
b. $G = \sqrt{\left(\frac{H}{11{,}2}\right)^3}$

12 a. CADBE
b. 7 (A) ; $8\frac{1}{2}$ (B) ; 6 (C) ; 8 (D) ; $8\frac{1}{2}$ (E)

13 a. 1
b. gelijkvormig
c. Als de korte zijde x is, dan is de lange zijde 4x en A = $4x^2$ en $O^2 = (10x)^2 = 100x^2$, dus A = $\frac{1}{25}O^2$.
d. De zijden zijn x, x, ex en ex, dus O = 2ex+2x = 2(e+1)x en $A = ex^2$, dus $\frac{A}{O^2} = \frac{ex^2}{(2(e+1)x)^2} = \frac{e}{4(e+1)^2}$

14 a. $A \cdot T = 30$
b. 36 leerlingen
c. T wordt 2 keer zo klein; T wordt $\frac{2}{3}$ keer zo groot
d. Het aantal minuten per leerling was $\frac{30}{x}$, dat is nu $\frac{30}{x} + \frac{1}{20}$ (want 3 seconden is $\frac{1}{20}$ minuut) en het aantal leerlingen nu is x–1.
e. x = 25 of x = -24 (de negatieve oplossing vervalt)
f. 24 leerlingen

15 a. $T = \frac{600}{V}$
b. $\frac{600}{90} - \frac{600}{100} = \frac{2}{3}$ uur, dus 40 minuten
c. Het gaat ook om de tijdsduur. Op de heenweg rijden ze 6 uur op de terugweg rijden ze 5 uur, dus 1200 km in 11 uur. De gemiddelde snelheid is: $\frac{1200}{11} \approx 109{,}09$ km/u

16 $(1\frac{1}{2} \cdot 20 + 1 \cdot 30) : 2\frac{1}{2} = 24$ km/u ,
$(3 \cdot 20 + 2 \cdot 30) : 5 = 24$ km/u

17 $y = 2x$; $y = \frac{6}{z}$; $z = \frac{3}{x}$

Paragraaf 4 Toepassingen

1 **a.** $A = 2$

c. $P = \frac{18A}{72} = 0{,}25A \rightarrow$ P en A zijn evenredig

d. $P = \frac{54}{G} \rightarrow$ grafiek is geen rechte lijn door (0,0)

Dus niet evenredig. (zie grafiek bij **b**)

e. $0{,}5 = \frac{18A}{G} \rightarrow 0{,}5G = 18A \rightarrow$ G en A evenredig

2 **a.** ≈ 5200 kcal/uur

b. ≈ 5500 kcal/uur

c. ongeveer 33 kcal/uur; ongeveer 40 kcal/uur

d. Het kost meer extra energie om 1 m^3 extra op 18 °C te brengen i.p.v. op 15 °C.

e. Ongeveer 19,7 °C

f. 97 m^3

g.

15 °C	32,3 kcal/uur	per m^3
18 °C	42,6 kcal/uur	per m^3
21 °C	62,5 kcal/uur	per m^3

h. $6800 + 24 \times 42{,}6 = 7822$ kcal/uur

i.

15 °C	$C = 32{,}3 \cdot I + 870$
18 °C	$C = 42{,}6 \cdot I + 1900$
21 °C	$C = 62{,}5 \cdot I + 2500$

3 **a.** V = 90: $M = 24R + 62$

b. $V = 60 \rightarrow M = 35$
$V = 90 \rightarrow M = 75$
$V = 120 \rightarrow M = 125$

Als V 30 groter wordt, wordt M eerst 40 groter en dan 50 dus geen gelijke toenamen.

4 **a.** Bijvoorbeeld: $0 \le x \le 400$, $0 \le y \le 20$

b. k wordt dan $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ keer zo groot.

Vier keer zo groot.

c. $h = 36 \rightarrow k = 6$
$h = 36{,}4 \rightarrow k = 6{,}033$

Dus met 0,033 minuut.

Gemiddeld is dat per voet: 0,033 : 0,4 = 0,0825.

d. $k = 0{,}03 \cdot \sqrt{h}$

5 **a.** $c = 0{,}3$

b. $0 \le y \le 37500$

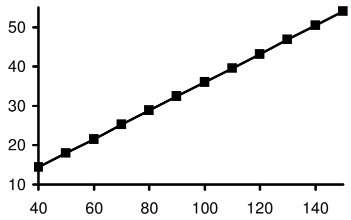
c. 11,9 m/s

d. $w = 10 \rightarrow E = 300$
$w = 10{,}6 \rightarrow E = 357{,}3$

Dus met 57,3 watt.

Dat is gemiddeld 357,3 : 0,6 = 599,5 watt per m/s.

6 **a.** Groot verzet ; klein verzet
b. 21,5 km/h
c. Dat klopt.
d.



e. T = 2,8 · S

Paragraaf 5 Rekenen in de meetkunde

1 $\frac{16}{3}$ $2\frac{1}{2}$ 2

2 8

3 **a.** 4, $6\frac{2}{3}$, 2, $3\frac{1}{3}$
b. 1 : 2 : 4 : 5

4 8:1:3

5 $\frac{x+2}{x} = \frac{x+5}{x+2}$ geeft $x = 4$

6 $4\sqrt{5}$

7 **a.** $\angle CAB + \angle ACD = 90°$ en $\angle DCB + \angle ACD = 90°$, dus $\angle DCB = \angle CAB$ enzovoort. De drie driehoeken hebben dezelfde hoeken.
b. $3\frac{1}{5}$ en $1\frac{4}{5}$

8 1, 2

9 2 meter

10 $(3\frac{3}{5},0)$

11 **a.** Vanwege symmetrie is *AC* evenwijdig met *DE*.
b. Evenzo is *CS* evenwijdig met *AB*, dus is *SCBA* een parallellogram, dus $CS = 1$., dus $SE = x - 1$. Omdat ook $CS = x \cdot SE$ geldt: $x(x-1) = 1$.
c. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (want $x > 0$)

12 a. $R\left(2\frac{2}{3},0,6\right)$, $S\left(4,0,2\frac{1}{4}\right)$, $T(0,4,6)$, $U\left(6,0,\frac{1}{2}\right)$

b. $\frac{119}{144}$ deel

c. (0,0,30)

d. $7\frac{1}{2}$ als $Q=(0,0,24)$

13 a. 48

b. $8\frac{1}{3}$

14 a. $4\frac{2}{3}, 6\frac{1}{3}$

b. $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b, \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$

Paragraaf 6 Bundels grafieken

1 a. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

b. Dalparabool. De tweede coördinaat van de top is -2.

d. a naar rechts verschuiven.

2 b. (9,0) en (5,0)

c. $a = -8$ of $a = -2$

d. $a = 4$

3 c. Voor alle grafieken geldt: de y-as is symmetrie-as; de x-as is horizontale asymptoot; er is één top, nl. voor $x = 0$.

d. $a = -6$

e. $a = 2$

4. a. $a = 5$

b. $a = 2\frac{1}{2}$

5 b. $a = 3$

c. $a = 5$, $a = -5$

d. $a = -4$

e. $a = 6$, $a = -6$

6 a. Hyperbolen (met x- en y-as als asymptoot).

c. $a = -10$

d. afstand $\sqrt{48}$

e. $a = 2$

7 a. Rechte lijnen.

b. (2,3)

c. Rechte lijnen.

d. Richtingscoëfficiënt -1.

e. De functie $y = 5 - x = 3 - (x-2)$; $a = -1$ en $b = 5$.