Toegepaste analyse

Inhoudsopgave

Toepaste analyse

Experimentele uitgave 2009 voor wiskunde D havo 5, 40 slu

Colofon

Auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

Illustraties Wilson Design, Uden

Distributie Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

ISBN

Homepage www.wageningse-methode.nl

1 Differentiëren in de praktijk

Bij wiskunde B heb je geleerd hoe je een machtsfunctie kunt differentiëren:

Voor *alle* getallen α geldt: als $y = x^{\alpha}$, dan $\frac{dy}{dx} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

In het bijzonder: $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$$

Ook heb je de volgende rekenregels geleerd:

Somregel

Als $H(x) = F(x) + G(x)$, dan $H'(x) = F'(x) + G'(x)$.

In woorden: de helling van de som van functies is de som van de hellingen van die functies.

Veelvoudregel

Als $H(x) = c \cdot F(x)$, dan $H'(x) = c \cdot F'(x)$.

In woorden: de helling van een veelvoud van een functie is een veelvoud van de helling van die functie.

1 Differentieer de volgende functies.

a. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

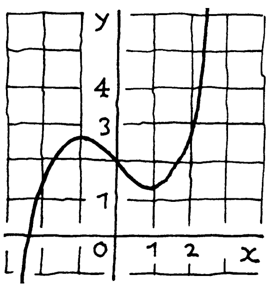
b. $y = 2(\sqrt{x} + \frac{1}{x})$

c. $y = x(x^2 + x + 1)$

d. $y = \frac{3}{2x} - \frac{5}{x^2}$

e. $y = 19x - \sqrt{20}$

f. $y = ax^2 + bx + c$



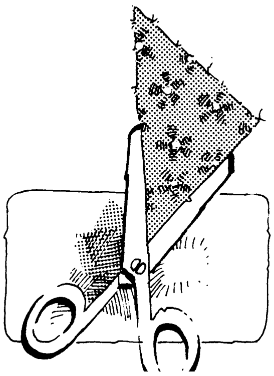
2 Hiernaast staat de grafiek van de functie $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$.

a. Bereken exact de coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn horizontaal is.

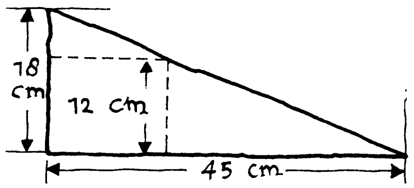
b. Op welke x-intervallen is de functie stijgend?

c. En op welk x-interval is de functie dalend?

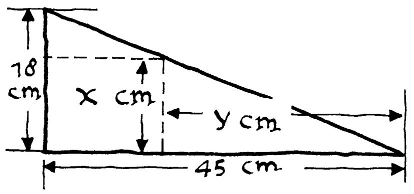
- In een **top** van de grafiek is de waarde van y maximaal of minimaal. Voor de bijbehorende waarde van x is y ' gelijk aan 0.
- Als y ' > 0 , dan is de functie **stijgend**.
- Als y ' < 0 , dan is de functie **dalend**.



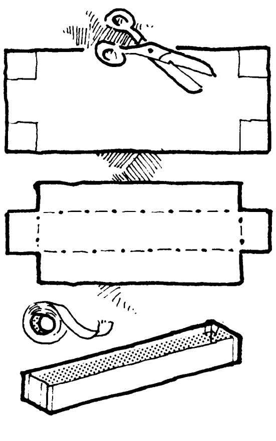
3 Uit de driehoekige lap stof hiernaast moet een rechthoekig stuk stof geknipt worden. Noem de breedte van dit stuk x (cm) en de oppervlakte O (cm^2).



a. Bereken hoe groot de oppervlakte van de rechthoek is bij een breedte van 12 cm.



b. Toon aan dat $y = 2\frac{1}{2}x$.
c. Toon aan dat $O = 45x - 2\frac{1}{2}x^2$.
d. Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van O een bergparabool is ?
e. Bepaal met de GR bij welke waarde van x de oppervlakte O het grootst is.
f. Bereken met behulp van de afgeleide van O de x-coördinaat van de top van deze parabool. Vind je hetzelfde antwoord als in **e** ?



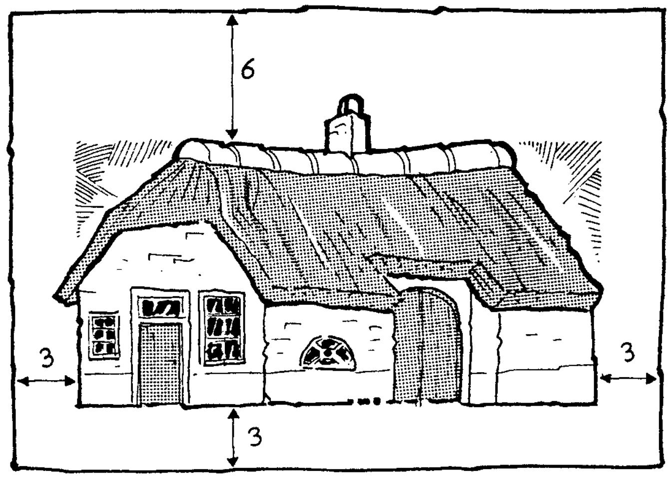
4 Uit een rechthoekig stuk karton van 30 bij 80 cm worden in de hoeken vier vierkantjes weggeknipt. Daarna worden de zijkanten langs de stippellijnen gevouwen en met plakband tot een doosje geplakt.
Noem de zijde van het ingeknipte vierkant x. We gaan kijken wat de inhoud van het doosje is voor verschillende waarden van x. De breedte van het doosje noemen we b, de lengte l en de inhoud i.
a. Tussen welke waarden kan x gekozen worden ?
b. Druk b en l uit in x.
Druk i uit in x.

c. Maak op de GR een tabel voor i als functie van x. Laat x oplopen met stappen van 1.

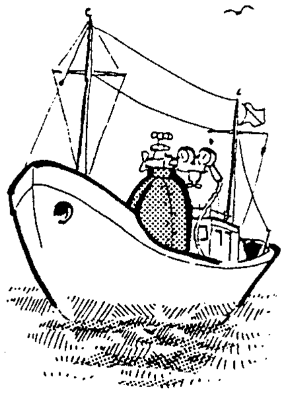
Als x toeneemt van 0 tot 15, neemt de inhoud i eerst toe en daarna af.
d. Tussen welke gehele getallen ligt de waarde van x waarbij de inhoud maximaal is ?
e. Bepaal met de grafiek op de GR voor welke x de inhoud maximaal is en hoe groot die maximale inhoud is.
f. Bereken exact voor welke x geldt: $i'(x) = 0$ (niet de GR gebruiken, maar algebraïsch oplossen).
g. Wat zijn dus de exacte afmetingen van het doosje met maximale inhoud.

5 Een kavel bebouwen

Een gemeente heeft een stuk grond bestemd voor woningbouw. Voor vrijstaande woningen denkt de gemeente aan kavels van 600 m^2.
Volgens een gemeentelijke verordening mogen aan de voorkant en aan de twee zijkanten van elke kavel stroken van 3 meter breed niet bebouwd worden. Aan de achterkant moet een strook van 6 meter vrij van bebouwing blijven.
De gemeentearchitect krijgt de opdracht uit te rekenen bij welke afmetingen van zo'n kavel het te bebouwen gedeelte een maximale oppervlakte heeft. Hij noemt de breedte van de kavel (in meters) x.



a. Toon aan dat de oppervlakte van het te bebouwen gedeelte gelijk is aan $654 - 9x - 3600x^{-1}$.
b. Bereken bij welke afmetingen van de kavel de oppervlakte van het te bebouwen gedeelte maximaal is.



6 Vervoer van gas

Een scheepvaartbedrijf vervoert een gasvormig product. Als deze hoeveelheid gas onder hoge druk vervoerd wordt, is het volume klein en zijn de vervoerskosten laag. Maar het onder druk zetten (en houden) van het gas brengt ook kosten met zich mee. Het verband tussen het volume V en de druk p wordt gegeven door de formule $p \cdot V = 1000$.

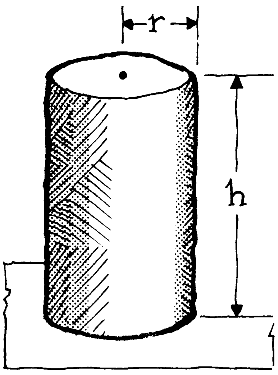
De vervoerskosten K_V (in euro's) van V liter gas worden gegeven door de formule $K_V = 10V + 100$. De kosten K_p (in euro's) van het onder druk brengen en houden van het gas op p atmosfeer worden gegeven door de formule

$K_p = 25p + 2500$.

a. Druk de totale kosten K (= $K_V + K_p$) uit in p.

b. Bij welke druk p is K' gelijk aan 0 ?

c. Bereikt K een minimale of een maximale waarde ? Hoe groot is deze waarde ?



7 We bekijken blikken met een inhoud van 1 liter (1 dm^3); h is de hoogte (in dm) en r de straal (in dm).

Van een cirkel met straal r is de oppervlakte πr^2 en de omtrek $2\pi r$.

Van een cilinder met straal r en hoogte h is de inhoud $\pi r^2 h$. Omdat onze blikken 1 liter inhoud hebben, geldt: $\pi r^2 h = 1$.

a. Toon aan dat de totale oppervlakte van het blik gelijk is aan $\frac{2}{r} + 2\pi r^2$.

b. Bereken bij welke straal en hoogte de totale oppervlakte van het blik zo klein mogelijk is.

2 Productregel en quotiëntregel

Bij wiskunde B heb je geleerd hoe je een functie die het product is van twee functies kunt differentiëren.

Productregel

Als $y = y_1 \cdot y_2$, dan $y' = y_1 \cdot y_2' + y_2 \cdot y_1'$

Voorbeeld
De hellingfunctie van $g(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x}$ is:
$g'(x) = 2x \cdot \sqrt{x} + (x^2 + 1) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

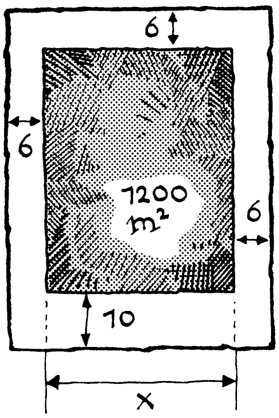
1 Differentieer de volgende functies met de productregel:

$f_1(x) = (x^2 + 3)(2x - 5)$ $\qquad$ $f_2(x) = (1 - 4x)^2$

$f_3(x) = (5x + 2) \cdot \sqrt{x}$ $\qquad$ $f_4(x) = (\dfrac{3}{x} + x) \cdot \sqrt{x}$

$f_5(x) = (\sqrt{x} + 3)\cdot(\dfrac{1}{x} + 3)$ $\qquad$ $f_6(x) = (x^5 + 1)\cdot(x^5 - 1)$

2 Voor de bouw van een supermarkt wil men een perceel grond kopen. De vloeroppervlakte van de supermarkt moet 1200 m^2 zijn. Naast en achter het gebouw moet een strook van 6 meter breed onbebouwd blijven en voor het gebouw een strook van 10 meter breed.



De volgende vraag doet zich nu voor: bij welke afmetingen van de supermarkt heeft het benodigde perceel een minimale oppervlakte ?

a. Noem de lengte van de voorzijde van de supermarkt x (meter).
Druk de lengte en de breedte van het perceel uit in x.

b. Toon aan dat de oppervlakte van het perceel gelijk is aan: $16x + 1392 + \dfrac{14400}{x}$.

c. Hoe groot zijn de afmetingen van het perceel met minimale oppervlakte ?

3 Differentieer de oppervlakte $O = (x+12)\cdot(\frac{1200}{x}+16)$ uit de vorige opgave met de productregel en ga na dat je het zelfde antwoord krijgt.

4 Differentieer de functie $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$ op twee manieren:
a. met de productregel.
b. door eerst de haakjes weg te werken.

5 Bekijk de functie $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$. We gaan op zoek naar $f'(x)$.
a. Ga na dat $f(x)\cdot(x^2+1) = 4x$.

Linker- en rechterlid differentiëren levert op:
$f'(x)\cdot(x^2+1) + f(x)\cdot 2x = 4$.
b. Leid hieruit af dat: $f'(x) = \frac{4 - f(x)\cdot 2x}{x^2+1}$.
c. Leid uit **b** af dat: $f'(x) = \frac{4\cdot(x^2+1) - 4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$.
Tip: vermenigvuldig teller en noemer met $x^2 + 1$.

6 We pakken het procedé van de vorige opgave nu algemener aan. Bekijk de functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ en neem aan dat de teller t(x) en de noemer n(x) differentieerbare functies zijn. We gaan weer op zoek naar $f'(x)$.
a. Ga na dat $f(x)\cdot n(x) = t(x)$ en dat linker- en rechterlid differentiëren oplevert dat $f'(x)\cdot n(x) + f(x)\cdot n'(x) = t'(x)$.
b. Leid hieruit af dat: $f'(x) = \frac{t'(x) - f(x)\cdot n'(x)}{n(x)}$.

c. Leid uit **b** af dat: $f'(x) = \frac{t'(x)\cdot n(x) - t(x)\cdot n'(x)}{(n(x))^2}$.

De quotiëntregel

Als $f = \frac{t}{n}$, dan $f' = \frac{t'\cdot n - t\cdot n'}{n^2}$.
ofwel
Als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$, dan $f'(x) = \frac{t'(x)\cdot n(x) - t(x)\cdot n'(x)}{(n(x))^2}$.

Voorbeeld

De hellingfunctie van $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{3x+2}$ is

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (3x+2) - (2x^2+1) \cdot 3}{(3x+2)^2} = \frac{6x^2+8x-3}{(3x+2)^2}.$$

Opmerking

Het is gebruikelijk om na toepassing van de quotiëntregel de teller zo veel mogelijk te vereenvoudigen, maar in de noemer de haakjes gewoon te laten staan.

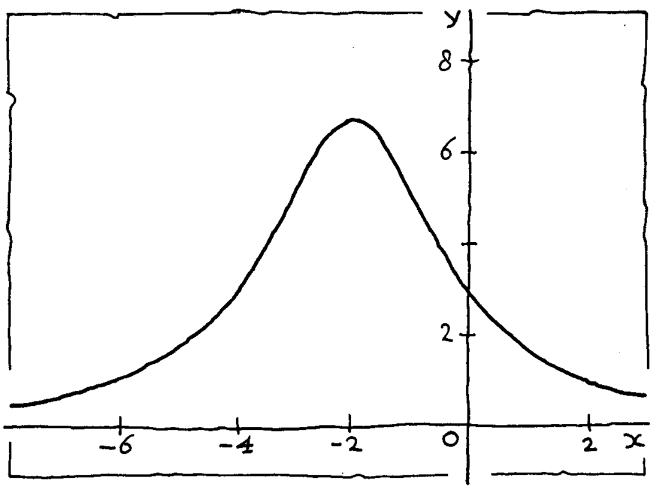
7 Differentieer de volgende functies.

$f_1(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\qquad$ $f_2(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

$f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ $\qquad$ $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3+3x}$

$f_5(x) = \dfrac{10x}{(x+2)^2}$ $\qquad$ $f_6(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

8 Hieronder staat de grafiek van de formule $y = \dfrac{20}{3+(x+2)^2}$.



Bereken op twee manieren de coördinaten van de top van de grafiek:

a. met differentiëren,

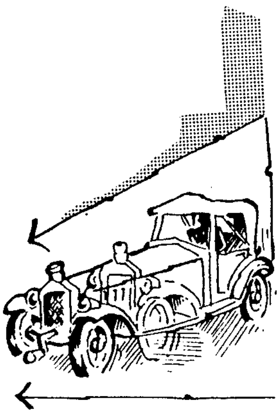
b. met redeneren.

9 Schokgolf

Een ontploffing op zee veroorzaakt een schokgolf. De hoogte h (in meters) van deze schokgolf is afhankelijk van de afstand x (in kilometers) tot de plaats waar de ontploffing ontstaat. Een model hiervoor is: $h = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Op welke afstand van de plaats van ontploffing is de schokgolf het grootst ?

10 Dagelijks hoor je filemeldingen op de radio. Hoeveel auto's in één minuut een vast punt passeren, is afhankelijk van de snelheid van de auto's in de file of bijna-file. Deze samenhang bekijken we in de volgende twee modellen.



Het snelwegmodel

De redenering is: hoe sneller je rijdt, des te korter bevind je je op een stukje snelweg en des te meer auto's kunnen er in een bepaalde tijd op rijden.

Neem aan dat alle auto's dezelfde lengte hebben (zeg k meter) en dat ze allemaal even hard rijden, met een snelheid van v meter per seconde. Neem verder aan dat elke automobilist een afstand tot zijn voorligger houdt van v meter. Noem het aantal auto's dat in één minuut een vast punt passeert: N.

a. Toon aan dat volgens dit model geldt: $N = \dfrac{60v}{k+v}$.

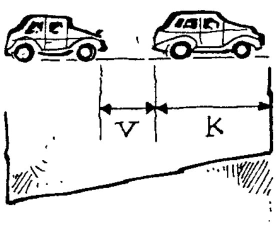
Neem verder aan dat k = 4,5

b. Hoe groot is N als v = 10,5 ?

c. Hoe groot is v als N = 52 ?

d. Onderzoek of N bij een zekere snelheid een maximale waarde bereikt.

e. Hoe kan volgens dit model het fileprobleem het best worden aangepakt ?



Het remwegmodel

Hierin is de afstand tot de voorligger gelijk aan de remweg. Als a de remvertraging in m/s^2 is, dan is de remweg $\dfrac{v^2}{2a}$ meter. De lengte van de auto en de remweg zijn dan samen $k + \dfrac{v^2}{2a}$.

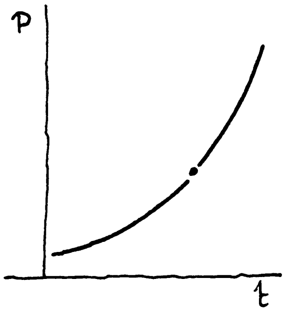
f. Toon aan dat volgens dit model geldt: $N = \dfrac{60v}{k + \dfrac{v^2}{2a}}$.

Neem aan dat alle auto's 4,5 meter lang zijn en een remvertraging hebben van 5 m/s^2.

g. Bereken de snelheid in km/u waarbij N maximaal is.

Deze maximale waarde van N is de capaciteit van de weg (die hoort bij k = 4,5).

3 De kettingregel



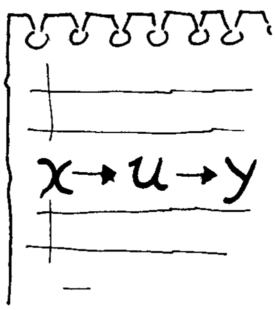
Notatie groeisnelheid
We beschouwen de prijs p van een product als functie van de tijd t; p in euro, t in jaren.
Zoals je weet, geeft de afgeleide aan *hoeveel keer zo snel* p groeit als t. Daarvoor is naast p'(t) een aparte notatie in gebruik: $\frac{dp}{dt}$.

Als bijvoorbeeld op een gegeven moment $\frac{dp}{dt}$ gelijk is aan $1\frac{1}{2}$, dan betekent dat dat p $1\frac{1}{2}$ keer zo snel groeit als t. Dus als t met 0,1 jaar toeneemt (en de groeisnelheid blijft onveranderd) zal p met $1\frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}15$ euro toenemen.
En als t met 0,07 afneemt (en de groeisnelheid blijft onveranderd), zal p met $1\frac{1}{2} \cdot 0{,}07 = 0{,}105$ euro afnemen.

$\frac{dp}{dt}$ is *hoeveel keer zo snel p groeit als t.*

$\frac{dp}{dt}$ is dus een andere notatie voor de afgeleide van p als functie van t. Het voordeel van deze notatie is, dat beide variabelen (hier p en t) erin vermeld worden.

Bij wiskunde B heb je geleerd hoe je een functie die een samenstelling is van twee eenvoudige functies kunt differentiëren.



Kettingregel

u is een functie van x , y is een functie van u.
Stel dat we de afgeleiden $\frac{du}{dx}$ en $\frac{dy}{du}$ kennen.

y is ook een functie van x en we vinden de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ dan als volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Voorbeeld

Gevraagd wordt de afgeleide van $y = 2(x^3 - 5x + 1)^6$.

- Je vat deze functie op als *ketting* van twee functies: $x \to u \to y$, waarbij $u = x^3 - 5x + 1$ en $y = 2u^6$.
- Van deze twee functies afzonderlijk ken je de afgeleide: $\frac{dy}{du} = 12u^5$ en $\frac{du}{dx} = 3x^2 - 5$.

De kettingregel geeft je dan de afgeleide van de ketting:

$$\frac{dy}{dx} = 12u^5 \cdot (3x^2 - 5) = 12(x^3 - 5x + 1)^5 \cdot (3x^2 - 5).$$

Voorbeeld

Gevraagd wordt de afgeleide van $y = \sqrt{x^3 + 4x}$.

- Je vat deze functie op als *ketting* van twee functies: $x \to u \to y$, waarbij $u = x^3 + 4x$ en $y = \sqrt{u}$.
- Van deze twee functies afzonderlijk ken je de afgeleide: $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ en $\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4$.

De kettingregel geeft je dan de afgeleide van de ketting:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (3x^2 + 4) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 4x}} \cdot (3x^2 + 4).$$

Dan is $\frac{dy}{dx}$ het *product* van deze twee groeisnelheden: de groeisnelheid van y ten opzichte van x als $x = 3$.

Voorbeeld

Gevraagd wordt de afgeleide van $y = \frac{5}{x^3 - 3x + 7}$.

- Je vat deze functie op als *ketting* van twee functies: $x \to u \to y$, waarbij $u = x^3 - 3x + 7$ en $y = \frac{5}{u}$.
- Van deze twee functies afzonderlijk ken je de afgeleide: $\frac{dy}{du} = \frac{-5}{u^2}$ en $\frac{du}{dx} = 3x^2 - 3$.

De kettingregel geeft je dan de afgeleide van de ketting:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{u^2} \cdot (3x^2 - 3) = \frac{-5}{(x^3 - 3x + 7)^2} \cdot (3x^2 - 3).$$

1 Bereken de afgeleides; vereenvoudigen hoeft niet.

a. $\frac{d}{dx}(x^3 + 1)^5$

b. $\frac{d}{dx}(3\sqrt{x} + 5)^2$

c. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{3}{(7-2x)^4}$

d. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}$

e. $\dfrac{d}{dx}(3+\sqrt{x})^7$

f. $\dfrac{d}{dx}(3+x^3)^5$

h. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x+\sqrt{x}}$

2 Demografie

Op een klein eiland wonen 1000 mensen (geteld op 1 januari 1990). Een demograaf heeft voorspeld hoe de bevolking van het eiland zich de komende jaren zal ontwikkelen: $B = 500\sqrt{2t+4}$, waarbij B het aantal bewoners van het eiland is en t de tijd in jaren, gerekend vanaf 1 januari 1990.

a. Bereken met hoeveel mensen de bevolking van het eiland volgens de formule toeneemt gedurende het jaar 2003.

b. Bepaal deze toename ook met behulp van differentiëren.

De oppervlakte van het eiland is 30 km^2. Het gemiddelde aantal km^2 per bewoner is dus: $G = \dfrac{30}{B}$.

c. Met hoeveel vierkante meter per bewoner neemt G af gedurende het jaar 2003 ?

d. Bepaal deze afname ook met behulp van differentiëren.

3 Bereken de helling van de volgende functies in het punt met eerste coördinaat 1.

$y_1 = (3+\sqrt{x}\,)^5$

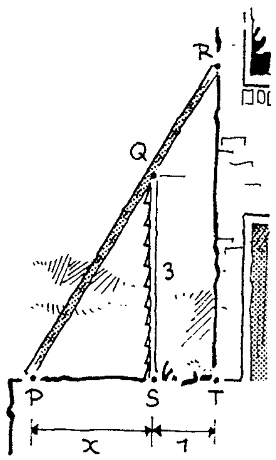
$y_2 = x \cdot (3+\sqrt{x}\,)^5$

$y_3 = \dfrac{(3+\sqrt{x})^5}{x}$

$y_4 = \sqrt{3+x^5}$

$y_5 = x \cdot \sqrt{3+x^5}$

$y_6 = \frac{\sqrt{3 + x^5}}{x}$



4 De schutting staat in de weg

Naast een huis staat een 3 meter hoge schutting op 1 meter afstand van dat huis. Een ladder staat over de schutting tegen het huis. Noem de afstand (in meters) van de voet van de ladder tot de schutting: x.

a. Waarom geldt: $\frac{PR}{PQ} = 1 + \frac{1}{x}$?

b. Druk PR uit in x.

c. Hoe lang moet de ladder minstens zijn om tegen de muur van het huis te kunnen staan ?

5 Bekijk de functie y = $\frac{6x - 3}{2x^2 + 5}$.

a. Bereken y'(x) met de quotiëntregel.

y kan worden herschreven tot: y = $(6x - 3) \cdot \frac{1}{2x^2 + 5}$.

b. Bereken y'(x) met de kettingregel en de productregel.
c. Ga na dat de antwoorden bij **a** en **b** het zelfde zijn.

6 Bekijk de functie y = $\frac{t(x)}{n(x)}$, waarbij we aannemen dat t(x) en n(x) differentieerbare functies zijn.
Je kunt de functie y ook als volgt schrijven: y = $t(x) \cdot \frac{1}{n(x)}$.

a. Bereken y'(x) met de kettingregel en de productregel.
b. Ga na dat je zo de quotiëntregel weer krijgt.

4 De somformules

1 Geldt: $\sin\frac{1}{4}\pi + \sin\frac{1}{4}\pi = \sin\frac{1}{2}\pi$?

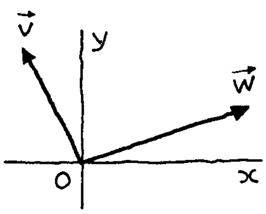
2 Gegeven is de functie $y = \sin x + \cos x$.
a. Teken de grafiek van y op de GR.

Zo te zien krijg je weer een mooie sinusoïde. Vanwege symmetrie in de grafieken van sinus en cosinus, kun je wel vermoeden voor welke waarde van x het maximum van y bereikt wordt en wat het exacte maximum van y is.
b. Bepaal de exacte coördinaten van de eerste top na (0, 0) van de grafiek.

Als de grafiek van y een perfecte sinusoïde is, dan geldt: $y = \sqrt{2}\cdot\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$.
c. Teken de grafiek van de functie $y = \sqrt{2}\cdot\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$ op de GR bij de functie die je al getekend hebt.

3 In opgave **21** van de vorige paragraaf heb je de grafiek van $y = 2\sin^2 x$ op de GR getekend. Deze ziet er ook weer als een sinusoïde uit.
a. Geef de exacte coördinaten van de eerste top na (0,0) van de grafiek. Wat is de periode van y ?
b. Het ziet er naar uit dat $y = 1 - \cos 2x$ dezelfde functie is. Teken de grafiek van $y = 1 - \cos 2x$ op de GR.

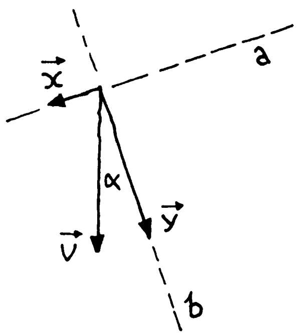
*Om te bewijzen wat we in opgave **2** en **3** gezien hebben, zijn de somformules nodig. Die bewijzen we in de volgende opgaven. Hiervoor hebben we wat dingen uit het de wiskunde d module **Vectoren en meetkunde** nodig. Die herhalen we eerst.*



4 In het plaatje hiernaast zijn de kentallen van de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ met kentallen (-1, 2) en (3, 1)
Bepaal de kentallen van de vectoren $\vec{v} + \vec{w}$ en $3 \cdot \vec{v}$.

Algemeen heb je het volgende gezien.

Als $\vec{v} = (a,b)$ en $\vec{w} = (c,d)$,
dan $\vec{v} + \vec{w} = (a+c,b+d)$ en $k \cdot \vec{v} = (ka,kb)$.

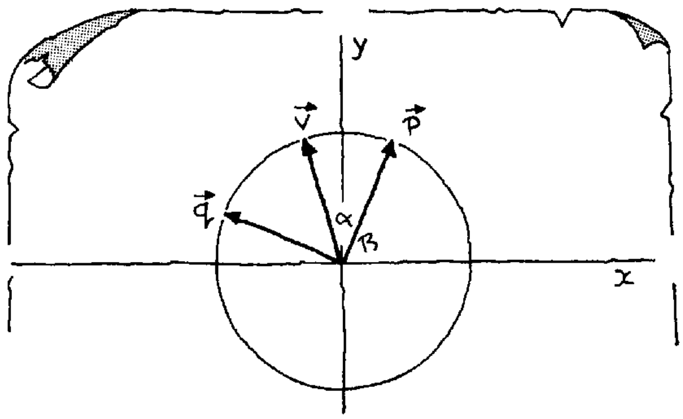


5 In het plaatje hiernaast staan de lijnen a en b loodrecht op elkaar. De vector $\vec{v}$ is ontbonden langs de lijnen a en b. De componenten zijn $\vec{x}$ en $\vec{y}$. Neem aan dat de hoek α in het plaatje 30° is en $\vec{v}$ lengte 2 heeft (dus $|\vec{v}|=2$). Bepaal $|\vec{x}|$ en $|\vec{y}|$.

Algemeen heb je het volgende gezien.

Als de vector $\vec{v}$ ontbonden is in twee onderling loodrechte componenten $\vec{x}$ en $\vec{y}$ en α de hoek is tussen $\vec{v}$ en $\vec{y}$,
dan geldt: $|\vec{x}|=|\vec{v}|\cdot\sin\alpha$ en $|\vec{y}|=|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$.

6 Hieronder is de eenheidscirkel getekend met de twee onderling loodrechte vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ en vector $\vec{v}$. De vector $\vec{p}$ maakt een hoek β met de positieve x-as en de vector $\vec{v}$ een hoek van $\alpha+\beta$. De vector $\vec{q}$ staat loodrecht op vector $\vec{p}$, dus de hoek die deze vector met de positieve x-as maakt is: $\beta+\frac{1}{2}\pi$.



Er geldt: $\vec{p}=(\cos\beta, \sin\beta)$.

a. Druk zo ook de kentallen van $\vec{q}$ en $\vec{v}$ in α en β uit.

b. Laat zien dat $\vec{q}=(-\sin\beta, \cos\beta)$.

Tip. Zie formule **(10)** en **(11)**.

Volgens de aangehaalde items uit de vierde klas geldt:
$\vec{v}=\cos\alpha\cdot\vec{p}+\sin\alpha\cdot\vec{q}$.

c. Ga na dat hieruit volgt:

(12) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$ en

(13) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

7 **a.** Schrijf met behulp van **(13)**
$\sin(x + \frac{1}{4}\pi) =$ ___$\cdot\cos x +$ ___$\cdot\sin x$.
b. Ga na dat uit **a** volgt dat $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cdot\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$.
Zie opgave **2**.

8 Door handige substitutie in **(12)** en **(13)** vind je:
(14) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$ en

(15) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$.
Ga dat na.

9 Laat zien dat de formules **(3)**, **(4)**, **(7)**, **(8)** en **(9)** speciale gevallen van de formules **(12)**, **(13)**, **(14)** en **(15)** zijn.

10 Van twee hoeken α en β is gegeven:
$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ en $\cos\beta = -\frac{12}{13}$.
a. Geef α en β zo goed mogelijk op de eenheidscirkel aan. Voor beide zijn er twee mogelijkheden, kies voor beide de kleinste positieve.
b. Bereken $\cos\alpha$ en $\sin\beta$.
c. Bereken $\sin(\alpha+\beta)$ en $\cos(\alpha-\beta)$.

11 **a.** Leid uit de formules **(12)** en **(13)** af:
(16) $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

(17) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

b. Gebruik formule **(9)** om uit **(17)** af te leiden:
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ en $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

12 In opgave **3** heb je met de GR gezien dat de grafiek van de functie $y = 2\sin^2 x$ een sinusoïde is. Wil je dit aantonen, dan moet je y schrijven in de vorm:
$y = a + b \cdot \sin(cx + d)$.
a. Doe dat met behulp van **11b**. Wat zijn de waarden van a, b, c en d ?
b. Laat zien dat de grafiek van $y = 2\cos^2 x$ een sinusoïde is. Wat zijn de bijhorende waarden van a, b, c en d ?

Op de volgende bladzijde zetten we de formules uit dit hoofdstuk nog eens bij elkaar.

Symmetrieformules

(1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

(2) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

(3) $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$

(4) $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$

(5) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

(6) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

Verband tussen sinus en cosinus

(7) $\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha) = \cos\alpha$

(8) $\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha) = \sin\alpha$

(9) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ **Pythagoras**

(10) $\cos(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

(11) $\sin(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = \cos\alpha$

Somformules

(12) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

(13) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

(14) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

(15) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

Verdubbelingsformules

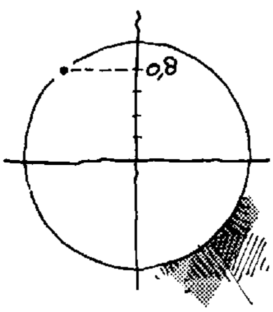
(16) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

(17) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha-1$

$= 1-2\sin^2\alpha$

13 Laat met behulp van de formules zien dat de functies:
$y_1 = (\sin x+\cos x)^2$ en $y_2 = 1+\sin 2x$ hetzelfde zijn.



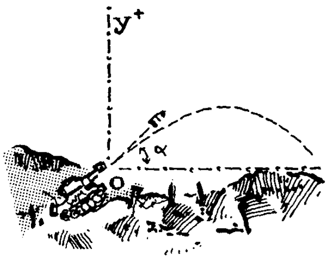
14 Een kogeltje beweegt volgens de standaardcirkelbeweging. Op zeker tijdstip t tussen $\tfrac{1}{2}\pi$ en π is het op hoogte 0,8: zie plaatje.

a. Bereken de exacte waarde van $\cos t$.

b. Teken de positie waar het kogeltje zich bevindt op tijdstip 2t.

c. Bereken de coördinaten van die positie exact.

15 Van twee scherpe hoeken in de driehoek hiernaast is gegeven: $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ en $\sin\beta = \frac{1}{3}$.
a. Bereken exact $\cos\alpha$ en $\cos\beta$.
b. Bereken $\sin\gamma$ exact.
Tip. Toon eerst aan dat $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$.



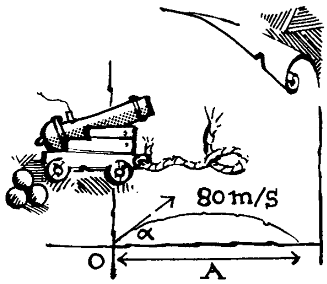
16 Kogelbaan
Een kogel wordt schuin omhoog geschoten De kogel beweegt volgens: $x(t) = 20t$, $y(t) = 40t - 5t^2$.
De x-as is langs de grond gekozen, de y-as loodrecht op de grond en de oorsprong in de vuurmond. De valversnelling is afgerond op 10 m/s^2 en de luchtweerstand is verwaarloosd.

Uit de natuurkunde is het volgende bekend.

- de snelheid in de x-richting: $v_x = x'(t)$,
  de snelheid in de y-richting: $v_y = y'(t)$,
  de snelheidsvector is dus $(x'(t),y'(t))$.
- de grootte van de snelheid is: $\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$
- de snelheidsvector raakt aan de baan.

a. Geef in een assenstelsel de plaats van de kogel aan op de tijdstippen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8.
Teken de baan. Controleer je tekening met de GR.
b. Geef een formule voor de snelheid in de x-richting en de y-richting.
Onder welke hoek en met welke snelheid wordt de kogel afgeschoten ?
Teken de snelheidsvector bij $t = 0$ op de bijbehorende plaats in de tekening van **a**.
c. Bepaal het hoogste punt van de baan exact. Wat is de snelheidsvector in dat punt ? Teken die vector op de goede plaats in je tekening.
d. Hoe lang is de kogel in de lucht ? Welke afstand heeft de kogel overbrugd ?
e. Bereken de snelheid waarmee de kogel op de grond komt.

17 Onder welke hoek ?
We vragen ons af onder welke hoek (met de grond) je een kogel af moet schieten om hem zo ver mogelijk te laten komen. Als je de hoek groot maakt, kom je niet ver. Als je hem klein maakt, is hij te kort in de lucht om ver te komen.



We nemen aan dat een kogel onder een hoek α met de grond wordt afgeschoten met een snelheid van 80 m/s. De bewegingsvergelijkingen (onder dezelfde voorwaarden als in de vorige opgave) zijn dan:
$x(t) = 80t \cdot \cos\alpha$ en $y(t) = 80t \cdot \sin\alpha - 5t^2$.
a. Teken voor enkele waarden van α de baan op de GR.

De vliegtijd van de kogel noemen we T en de afstand die de kogel overbrugt A. (Dus de kogel treft de grond op tijdstip T in (A , 0).)
b. Druk T uit in α. Bij welke α is de vliegtijd maximaal ?
c. Laat zien dat $A = 1280 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ en dat je dit kunt schrijven als $640 \sin 2\alpha$.
Bij welke α is A maximaal ?

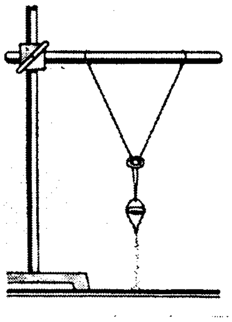
Overzichtsvragen

1 Gegeven: α en β tussen $\frac{1}{2}\pi$ en π met:
$\sin\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ en $\sin\beta = \frac{1}{2}$.
Bereken zonder rekenmachine $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin 2\alpha$ en $\cos 2\alpha$.

2 Geef de symmetrie-formules:
$\sin(-\alpha) =$, $\sin(\pi - \alpha) =$, $\sin(\pi + \alpha) =$
$\cos(-\alpha) =$, $\cos(\pi - \alpha) =$, $\cos(\pi + \alpha) =$
Geef verbanden tussen sin en cos:
$\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) =$, $\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) =$
Geef de somformules
en de verdubbelingsformules.
Geef de 'Pythagoras'-formule.

3 Van een beweging is gegeven:
$x(2) = 3$, $y(2) = 4$, $x'(2) = -1$, $y'(2) = 2$.
Geef deze gegevens in een plaatje weer.
Hoe groot is de snelheid op tijdstip 2 ?

5 Lissajousfiguren



1 **a.** Neem een blikje met een klein gaatje in de bodem. Hang het op zoals hiernaast getekend is. Vul het blikje met zout. Geef het een duwtje in een schuine richting en bekijk het zoutpatroon dat ontstaat. Een dergelijk patroon noemen we een *Lissajousfiguur*.

Een Lissajousfiguur ontstaat door een punt aan twee onderling loodrechte harmonische bewegingen te laten deelnemen. We kunnen dit patroon op de GR zichtbaar maken. De banen van de bewegingen uit paragraaf **1** zijn ook Lissajousfiguren. Daar waren de frequenties (het aantal periodes per seconde) van de trillingen in de x- en de y-richting steeds hetzelfde.

Een mooi voorbeeld van een Lissajousfiguur is het *lemniscaat*, geparametriseerd door bijvoorbeeld:

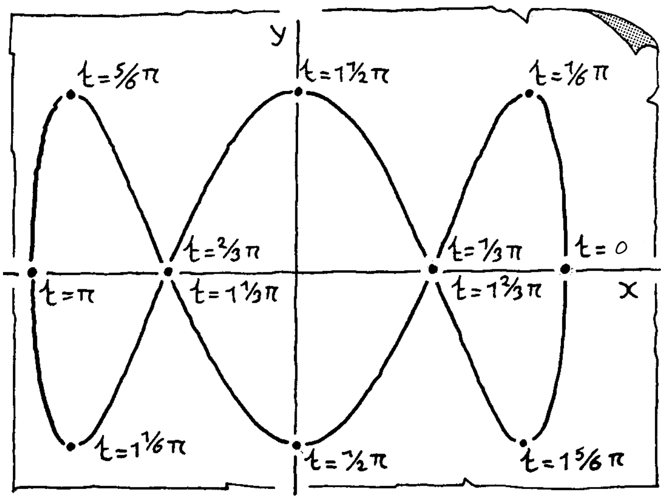
$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}, \text{ met } 0 \le t \le 2\pi.$$

b. Teken de beweging op de GR.
c. Wat is de periode van de trilling in de x-richting ? En in de y-richting ?
d. Bepaal met een berekening zonder GR de exacte coördinaten van de hoogste en de laagtse punten van de baan. Geef ook de tijdstippen waarop deze punten bereikt worden.
e. Bereken de snelheidsvector, uitgedrukt in t.
f. Wat voor bijzonders merk je op over de snelheids-vector in de hoogste en de laagste punten van de baan ?
g. Bepaal zonder GR de uiterste punten 'links' en 'rechts' van de baan en de tijdstippen waarop ze bereikt worden.
Wat kun je over de snelheidsvector zeggen op die momenten ?
h. Bepaal de exacte momenten waarop de beweging door de oorsprong gaat.
Met welke snelheid gaat dat ?
Laat zien dat de snelheid dan maximaal is (zonder GR).

Jules Antoine Lissajous

Jules Antoine Lissajous (1822-1880), een Frans natuur-kundige, deed onderzoek naar trillingen, een populair onderwerp in die tijd. Hij maakte trillingen zichtbaar, bijvoorbeeld door een vibrerende stemvork in het water te houden of door een lichtbundel te laten schijnen op een spiegel die aan een trillende stemvork was vastge-maakt.

2 Een kogeltje neemt deel aan twee harmonische trillingen. Het resultaat is de Lissajousfiguur hieronder. Bij enkele punten is vermeld wanneer het kogeltje daar langs komt.



De x-coördinaat van punten van de baan neemt alle waarden aan van -2 tot en met 2. De y-coördinaat neemt alle waarden aan van -1 tot en met 1.
De x-coördinaat en de y-coördinaat zijn, als functie van t, harmonische bewegingen. We noemen die f(t) en g(t).

a. Wat is de amplitude van f(t) en van g(t) ?

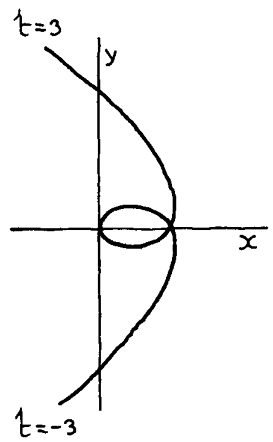
Van zowel de grafiek van f als van de grafiek van g ken je dertien punten.

b. Schets de grafieken van f en g op grond hiervan.

c. Geef de formules van f en g.

Als je het goed gedaan hebt, kun je de Lissajousfiguur op de GR tekenen.

d. Doe dat.



* **3** Hiernaast staat de baan bij parametervoorstelling

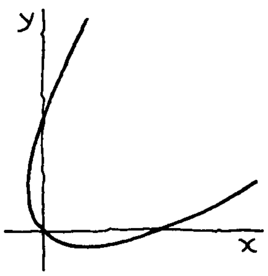
$$\begin{cases} x = 4t^2 - \frac{1}{2}t^4 \\ y = t^3 - 3t \end{cases} \text{ met } -3 \le t \le 3.$$

a. Bereken de snelheidsvector.

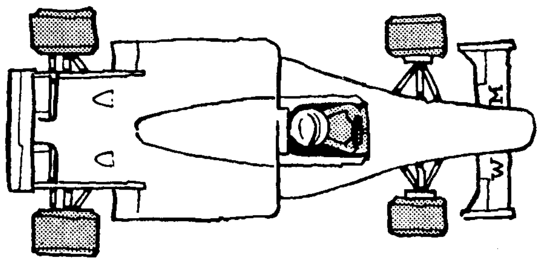
Je kunt twee punten op de baan aanwijzen waar de snelheidsvector horizontaal gericht is.

b. Geef die punten zo goed mogelijk aan op het werkblad.
Bereken de tijdstippen waarop die punten bereikt worden en bereken de coördinaten van die punten.
Tip. Als de snelheidsvector horizontaal is, dan is zijn y-component 0.

Er zijn drie punten waar de snelheidsvector verticaal gericht is.
c. Geef die punten zo goed mogelijk aan op het werkblad.
Bereken de tijdstippen waarop die punten bereikt worden en bereken de coördinaten van die punten.
d. Toon aan: $x(-t) = x(t)$ en $y(-t) = -y(t)$, voor alle waarden van t.
Wat betekent dit voor de baan ?
e. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan met de x-as en de y-as.



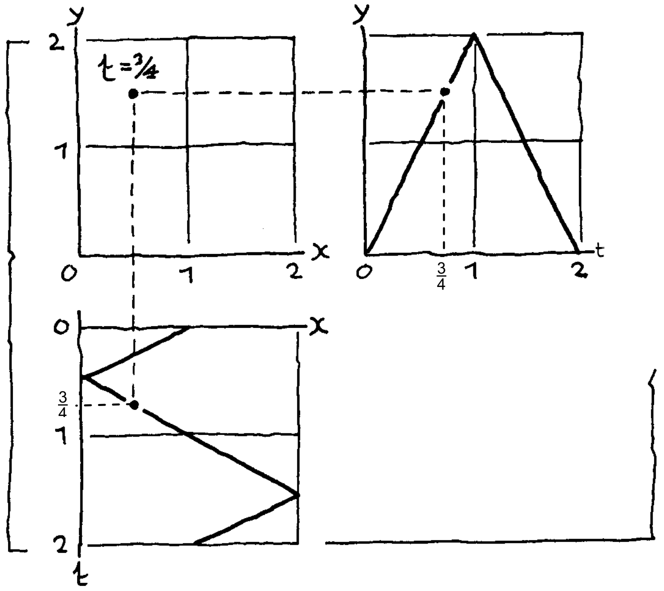
4 De baan hiernaast hoort bij de parametervoorstelling
$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}.$$
a. Bereken de coördinaten van de snijpunten met de assen.
b. Bereken de momenten, waarop het laagste punt en het meest linkse punt van de baan bereikt worden.
Bereken ook de coördinaten van die punten.
c. Er geldt: $x(-t) = y(t)$ voor alle t.
Wat betekent dit voor de baan ?
d. Toon aan dat alle punten van de baan aan de vergelijking $(x - y)^2 = 8(x + y)$ voldoen.
Hoe zie je aan deze vergelijking dat de lijn $y = x$ symmetrieas van de baan is ?
e. Bereken de snelheidsvector op het moment $t \neq 0$, dat de x-as gepasseerd wordt.
Hoe kun je hieruit de hoek vinden waaronder de baan de x-as snijdt op dat moment ?
f. Bereken de grootte van de snelheidsvector. Op welk moment is die minimaal ? Kun je dat gezien de vorm van de baan verwachten ?



*In opgave **2** hebben we de grafieken van de x- en de y-coördinaat als functie van t gevonden uit de baan van het kogeltje. In de volgende opgave schetsen we de baan van het kogeltje als we de grafieken van de x- en de y-coördinaat als functie van t kennen.*

*** 5 Biljarten 1**

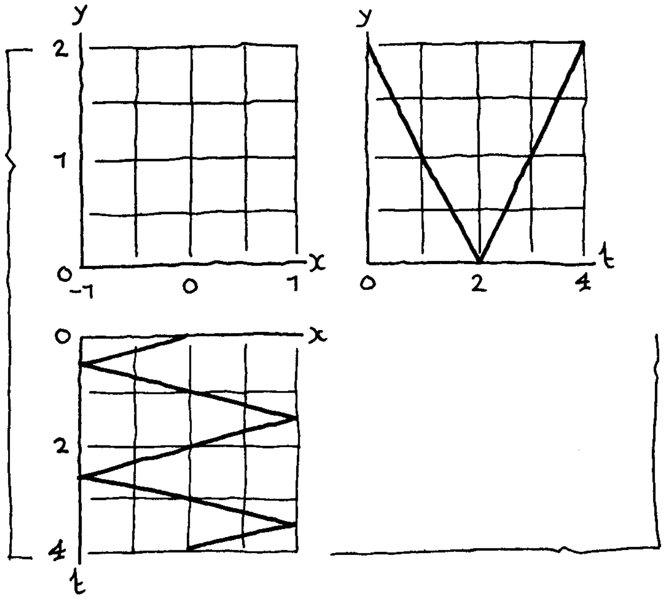
Van een biljartbal wordt op elk moment t tussen 0 en 2 de plaats op het biljart gegeven met behulp van de x-coördinaat en de y-coördinaat als functie van t.
In de figuur hierboven zie je in het rooster linksonder de grafiek van x als functie van t, niet zoals je gewend bent, maar een kwart slag gedraaid. Rechtsboven staat de grafiek van y als functie van t. In het rooster linksboven (het biljart) moet de baan van de bal komen. Hoe je de positie van de bal op het biljart op $t = \frac{3}{4}$ kunt tekenen, zie je in de figuur.



De figuur staat ook op het werkblad.
a. Teken de baan van de biljartbal op het werkblad.
Als je de formules van de twee coördinaat-functies kent, kun je het resultaat op de GR controleren.
Er geldt: $x = 2\,||t - 1\frac{1}{2}| - 1\,|$ en $y = -2\,|t - 1\,| + 2$.
b. Teken de baan op de GR.

* **6 Biljarten 2**

De biljartbal is nu anders gestoten.



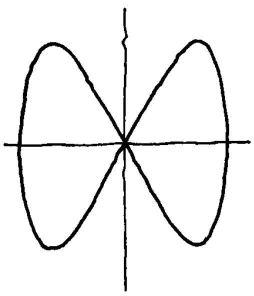
De figuur staat ook op het werkblad.

a. Hoe vaak raakt de bal de rand als $0 < t < 4$?
Teken de plaatsen waar de bal de band raakt en vermeld de bijbehorende tijdstippen.

b. Teken de baan van de bal op het werkblad.

De formules voor x en y zijn:
$x = -2\,|||t - 1\tfrac{1}{2}| - 1| - 1| + 1$ en $y = 2\,|\tfrac{1}{2}t - 1|$.

c. Controleer de baan met de GR.



7 Een parametervoorstelling van het lemniscaat, anders dan in opgave **1**, is

$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$, met $0 \le t \le 2\pi$.

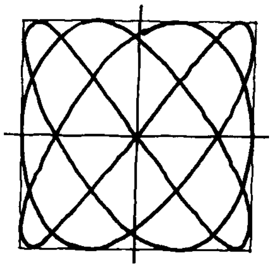
a. Bepaal de momenten waarop de hoogste punten bereikt worden. En de laagste.
Geef de exacte coördinaten van die punten.

b. Bepaal de coördinaten van de snijpunten met de x-as.

Een vergelijking van de baan is: $y^2 = 1 - (1 - 2x^2)^2$

c. Toon aan dat voor elke t het punt $(\sin t, \sin 2t)$ aan de vergelijking voldoet.

d. Hoe kun je aan de vergelijking van de baan zien wat de coördinaten van de hoogste en de laagste punten zijn?



8 De Lissajousfiguur hiernaast is opgesloten in het vierkant met hoekpunten (1,1), (1,-1), (-1,-1) en (1,-1). De beweging ontstaat door een punt te laten deelnemen aan tegelijkertijd uitgevoerde trillingen in de x- en de y-richting. Je krijgt de hele figuur in het tijdsinterval $[0,2\pi]$.
Uit het aantal keren dat de rand geraakt wordt, kun je het aantal periodes van de trillingen in de x- en de y-richting bepalen.
a. Doe dat.
b. Zoek een parametervoorstelling van de baan en controleer je formules met de GR. (Het is het gemakkelijks om (0,0) als startpunt (t=0) te kiezen).

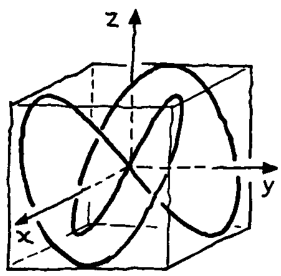
Bij lasershows wordt ook gebruik gemaakt van Lissajousfiguren. Een simulatie kun je vinden bij:
http://home.soneraplaza.nl/mw/prive/beco/Lasershow.htm

9 Niet altijd is de Lissajousfiguur zo spectaculair.
Als we in opgave **7** een faseverschil inbouwen, krijg je een heel andere figuur.

Gegeven is de parametervoorstelling $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$.

a. Teken de baan op de GR.

Je krijgt een deel van een parabool.
Door y te schrijven als $1 - 2\sin^2 t$, kun je meteen een vergelijking van de baan opschrijven.
b. Doe dat.



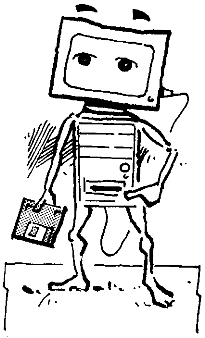
10 Je kunt ook 3D - Lissajousfiguren maken. Hiernaast staat er een. Een parametervoorstelling van de baan is

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \\ z = \sin 3t \end{cases}.$$

De beweging is opgesloten in een kubus.
a. Geef de coördinaten van de hoekpunten van de kubus.

Probeer je voor te stellen hoe de aanzichten in de drie asrichtingen er uit zien.
b. Maak de drie schetsen hierbij en controleer het resultaat met de GR.

Bij één complete rondgang wordt de buitenkant van de kubus tien keer getroffen.
c. Bepaal de coördinaten van de trefpunten op het bovenvlak exact.



Met het computerprogramma *lissajous* van Gwenn Englebienne kun je experimenteren met Lissajous-figuren: je kunt frequentieverhoudingen veranderen en faseverschillen inbouwen.

Overzichtsvragen

1 We bekijken vier bewegingen.
- Zeg hoe de baan er uit ziet.
- Druk de grootte van de snelheid in t uit.
- Geef een vergelijking van de baan.

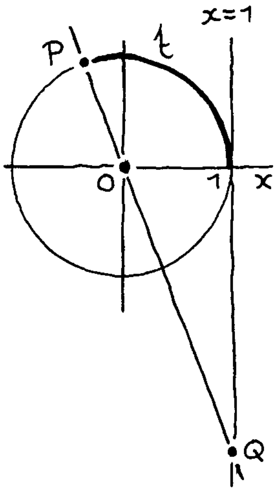
a. $x = 1 + 2t$ en $y = 2 + 3t$

b. $x = 1 + 2\sin t$ en $y = 2 + 3\sin t$

c. $x = 1 + 2\cos t$ en $y = 2 + 3\sin t$

d. $x = 1 + 2\cos 2t$ en $y = 2 + 3\sin t$

6 Tangens



1 Een kogeltje maakt de standaardcirkelbeweging en is op tijdstip t in punt P. We bekijken de richtingscoëfficiënt van de lijn OP (als die bestaat).

De helling van lijn OP noemen we de **tangens** van t, kortweg: tan t.

Q is het snijpunt van lijn OP en de raaklijn in (1,0) aan de eenheidscirkel.
a. Toon aan: de y-coördinaat van Q gelijk is aan tan t.
b. Voor welke waarden van t is tan t niet gedefinieerd ?
c. Toon aan: $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

2 Een kogeltje maakt de standaardcirkelbeweging.
a. Teken de eenheidscirkel. Construeer de punten waar het kogeltje zich kan bevinden op de tijdstippen t met $\tan t = -3$.
Zoek met behulp van de GR een tijdstip waarop het kogeltje zich in zo'n geconstrueerd punt bevindt en benader de coördinaten van dat punt in twee decimalen.
b. Voor welke t tussen -7 en 7 geldt: $\tan t = -3$ (in twee decimalen) ?

3 **a.** Geef de exacte waarde van $\tan \frac{1}{6}\pi$, $\tan \frac{1}{4}\pi$ en $\tan \frac{1}{3}\pi$.
b. Geef ook de exacte waarden van $\tan -\frac{1}{6}\pi$, $\tan 1\frac{1}{4}\pi$ en $\tan 5\frac{1}{3}\pi$.

4 Bekijk nog eens het plaatje bij opgave **1**.
a. Toon aan: $OQ = \dfrac{1}{|\cos t|}$.
Waarom staan er eigenlijk absolute-waardestrepen ?
b. Laat zien dat uit de stelling van Pythagoras volgt:
$\tan^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.
c. Laat zien dat de formule uit **b** ook volgt uit de definitie van de tangens en de formule $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

5 **a.** Teken de grafiek van tangens op $[-\pi,\pi]$.
b. Verklaar met opgave **1b** dat de grafiek asymptoten heeft.

c. Hoe kun je de asymptoten van de grafiek van tangens vinden met behulp van de formule $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$?

6 **a.** Bewijs dat $\tan(x+\pi) = \tan x$ voor alle x.
b. Wat betekent de formule uit **a** voor de functie tangens ?

> Tangens is periodiek met periode π.

7 **De afgeleide van tangens**

a. Toon aan: $\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$.

Om de afgeleide van de tangens in x uit te rekenen moet je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}$ berekenen.

b. Laat zien deze limiet gelijk is aan

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{\cos x \cdot \cos(x+\Delta x)}$.

Hoe volgt hieruit: $\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$?

Omdat ook $\tan^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ (zie opgave **4b**) kunnen we het volgende concluderen.

$$\frac{d}{dt}\tan t = \frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$$

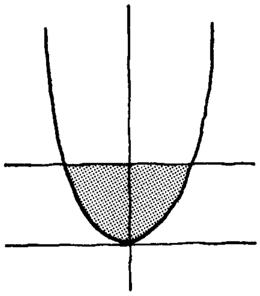
8 Laat zien dat bovenstaande juist is door $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ met de quotiëntregel te differentiëren.

9 Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a. $y = \tan^2 x$ **b.** $y = \sqrt{\tan x}$

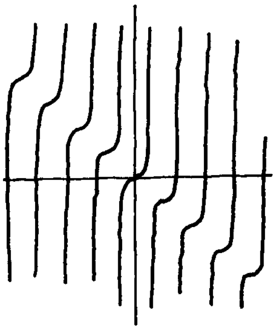
c. $y = \dfrac{1}{\tan x}$ **d.** $y = \dfrac{1+\tan x}{\tan x}$

10 Hiernaast is de grafiek van $f(x) = \tan^2 x$ getekend en de lijn $y = 1$ op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.



a. Bereken de coördinaten van de twee snijpunten.
b. Bereken de hellingen van de raaklijnen aan de grafiek van f in de beide snijpunten.
c. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de twee raaklijnen.

11 $f(x) = \tan x - x$
Hiernaast staat de grafiek.



a. Bereken de x-coördinaten van de buigpunten.
b. Toon dat aan alle buigpunten liggen op de lijn y = -x.
c. Laat zien dat alle buigraaklijnen horizontaal zijn.

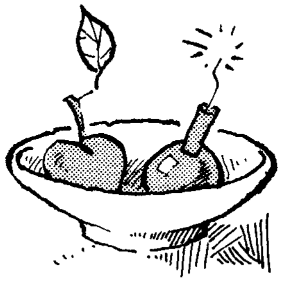
Overzichtsvragen

1 $y = \tan x$
a. Ga met de GR na dat $\tan x \approx x$ als $x \approx 0$.
Wat betekent dit voor de heling van de grafiek van tangens in (0,0) ?
Hoe volgt dit uit $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$?

De raaklijn aan de grafiek in $(\frac{1}{4}\pi, 1)$ snijdt de x-as in P en de y-as in Q.
b. Bereken langs algebraïsche weg de coördinaten van P en Q.

2 $y = \tan 2x$ op $[-\pi, \pi]$.
a. Teken de grafiek op de GR.
b. Geef van elke asymptoot een vergelijking.
c. Welke waarden kan de helling van de grafiek aannemen ?
d. Toon aan: $\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \tan 2x$.
Tip. Bewijs eerst: $1 - \tan^2 x = \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}$.

7 Het getal e



1 Veel gelijkenis en toch heel verschillend 1

De formules $y_1 = \frac{x}{2}$ en $y_2 = \frac{2}{x}$ lijken veel op elkaar. Toch betreft het heel verschillende functies. Dat zie je bijvoorbeeld aan de grafieken.

a. Wat voor type grafiek heeft $y_1 = \frac{x}{2}$? En $y_2 = \frac{2}{x}$?

b. Geen wonder dat de twee functies heel verschillende afgeleides hebben.
Geef een formule voor elk van de afgeleide functies: y_1' en y_2' .

2 Veel gelijkenis en toch heel verschillend 2

De formules $y_3 = x^2$ en $y_4 = 2^x$ lijken veel op elkaar. Toch betreft het heel verschillende functies. Dat zie je bijvoorbeeld aan de grafieken.

a. Wat voor type grafiek heeft y_3 ? En y_4 ?

b. Geef een formule voor y_3'.

$y_3 = x^2$ is een **machtsfunctie** (y_3 is *de tweedemacht van* x) en $y_4 = 2^x$ is een **exponentiële functie** (de invoer x staat in de exponent). Hoe we machtsfuncties kunnen differentiëren, is bekend. In dit hoofdstuk leren we hoe we exponentiële functies kunnen differentiëren.

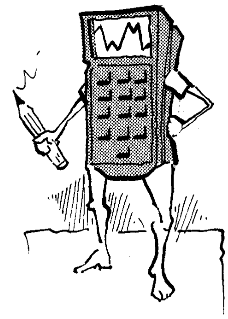
3 y_3 en y_4 zijn zoals in opgave **2**.

a. y_3 is dalend op de negatieve getallen en stijgend op de positieve getallen.
Wat betekent dit voor y_3' ?

b. y_4 is overal stijgend en de stijging neemt overal toe.
Wat betekent dit voor y_4' ?

4 y_4 is zoals in opgave **2**.

Anneke denkt dat $y_4' = x \cdot 2^{x-1}$. (Zij past de differentieerregel die geldt voor machtsfuncties toe op de exponentiele functie y_4).
Geef een overtuigend argument dat Annekes formule voor y_4' niet goed kan zijn.



5 **a.** Teken op de GR de grafiek van $Y_1 = 2^x$.
b. Teken er in hetzelfde window de grafiek van Y_1' bij.
Dat kan als volgt:

- Y_1 = 2^x en $Y_2 = \frac{Y_1(X-0.001)-Y_1}{0.001}$ (of met een nog kleinere waarde in plaats van 0,001).
- met Y_4 = nDeriv(Y_1,X,X,0.001) onder de knop MATH

c. Vergelijk de grafieken van Y_1 en Y_2. Wat valt je op ?
d. Teken de grafiek van $Y_3 = Y_2 / Y_1$. Wat valt je op ?
e. Het lijkt er dus sterk op dat Y_2 gelijk is aan een constante maal Y_1 . Die constante noemen we c_2.
Hoe groot is c_2 ongeveer (twee decimalen) ?

Voorlopige constatering

$\frac{d}{dx} 2^x = c_2 \cdot 2^x$, waarbij de constante $c_2 \approx 0{,}69$.

6 **a.** $y = 3^x$. Op eenzelfde manier als in opgave **5** kun je aantonen dat y' gelijk is aan een constante maal y. Die constante heet c_3.
Bepaal hoe groot c_3 ongeveer is (twee decimalen).
b. $y = (\frac{1}{2})^x$. Er geldt: $y' = c_{\frac{1}{2}} \cdot y$, voor een zekere constante $c_{\frac{1}{2}}$.
Bepaal hoe groot $c_{\frac{1}{2}}$ ongeveer is (twee decimalen).

7 $y = 2^x$.
a. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van deze functie in het punt (1,2). Gebruik voor c_2 de waarde 0,69.
b. Controleer je antwoord op de GR met
2nd DRAW , 5:Tangent(2^x,1).
Kies een geschikt window.

8 $y = 2^x$. We gaan $y'(5)$ berekenen via $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in zes stappen.

$$y'(5) \approx \frac{y(5{,}001)-y(5)}{0{,}001} = \frac{2^{5{,}001}-2^5}{0{,}001} = \frac{2^5 \cdot 2^{0{,}001}-2^5}{0{,}001} = \frac{2^5 \cdot (2^{0{,}001}-1)}{0{,}001} = 2^5 \cdot \frac{2^{0{,}001}-2^0}{0{,}001} \approx 2^5 \cdot y'(0).$$

a. In stap 1 en stap 6 staat het ≈-teken; dat wil zeggen dat je daar een foutje maakt.
Hoe kun je dat foutje kleiner krijgen ?

b. Stap 2 is duidelijk. Nu stap 3. Welke rekenregel voor machten wordt daar gebruikt ?
c. Wat gebeurt er in stap 4 ?
d. Wat gebeurt er in stap 5 ?

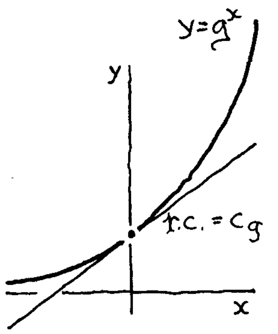
9 **a.** In de afleiding in opgave **8** kun je in plaats van 5 elk ander getal kiezen. Bijvoorbeeld -3. Dan krijg je (vul in): $y'(-3) =$ ____ $\cdot\ y'(0)$.
b. Algemeen: $y'(x) =$ ____ $\cdot$ ____
c. In opgave **4** had je al gezien dat $y'(x) = c_2 \cdot y(x)$.
Wat weet je dus nu van c_2 ?

Als $y = 2^x$ dan $y' = c_2 \cdot 2^x$, met $c_2 = y'(0) \approx \dfrac{2^{0,001} - 1}{0,001}$.

10 **a.** Bereken c_2 met behulp van bovenstaande.
b. Bereken c_2 ook met behulp van $\dfrac{2^{0,0001} - 1}{0,0001}$.
Welke benadering van c_2 is de beste, deze laatste of die uit **a** ?

11 Bereken op de manier van opgave **10** ook c_3 en $c_{\frac{1}{2}}$.

functie	**afgeleide functie**
$y = (1\frac{1}{2})^x$	$y' = 0{,}41 \cdot (1\frac{1}{2})^x$
$y = 2^x$	$y' = 0{,}96 \cdot 2^x$
$y = (2\frac{1}{2})^x$	$y' = 0{,}92 \cdot (2\frac{1}{2})^x$
$y = 3^x$	$y' = 1{,}10 \cdot 3^x$
$y = (3\frac{1}{2})^x$	$y' = 1{,}25 \cdot (3\frac{1}{2})^x$
$y = g^x$	$y' = c_g \cdot g^x$



In de tabel hierboven zie je dat de constante c_g groter wordt naarmate het grondtal g groter wordt. Logisch, want c_g is de helling van de grafiek van $y = g^x$ in het punt (0,1) en hoe groter g, des te steiler loopt de grafiek in dat punt.
Er is ook een grondtal g, zo dat de bijbehorende constante c_g precies 1 is. We gaan deze *speciale* g zoeken.

12 a. Op grond van de tabel weet je tussen welke twee grondtallen (met verschil $\frac{1}{2}$) de speciale g ligt.
Welke twee grondtallen zijn dat ?
b. Zoek met de GR uit hoe groot de speciale g is (twee decimalen).

We kunnen de speciale g ook rechtstreeks berekenen. Dat doen we in vier stappen: $c_g = 1 \rightarrow \frac{g^{0,001} - 1}{0,001} \approx 1 \rightarrow g^{0,001} - 1 \approx 0,001 \rightarrow g^{0,001} \approx 1,001 \rightarrow g \approx (1,001)^{1000}$.

13 a. Controleer elk van deze stappen. Wat gebeurt er in de tweede stap ? In de derde stap ? En in de vierde stap ?
b. Uit $(1,001)^{1000}$ volgt een waarde voor het speciale grondtal. Welke waarde ?
c. Nauwkeuriger wordt het als we niet met $\Delta x = 0,001$ werken, maar met $\Delta x = 0,0001$.
Welke waarde voor het speciale grondtal vind je hiermee ?
d. En met $\Delta x = 0,00001$?

Leonard Euler
1707 - 1783

Het speciale grondtal is een beroemd getal. Het heeft dan ook een eigen naam: e (ter ere van de grote Zwitserse wiskundige L. Euler).

e is het getal, zo dat $c_e = 1$.

Als $y = e^x$, dan $y' = e^x$.

$e \approx (1,0001)^{10000}$.

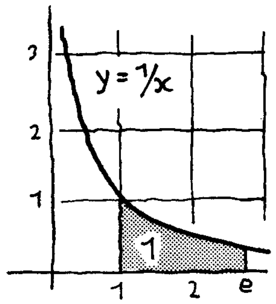
e = 2, 71828 18284 59045 23536
02874 71352 66249 77572
47093 69995 95749 66967
62772 40766 30353 54769
45713 82178 52516 64274
27466 39193 20030 59921
81741 35966 29043 57290
03342 95260 59563 07381
32328 62794 34907 63233
82988 07531 95251 01901
15738 34187 93070 21540
89149 93488 41675 09244
76146 06680 82264 80016
84774 11853 74234 54424
37107 53907 77449 92069

Het getal e heeft altijd in de schaduw gestaan van π. De geschiedenis van π is veel ouder; dat getal was al bekend bij de oude Grieken. Door de eeuwen heen heeft π de mensheid gefascineerd. Velen hebben hun leven besteed aan het berekenen van zoveel mogelijk decimalen van π (tegenwoordig gebeurt dat met computers). Voor e is er veel minder belangstelling. Het bijzondere van e is hierboven uitgelegd: de functie $y = e^x$ is zijn eigen afgeleide. In de natuurwetenschappen werkt men daarom bij voorkeur met deze exponentiële functie (liever dan met $y = 2^x$ of met $y = 10^x$). Op een wetenschappelijke rekenmachine heeft de functie $y = e^x$ een eigen knop.

Net als π, is e een irrationaal getal, dat wil zeggen dat het niet als breuk kan worden geschreven. e kan wel goed worden benaderd door oneindige reeksen, bijvoorbeeld:

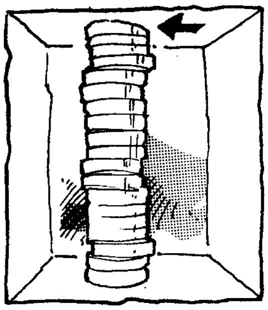
$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$.

De eerste 300 decimalen van e staan op de vorige bladzijde.



Verder duikt e op allerlei (onverwachte) plaatsen in de wiskunde op. Een voorbeeld: de oppervlakte tussen de x-as, de grafiek van $y = 1/x$ en de lijnen $x = 1$ en $x = e$ is precies 1.
Een mooie illustratie van e is de volgende opgave.

14 Iemand leent zijn geld een jaar uit voor 100% rente (het kapitaal wordt dus na 1 jaar verdubbeld).
a. Het is voordeliger voor hem het geld een jaar uit te lenen voor 50% per half jaar.
Hoeveel keer zo groot wordt het kapitaal dan in een jaar?
b. Nog voordeliger is het om het uit te lenen voor 25% per kwart jaar.
Hoeveel keer zo groot wordt het kapitaal dan in een jaar?
c. Nog voordeliger is het om het uit te lenen voor 10% per tiende jaar.
Hoeveel keer zo groot wordt het kapitaal dan in een jaar?
d. Nog voordeliger is het om het uit te lenen voor 1% per honderdste jaar.
Hoeveel keer zo groot wordt het kapitaal dan in een jaar?

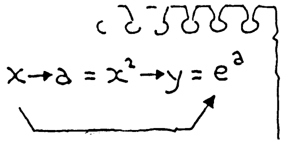


Je kunt zo doorgaan en het jaar in steeds meer periodes van steeds kortere duur hakken. En steeds zal het voordeliger blijken. Maar er is een plafondwaarde: het kapitaal wordt nooit meer dan e keer zo groot.
e. Hoe kun je dat met opgave **13** begrijpen ?

15 Controleer op de GR dat $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

16 Bepaal de afgeleide functies van:

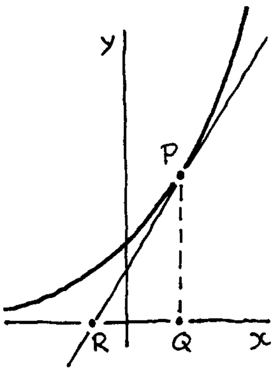
$y = 2 \cdot e^x$	$y = 2 - e^x$
$y = 2 + e^x$	$y = e^x / 2$



17 Differentieer (kettingregel):

$y = e^{2x}$	$y = e^{x^2}$
$y = e^{2+x}$	$y = e^{\sin x}$
$y = e^{5-2x}$	$y = \sin(e^x)$

18 a. Teken op de GR de grafiek van $y = e^x$ en de lijn $y = ex$.
b. Bewijs dat de lijn aan de grafiek raakt.



19 Het punt P ligt op de grafiek van $y = e^x$. Q is de projectie van P op de x-as. De raaklijn in P aan de grafiek snijdt de x-as in het punt R.
a. Stel dat de x-coördinaat van P 2 is.
Bereken dan de afstand QR.
b. Bewijs dat QR = 1 voor *elk* punt P op de grafiek.

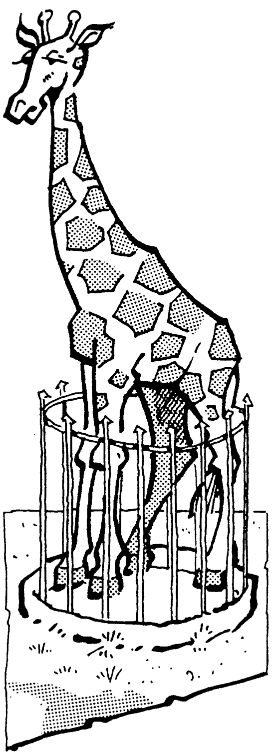
Voorbeeld $y = x \cdot e^{2x}$
Om deze functie te differentiëren, moet je zowel de ketting- als de productregel gebruiken.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} \cdot e^{2x} + x \cdot \frac{de^{2x}}{dx} = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = (1+2x)e^{2x}.$$

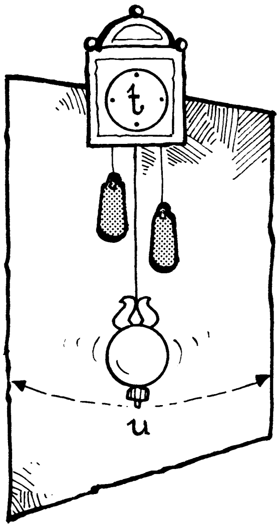
20 Differentieer:

$y = x^2 \cdot e^x$ $\qquad$ $y = \sqrt{x} \cdot e^x$

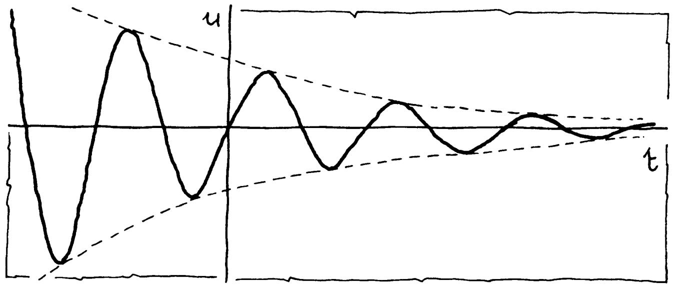
$y = \sin x \cdot e^x$ $\qquad$ $y = \sin x \cdot e^{x^2}$



21 De groei van een bepaalde diersoort wordt benaderd door de formule $D = e^{-0,2t+10}$. Hierbij is t de tijd in jaren en D het aantal exemplaren van de diersoort.
a. Hoeveel exemplaren telt de diersoort op tijdstip 0 ?
b. Hoe groot is de groeisnelheid op tijdstip 0 (in aantal dieren per jaar) ?
c. Hoe kun je aan de formule zien dat het aantal dieren afneemt ?
d. De grafiek van D als functie van t heeft een horizontale asymptoot.
Welke lijn is dat ?



22 Hieronder staat de grafiek van de $u = 4\ e^{-0{,}1t} \cdot \sin t$



Hierbij stelt t de tijd voor en u de uitwijking van een slinger ten opzichte van de evenwichtsstand.

a. De uitwijking wordt "gedempt". Wat betekent dat ? Welke factor in de formule is verantwoordelijk voor de demping ?

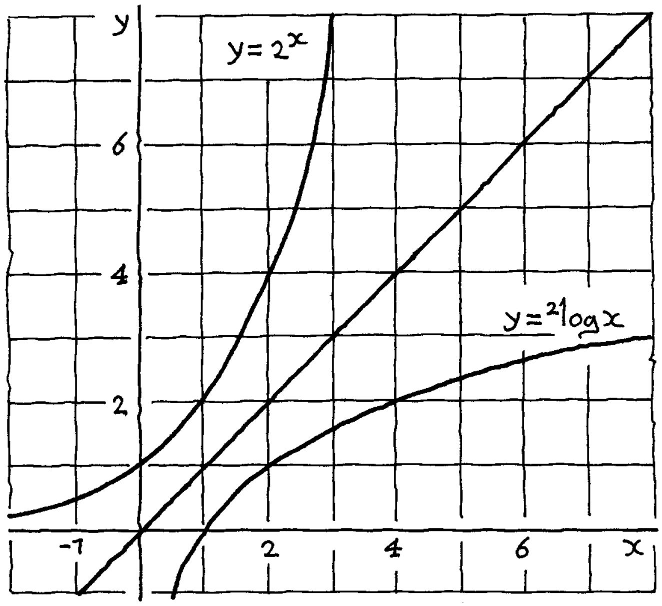
b. Differentieer u als functie van t.

c. Controleer dat de slinger op de tijdstippen $t \approx 1{,}47$ en $t \approx 4{,}61$ een uiterste stand heeft.

d. Wat zijn de volgende twee tijdstippen waarop de slinger een uiterste stand heeft ?

e. Ga na dat u tussen -0,01 en 0,01 ligt als $t \geq 60$.

8 De natuurlijke logaritme



De functies $y = {}^2\log x$ en $y = 2^x$ zijn elkaars inverse.

$$q = {}^2\log p \quad \Leftrightarrow \quad 2^q = p$$

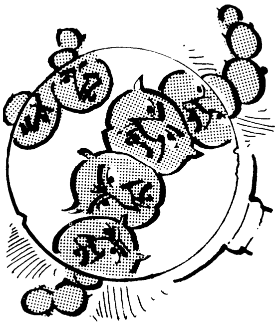
1 **a.** Welke waarden kunnen p en q hierboven hebben ?
b. Bereken van behulp van het bovenstaande (zonder rekenmachine):

${}^2\log 1$	${}^2\log \sqrt{2}$
${}^2\log 2$	${}^2\log \frac{1}{2}$
${}^2\log 8$	${}^2\log \frac{1}{8}$

2 **a.** Hoe ontstaan de grafieken van $y = {}^2\log x$ en $y = 2^x$ uit elkaar ?
b. Wat is het domein van ${}^2\log$? En het bereik ?

Voor de meeste getallen x komt ${}^2\log x$ niet "mooi uit". Op een rekenmachine kun je dan ${}^2\log x$ benaderen met de volgende formule.

$$^{2}\log x = \frac{\log x}{\log 2}$$



3 In een zekere kweek zijn er op een gegeven moment 500 bacteriën. Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën zich. Na hoeveel tijd zijn er 3750 bacteriën ?

4 **a.** De helling van $y = 2^x$ in (0,1) is $c_2 \approx 0{,}69$.
Weet je nu ook wat de helling is van $y = {}^{2}\log x$ in (1,0) ?
b. De helling van $y = 2^x$ in (2,4) is $c_2 \cdot 4 \approx 2{,}77$.
In welk punt van de grafiek van $y = {}^{2}\log x$ weet je de helling nu ook ?
Hoe groot is die helling ?
c. De helling van $y = 2^x$ in $(-1,\frac{1}{2})$ is $c_2 \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}35$.
In welk punt van de grafiek van $y = {}^{2}\log x$ weet je de helling nu ook ?
Hoe groot is die helling ?

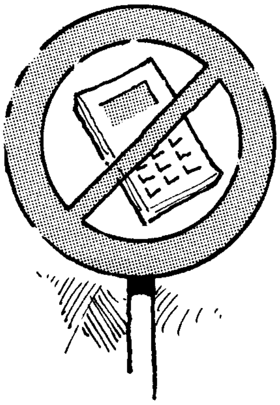
5 **a.** Wat is het stijgingsgedrag van de functie $y = {}^{2}\log x$ (afnemende/toenemende stijging/daling) ?
b. Wat betekent dat voor de hellingfunctie y' ?
c. *Schets* de hellinggrafiek.

In plaats van met grondtal 2 gaan we nu met grondtal e werken, dus met ${}^{e}\log$. Het is gebruikelijk om "ln" te schrijven in plaats van ${}^{e}\log$. ln komt van *logaritme naturalis*. We noemen deze functie **natuurlijke logaritme**. Ook voor deze functie zit er op een wetenschappelijke rekenmachine een aparte knop.

De functies $y = \ln x$ en $y = e^x$ zijn elkaars inverse.

$$q = \ln p \quad \Leftrightarrow \quad e^q = p$$

6 **a.** Teken de grafiek van $y = e^x$ en $y = \ln x$ in één window op de GR.
b. Wat is het domein van ln ? En het bereik ?



7 Bereken *zonder* rekenmachine:

ln 1	ln √e
ln e	ln 1/e
ln e^3	ln $1/e^3$

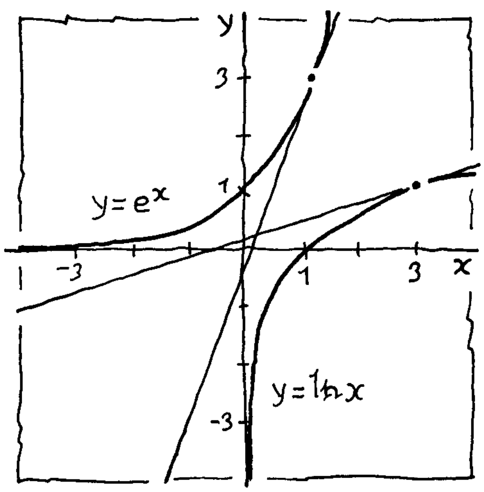
$$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

8 **a.** Vergelijk deze formule met de soortgelijke formule op de vorige bladzijde.
b. Bereken met deze formule ln 100.
Controleer je antwoord met de knop ln.

ln , ${}^2\log$ of log , wat maakt dat uit ? Deze drie functies schelen niet zo veel. Het enige voordeel van ln is dat hij een mooie afgeleide blijkt te hebben. En die gaan we nu bekijken.

9 $y_1 = \ln x$ en $y_2 = y_1'$
a. Teken van beide de grafiek op de GR.
b. Maak en tabel op de GR voor y_2. Zie je een mooie regelmaat ? Durf je een formule voor y_2 te gokken ?

Hieronder zijn de grafieken van $y = e^x$ en $y = \ln x$ getekend. Op de grafiek van $y = \ln x$ is een punt (3,ln3) aangegeven en op de grafiek van $y = e^x$ het spiegelbeeld (ln3,3). In beide punten is de raaklijn getekend.



10 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in (3,ln3) kunnen we met de afgeleide van $y = e^x$ uitrekenen.
a. Doe dat.
b. Wat is bijgevolg de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y = \ln x$ in het punt (3,ln3) ?

11 a. Wat is de helling van de grafiek van $y = \ln x$ in het punt (2,ln2) ?
b. En in het punt (1,0) ?
c. En in het punt (x,lnx) ?

✂ **12** $x \to u = \ln x \to e^u = x$
Bekijk bovenstaande ketting. In twee stappen geeft de ketting bij de invoer x als uitvoer weer x !
a. Wat is dus de afgeleide van deze ketting ?
b. Je kunt ook de afgeleide van de ketting uitrekenen met de kettingregel. Ga na dat je dan krijgt: $\frac{du}{dx} \cdot x$
c. Leg uit dat uit **a** en **b** volgt: $\frac{d}{dx} \ln x = 1/x$.

13 a. Stel een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $y = \ln x$ in het punt (e,1); geef exacte waarden; dus geen benaderingen gebruiken.
b. Ook in het punt (5,ln5).

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

14 Differentieer:

$y = 2 + \ln x$ | $y = 2 - \ln x$
$y = 2 \cdot \ln x$ | $y = \frac{\ln x}{2}$

15 Differentieer:

$y = \ln(2x)$ | $y = \ln(2+x)$
$y = \ln(x^2)$ | $y = (\ln x)^2$

16 Differentieer:

$y = 2x + 3 \ln x$ | $y = \frac{\ln x}{x}$
$y = x \cdot \ln x$ | $y = x^2 \cdot \ln x$

17 Geluidshinder van het verkeer

Het lawaai dat men ondervindt van het verkeer op een drukke snelweg blijkt vooral af te hangen van de afstand die men heeft tot de snelweg en van de snelheid van het verkeer op de snelweg.
Het lawaai is niet constant. Ook als een waarnemer op een vaste plek staat, wisselt het lawaai in de tijd voortdurend. Voor het vergelijken van situaties hanteert men daarom het gemiddelde lawaainiveau L op een plek. Een hoge waarde van L kan reden zijn om een geluidswal te plaatsen bij een woonwijk. Bij drukke snelwegen gaat men uit van de formule:
$L = 89{,}5 - 4{,}3 \ln(a \cdot v) + 0{,}16v - 0{,}03a$, met a de afstand in meters tot de snelweg en v de gemiddelde snelheid in km/uur van het verkeer op de snelweg.

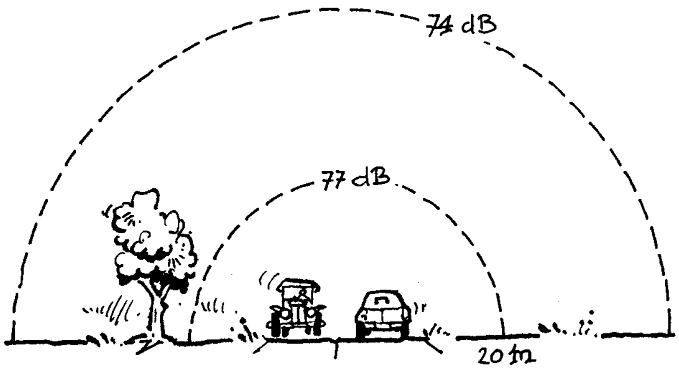
a. Stel dat $v = 80$.
Toon aan dat volgens deze formule L afneemt als de afstand a tot de snelweg groter wordt.

Bewoners van woningen dicht bij de snelweg ondervinden vooral veel overlast bij hoge en bij zeer lage gemiddelde snelheden van het verkeer.

b. Een woning staat op 100 meter afstand van de snelweg.
Toon met behulp van differentiëren aan dat er een gemiddelde snelheid van het verkeer is waarbij L minimaal is bij deze woning en bereken die gemiddelde snelheid.

c. Onderzoek in hoeverre de afstand die een woning heeft tot de snelweg van invloed is op de gemiddelde snelheid waarbij L minimaal is.

Examen vwo wiskunde A 1995, eerste tijdvak, gedeeltelijk

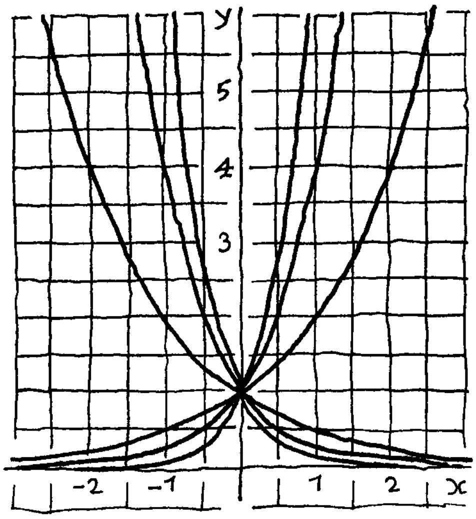


9 Bij andere grondtallen

We hebben gezien: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ en $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$. Bij andere grondtallen is de afgeleide minder mooi. We weten al dat $\frac{d}{dx}g^x = c_g \cdot g^x$. In deze paragraaf gaan we de precieze waarde van c_g vinden en leren we $\frac{d}{dx}\,{}^g\!\log x$ kennen.

1 **a.** $8^x = 2^{3x}$ voor alle getallen x.
Kun je dat met een rekenregel voor machten uitleggen ?
b. Vul in: $8^x = 4^{\text{—}\cdot x}$.
c. Vul in: $(\frac{1}{4})^x = 2^{\text{—}\cdot x}$.

2 Bekijk de grafieken van de volgende zes exponentiële functies: $y = 2^{-x}$, $y = 4^{-x}$, $y = 8^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 4^x$ en $y = 2^x$.



a. Hoe ontstaat de grafiek van $y = 8^x$ uit de grafiek van $y = 2^x$? Tip: kijk naar: $8^x = 2^{3x}$.
b. Hoe ontstaat de grafiek van $y = (\frac{1}{4})^x$ uit de grafiek van $y = 2^x$?

3 **a.** Teken op de Gr in één window de grafieken van $y = 3^x$ en $y = 2^x$.
b. Leg uit dat $3^{\,{}^3\!\log 2 \cdot x} = 2^x$.
c. Hoe ontstaat de grafiek van $y = 2^x$ uit de grafiek van $y = 3^x$?

4 $y = e^x$ en $y = 2^x$.

a. Leg uit dat $e^{\ln 2 \cdot x} = 2^x$.

b. Hoe ontstaat de grafiek van $y = 2^x$ uit de grafiek van $y = e^x$?

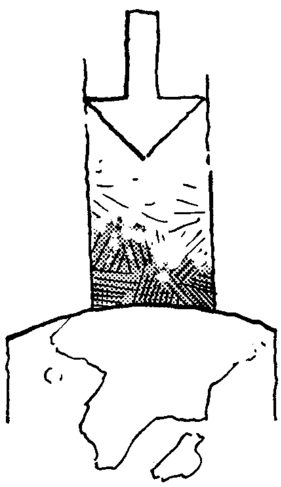
5 $y = e^x$ en $y = g^x$.

a. Leg uit dat $e^{\ln g \cdot x} = g^x$.

b. Hoe ontstaat de grafiek van $y = g^x$ uit de grafiek van $y = e^x$?

Alle exponentiële functies zijn gelijkwaardig

Je kunt van elk grondtal overstappen op elk ander grondtal.
De grafieken van exponentiële functies ontstaan uit elkaar door horizontale vermenigvuldigingen (ten opzichte van de y-as).



6 De luchtdruk is een exponentiële functie van de hoogte: $L = A \cdot e^{-0,14 \cdot h}$.
L is de luchtdruk in millibar,
A is de luchtdruk op zeeniveau,
h is de hoogte in km (boven zeeniveau).
A is gemiddeld 1015; die waarde nemen we in deze opgave voor A.

a. Bereken de luchtdruk op een hoogte van 5 km.

b. Bereken op welke hoogte de luchtdruk 280 millibar is.

c. Schrijf de formule in de gedaante: $L = 1015 \cdot 2^{\_\_ \cdot h}$.

d. Schrijf de formule in de gedaante: $L = 1015 \cdot 10^{\_\_ \cdot h}$.

e. Schrijf de formule in de gedaante: $L = 1015 \cdot (\_\_)^h$.

Je ziet dat je even goed met e^{---} , als met 2^{---} of met 10^{---} kunt werken. Het doet er dus niet zo veel toe welk grondtal je neemt. Het enige voordeel van grondtal e is dat de afgeleide van $y = e^x$ mooi is.

7 We willen de functie $y = 2^x$ differentiëren. Deze functie kunnen we schrijven als ketting:
$x \to \ln 2 \cdot x = u \to e^u = y$.

a. Ga dat na.

De eerste schakel is: $x \to u = \ln 2 \cdot x$,
de tweede schakel is: $u \to y = e^u$.

b. Geef de afgeleide van beide schakels: $\frac{du}{dx}$ en $\frac{dy}{du}$?

c. Ga na dat met de kettingregel volgt: $\frac{dy}{dx} = \ln 2 \cdot 2^x$.

d. Kennelijk is c_2 gelijk aan $\ln 2$.
Welke waarde levert je rekenmachine voor c_2 ?

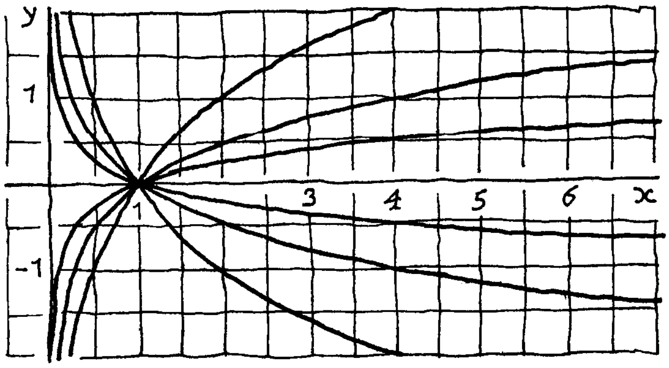
Algemeen $\frac{d}{dx} g^x = \ln g \cdot g^x$

8 **a.** Kies $g = 10$.
Welke afgeleide geeft de regel voor $\frac{d}{dx} 10^x$?
b. Kies $g = 1/e$.
Welke afgeleide geeft de regel voor $\frac{d}{dx} (1/e)^x$?
c. Kies $g = e$.
Welke afgeleide geeft de regel voor $\frac{d}{dx} e^x$?

9 **a.** $y = 2^x$. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt (2,4) is exact $\ln 16$.
Toon dat aan.
b. Wat is de exacte waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(-1,\frac{1}{2})$?

10 **a.** Vul aan: ${}^4\log x = \frac{{}^2\log x}{\_\_\_} = \_\_\_ \cdot {}^2\log x$.
b. Controleer dit met grafieken op de GR.
c. Vul in: ${}^8\log x = \_\_\_\_ \cdot {}^2\log x$.
d. Vul in: ${}^{\frac{1}{2}}\log x = \_\_\_\_ \cdot {}^2\log x$.

11 We bekijken de grafieken van zes logaritmische functies:
$y = {}^2\log x$ $y = {}^4\log x$ $y = {}^8\log x$
$y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ $y = {}^{\frac{1}{4}}\log x$ $y = {}^{\frac{1}{8}}\log x$.
Op de volgende bladzijde staan hun grafieken.
a. Hoe ontstaat de grafiek van $y = {}^8\log x$ uit de grafiek van $y = {}^2\log x$?
b. Hoe ontstaan de andere vier grafieken uit de grafiek van $y = {}^2\log x$?



12 Teken in één window de grafieken van $y = \ln x$ en $y = {}^2\log x$.

a. Vul aan: ${}^2\log x = \dfrac{\ln x}{\_\_\_}$.

b. Hoe ontstaat de grafiek van $y = {}^2\log x$ uit de grafiek van $y = \ln x$?

Alle logaritmische functies zijn gelijkwaardig

Je kunt van elk grondtal overstappen op elk ander grondtal.
de grafieken van logaritmische functies ontstaan uit elkaar door verticale vermenigvuldigingen (ten opzichte van de x-as).

13 De afgeleide van $y = \ln x$ is $y' = 1/x$.
Wat is dus de afgeleide van $y = {}^2\log x$?

Algemeen $\dfrac{d}{dx}\, {}^g\log x = \dfrac{1}{\ln g} \cdot \dfrac{1}{x}$

14 **a.** Kies $g = 10$.
Welke afgeleide geeft de regel voor $\dfrac{d}{dx} \log x$?

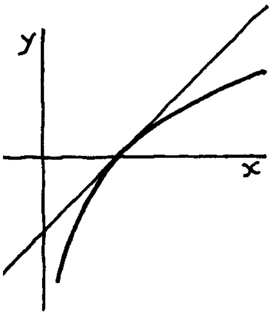
b. Kies $g = 1/e$.
Welke afgeleide geeft de regel voor $\dfrac{d}{dx}\, {}^{\frac{1}{e}}\log x$?

c. Kies $g = e$.
Welke afgeleide geeft de regel voor $\dfrac{d}{dx} \ln x$?

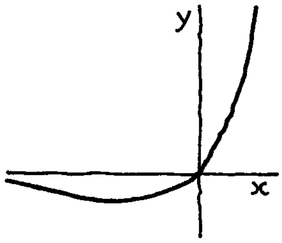
15 Een hoogtemeter is een apparaatje wat bergwandelaars wel gebruiken om te bepalen hoe hoog ze zich bevinden. Ze stellen het apparaatje in bij hun vertrek. Zeg dat een wandelaar vertrekt op hoogte 635 m; daar was de luchtdruk 950 millibar. Als nu ergens tijdens de wandeling de luchtdruk 790 millibar is, dan geeft de hoogtemeter aan: 1960 m. Er geldt namelijk de formule: $h = 50 - 7{,}2 \cdot \ln L$.
L is de luchtdruk in millibar,
h is de hoogte in km.
a. Ga na dat de aangegeven hoogte van 1960 meter bij luchtdruk 790 mbar in overeenstemming met de formule.
b. Kloppen de hoogte en luchtdruk aan het vertrek ook met de formule ?
c. Bereken op welke hoogte de luchtdruk 900 millibar is.
d. Schrijf de formule in de gedaante: $h = 50 - \_\_ \cdot {}^{2}\log L$.
e. Schrijf de formule in de gedaante: $h = 50 - \_\_ \cdot \log L$.
f. Schrijf de formule in de gedaante: $h = 50 - {}^{-}\log L$.
g. Laat zien dat de formule in overeenstemming is met de formule $L = 1015 \cdot e^{-0{,}14 \cdot h}$ (zie opgave **6**).

Je ziet dat je even goed met ln , als met ${}^{2}\log$ of met log kunt werken. Het doet er dus niet zo veel toe welk grondtal je neemt. Het enige voordeel van grondtal e is dat de afgeleide van $y = \ln x$ mooi is.

10 Gemengde opgaven

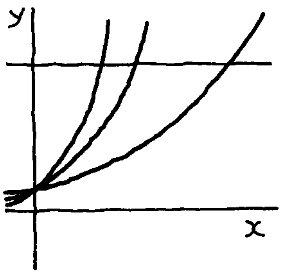


1 De grafiek van elke logaritmische functie $y = {}^a\log x$ met $a > 0$ en $a \neq 1$ snijdt de x-as in (1, 0). Hiernaast staat de grafiek van zo'n functie met de raaklijn in (1, 0) aan de grafiek. Deze raaklijn snijdt de y-as in P.
Voor welke $a > 1$ is $|OP| = 3$ exact ? En voor welke $a < 1$?

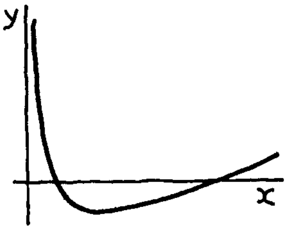


2 We bekijken de functie $y = x \cdot 2^x$.
a. Ga met een exacte berekening na dat de extreme waarde van f(x) wordt aangenomen voor $x = -\frac{1}{\ln 2}$.

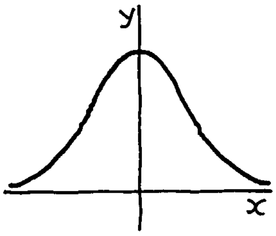
Een horizontale lijn snijdt de grafiek in twee punten die afstand 2 tot elkaar hebben. Noem de x-coördinaat van het punt met de kleinste x-coördinaat p.
b. Stel een vergelijking voor p op en los de vergelijking langs algebraïsche weg op.



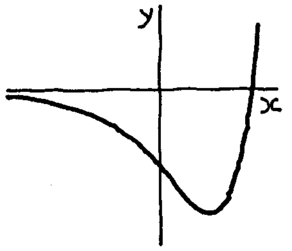
3 Hiernaast staan de grafieken van de functies f, g en h, met: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$ en $h(x) = 8^x$.
a. Door welke vermenigvuldiging/verschuiving ontstaan de grafieken van g en h uit die van f ?
b. Een horizontale lijn snijdt de y-as in A, de grafiek van f in B, de grafiek van g in C en de grafiek van h in D.
Gegeven is $BC = 1$.
Bereken AD en CD.
c. P is een punt op de grafiek van f. De raaklijn in P aan de grafiek van f gaat door de oorsprong O(0, 0).
Bereken de x-coördinaat van P exact.



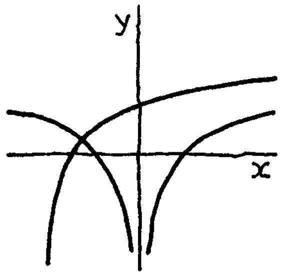
4 $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x$
Hiernaast staat de grafiek van f.
a. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x-as. Tip: f(x) =0 alleen als ln x = __ of ln x = __ .
b. Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f exact.
c. Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek exact en geef een vergelijking van de buigraaklijn.
d. Er zijn twee getallen x waarvoor geldt: $f(x) = 3$.
Bereken deze getallen exact.



5 Hiernaast staat de grafiek van $y = 2e^{-x^2}$.
Bereken met behulp van differentiëren exact de x-coördinaat van de punten van de grafiek die het dichtst bij O liggen. Tip. Pas de stelling van Pythagoras toe.



6 $f(x) = e^{2x} - 2e^{x+1}$
a. Schrijf $2e^{x+1}$ als $e^{x+1+\text{—}}$.
b. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) = 0$.
c. Bereken de extreme waarde van $f(x)$ exact.
d. Bereken de x-coördinaat van het buigpunt exact.

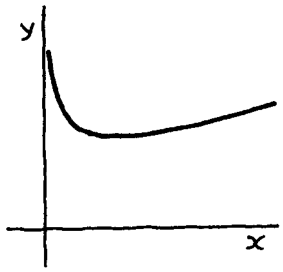


7 Hiernaast staan de grafieken van f en g met:
$f(x) = \ln(2x+4)$ en $g(x) = \ln|x|$.
a. Geef een vergelijking van de raaklijn in (-1, 0) aan de grafiek van g.

P is het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.
b. Geef via een exacte berekening een vergelijking van de raaklijn in P aan de grafiek van f.

De lijn met vergelijking $y = a$, waarbij a een of ander getal is, snijdt de grafiek van f in punt P en de grafiek van g in de punten Q en R waarbij Q het midden van lijnstuk PR is.
c. Bereken a.

Examen vwo Wiskunde I 1977 tweede tijdvak

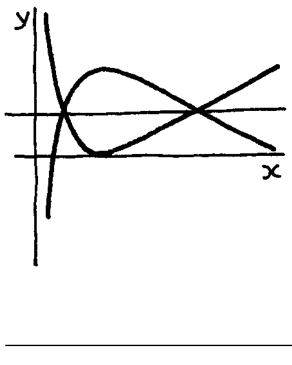


8 $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$
a. Bereken de extreme waarde van $f(x)$ exact.
b. Bereken de exacte coördinaten van het buigpunt van de grafiek en geef een vergelijking van de buigraaklijn.

9 Gegeven zijn de functies f en g met:
$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ en $g(x) = p\sqrt{x}$, voor een of ander getal p.

De raaklijn in Q(0,1) aan de grafiek van f snijdt de x-as in P.
a. Bereken de oppervlakte van driehoek OPQ.

De lijn met vergelijking $y = e$ snijdt de grafiek van f in A, de grafiek van g in B en de y-as in C.
b. Bereken p in geval C het midden van lijnstuk AB is.



10 Hiernaast staan de grafieken van f en g, met $f(x) = (\ln x)^2$.
De grafiek van g ontstaat uit die van f door in de lijn $y = 1$ te spiegelen.
a. Geef de formule van $g(x)$.

Een horizontale lijn snijdt de grafiek van f in twee punten. De x-coördinaat van het snijpunt rechts van de lijn $x = 1$ noemen we a.
b. Druk de x-coördinaat van het andere snijpunt in a uit.
c. Bereken a als gegeven is dat de afstand van de twee snijpunten $4\frac{4}{5}$ is.

Antwoorden

Paragraaf 1 Differentiëren in de praktijk

1 **a.** $y' = x^2 + x + 1$
b. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$
c. $y' = 3x^2 + 2x + 1$
d. $y' = \dfrac{-3}{2x^2} + \dfrac{10}{x^3}$
e. $y' = 19$
f. $y' = 2ax + b$

2 **a.** $y' = 0$ als $x = 1$ of $x = -1 \rightarrow$ Punten: $(1,1\frac{1}{3})$, $(-1,2\frac{2}{3})$
b. Stijgend op $\langle \leftarrow , -1]$ en op $[1 , \rightarrow \rangle$
c. Dalend op $[-1 , 1]$

3 **a.** $12 \cdot 15 = 180$ cm^2
b. $y : x = 45 : 18 = 5 : 2$, dus $y = 2\frac{1}{2}x$
c. $O = x \cdot (45 - y) = x \cdot (45 - 2\frac{1}{2}x) = 45x - 2\frac{1}{2}x^2$
d. Y is een kwadratische functie van x en de coëfficiënt van x^2 is negatief.
e. $x = 9$
f. $O' = 45 - 5x = 0 \rightarrow x = 9$

4 **a.** Tussen 0 en 15
b. $b = 30 - 2x$; $l = 80 - 2x$; $i = x(30-2x)(80-2x)$
d. Tussen 6 en 7
e. $x \approx 6{,}7$ en $i \approx 7408$
f. $i' = 12x^2 - 440x + 2400 = 0 \rightarrow x = 6\frac{2}{3}$
g. $6\frac{2}{3}$ bij $16\frac{2}{3}$ bij $66\frac{2}{3}$

5 **a.** $O = (x - 6)(\dfrac{600}{x} - 9)$
b. $O' = -9 + \dfrac{3600}{x^2} = 0$ voor $x = 20$, dus 20 bij 30 meter.

6 **a.** $K = 25p + 2600 + \dfrac{10000}{p}$
b. 20 atmosfeer
c. Minimale waarde € 3600.

7 **a.** Er geldt: $h = \frac{1}{\pi r^2}$. De oppervlakte van de mantel is $2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = \frac{2}{r}$. De oppervlakte van de bovenkant en onderkant zijn beide πr^2. Opgeteld geeft dat: $\frac{2}{r} + 2\pi r^2$.

b. $\frac{-2}{r^2} + 4\pi r = 0 \rightarrow r \approx 0{,}542 \rightarrow h = 0{,}923$

Paragraaf 2 Productregel en quotiëntregel

1 $f_1'(x) = 2x \cdot (2x-5) + (x^2+3) \cdot 2 = 6x^2 - 10x + 6$

$f_2'(x) = -4 \cdot (1-4x) + (1-4x) \cdot -4 = -8 + 32x$

$f_3'(x) = 5 \cdot \sqrt{x} + (5x+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f_4'(x) = (\frac{-3}{x^2} + 1) \cdot \sqrt{x} + (\frac{3}{x} + x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f_5'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\frac{1}{x} + 3) + (\sqrt{x}+3) \cdot \frac{-1}{x^2}$

$f_6'(x) = 5x^4 \cdot (x^5-1) + (x^5+1) \cdot 5x^4 = 10x^9$

2 **a.** De supermarkt meet x bij $\frac{1200}{x}$, dus het perceel meet $x+12$ bij $\frac{1200}{x} + 16$.

b. $O = (x+12)(\frac{1200}{x} + 16) = 1200 + 16x + \frac{14400}{x} + 192$

c. $O' = 16 - \frac{14400}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 900 \rightarrow x = 30.$

Het perceel meet dan 42 bij 56 m.

3 $O' = 1 \cdot (\frac{1200}{x} + 16) + (x+12) \cdot -\frac{1200}{x^2} =$

$\frac{1200}{x} + 16 - \frac{1200}{x} - \frac{14400}{x^2} = 16 - \frac{14400}{x^2}.$

Dit antwoord vonden we ook bij de vorige opgave.

4 **a.** $f(x) = (1+\sqrt{x}) \cdot (1+\sqrt{x})$, dus $f'(x) =$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+\sqrt{x}) + (1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (1+\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$

b. $f(x) = 1 + 2\sqrt{x} + x$, dus $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$

5 **a.** Vermenigvuldig van $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ beide leden met $x^2 + 1$.

b. $f'(x) \cdot (x^2+1) = 4 - f(x) \cdot 2x$. Deel linker- en rechterlid door x^2+1 en je krijgt het gevraagde.
c. Vermenigvuldig teller en noemer met x^2+1 en vervang $f(x)$ door $\frac{4x}{x^2+1}$ en vereenvoudig vervolgens de teller.

6 **a.** Vermenigvuldig van $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ beide leden met $n(x)$. Differentieer het linkerlid vervolgens met de productregel.
b. $f'(x) \cdot n(x) + f(x) \cdot n'(x) = t'(x) \rightarrow$
$f'(x) \cdot n(x) = t'(x) - f(x) \cdot n'(x) \rightarrow f'(x) = \frac{t'(x) - f(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$.
c. Vermenigvuldig teller en noemer met $n(x)$ en vervang $f(x)$ door $\frac{t(x)}{n(x)}$ en vereenvoudig vervolgens de teller.

7 $f_1'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

$f_2'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

$f_3'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x-1)^2}$

$f_4'(x) = \frac{0 \cdot (x^3+3x) - 1 \cdot (3x^2+3)}{(x^3+3x)^2} = \frac{-3x^2-3}{(x^3+3x)^2}$

$f_5'(x) = \frac{10 \cdot (x+2)^2 - 10x \cdot (2x+4)}{(x+2)^4}$

$f_6'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

8 **a.** $y' = \frac{-40(x+2)}{(3+(x+2)^2)^2} = 0$ als $x = -2$. En $y(-2) = 6\frac{2}{3}$.
b. y is maximaal als $3 + (x+2)^2$ minimaal is, dus als $x+2 = 0$, dus als $x = -2$. En $y(-2) = 6\frac{2}{3}$.

9 Op 1 km afstand.

10 **a.** In 60 seconden rijdt de file 60v meter en elke auto heeft k+v meter nodig.
b. 42
c. 29,25
d. $N'(v) = \frac{270}{(4{,}5+v)^2}$ is altijd positief. Dus hoe groter v, des te groter is N. N nadert bij toenemende v steeds dichter tot 60.
e. De auto's moeten zo hard mogelijk rijden.

f. In 1 minuut rijdt de file 60v meter en elke auto heeft $k + \frac{v^2}{2a}$ meter nodig.

g. $N(v) = \frac{60v}{4{,}5 + 0{,}1v^2} \rightarrow N'(v) = \frac{-6v^2 + 270}{(4{,}5 + 0{,}1v^2)^2} \rightarrow N'(v) = 0$ als v = 6,7 (m/s). Dus N is maximaal bij een snelheid van 24 km/uur.

Paragraaf 3 De kettingregel

1 **a.** $y'(x) = 15x^2 \cdot (x^3 + 1)^4$

b. $y'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot (3\sqrt{x} + 5)$

c. $y'(x) = \frac{24}{(7 - 2x)^5}$

d. $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x$

e. $y'(x) = 7 \cdot (3 + \sqrt{x})^6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f. $y'(x) = 5 \cdot (3 + x^3)^4 \cdot 3x^2$

g. $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$

2 **a.** 90

b. $B' = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$; $B'(13\frac{1}{2}) = 500 \cdot (31)^{-\frac{1}{2}} = 89{,}8$

c. $G(14) - G(13) \approx 350$

d. $G'(13{,}5) = \frac{-30}{B(13{,}5)^2} \cdot B'(13{,}5) = \frac{-30}{7750000} \cdot 89{,}8 \approx$ $-0{,}000348 \text{ km}^2 \rightarrow$ afname van 348 m^2

3 $y_1' = 5 \cdot (3 + \sqrt{x})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\rightarrow y_1'(1) = 320$

$y_2' = 1 \cdot (3 + \sqrt{x})^5 + x \cdot 5 \cdot (3 + \sqrt{x})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\rightarrow y_2'(1) = 1344$

$y_3' = \frac{5(3 + \sqrt{x})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x - (3 + \sqrt{x})^5 \cdot 1}{x^2}$ $\rightarrow y_3'(1) = -704$

$y_4' = 5x^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3 + x^5}}$ $\rightarrow y_4'(1) = 1\frac{1}{4}$

$y_5' = 1 \cdot \sqrt{3 + x^5} + x \cdot 5x^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3 + x^5}}$ $\rightarrow y_5'(1) = 3\frac{1}{4}$

$$y_6' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3+x^5}} \cdot 5x^4 \cdot x - \sqrt{3+x^5} \cdot 1}{x^2} \qquad \rightarrow y_6'(1) = -\tfrac{3}{4}$$

4 **a.** Driehoek PRT is gelijkvormig met driehoek PQS.

b. $PR = (1 + \frac{1}{x}) \cdot \sqrt{x^2+9}$

c. 5,41 meter

5 **a.** $y'(x) = \dfrac{6 \cdot (2x^2+5) - (6x-3) \cdot 4x}{(2x^2+5)^2} = \dfrac{-12x^2+12x+30}{(2x^2+5)^2}$.

b. $y'(x) = 6 \cdot \dfrac{1}{2x^2+5} + (6x-3) \cdot \dfrac{-1}{(2x^2+5)^2} \cdot 4x$

c. Het antwoord van **b** kan worden herschreven tot:

$$6 \cdot \frac{1}{2x^2+5} \cdot \frac{2x^2+5}{2x^2+5} + (6x-3) \cdot \frac{-1}{(2x^2+5)^2} \cdot 4x =$$

$$\frac{6 \cdot (2x^2+5)}{(2x^2+5)^2} + \frac{-1 \cdot (6x-3) \cdot 4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{6 \cdot (2x^2+5) - (6x-3) \cdot 4x}{(2x^2+5)^2}$$

En dit is precies het linkerdeel van het antwoord van **a**.

6 **a.** $y'(x) = t'(x) \cdot \dfrac{1}{n(x)} + t(x) \cdot \dfrac{-1}{(n(x))^2} \cdot n'(x)$.

b. Het antwoord van **a** kan worden herschreven tot:

$$\frac{t'(x)}{n(x)} \cdot \frac{n(x)}{n(x)} + \frac{-1 \cdot t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}.$$

En dit is precies de quotiëntregel.

Paragraaf 4 De somformules

1 Nee.

2 **b.** $(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2})$

3 **a.** $(\frac{1}{2}\pi, 2)$; π

4 (2, 3), (-3, 6)

5 1; $\sqrt{3}$

6 a. $\vec{q} = (\cos(\frac{1}{2}\pi + \beta), \sin(\frac{1}{2}\pi + \beta))$; $\vec{v} = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$
b. Volgt uit **(10)** en **(11)**.
c. $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)) =$
$\cos\alpha \cdot (\cos\beta, \sin\beta) + \sin\alpha \cdot (-\sin\beta, \cos\beta) =$
$(\cos\alpha \cdot \cos\beta, \cos\alpha \cdot \sin\beta) + (\sin\alpha \cdot -\sin\beta, \sin\alpha \cdot \cos\beta) =$
$(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta, \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta)$

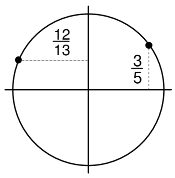
7 a. $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = \sin x \cdot \cos\frac{1}{4}\pi + \cos x \cdot \sin\frac{1}{4}\pi =$
$\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x$
b. Vermenigvuldig beide kanten uit **a** met $\sqrt{2}$.

8 Substitueer $-\beta$ voor β in **(12)**.
Dan krijg je: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos -\beta - \sin\alpha \cdot \sin -\beta =$
$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$, vanwege **(1)** en **(2)**.

Substitueer $-\beta$ voor β in **(13)**.
Dan krijg je: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos -\beta + \cos\alpha \cdot \sin -\beta =$
$\sin\alpha \cdot \cos\beta + -\cos\alpha \cdot \sin\beta$, vanwege **(1)** en **(2)**.

9 Als je π voor β substitueert in **(13)**, dan krijg je **(3)**.
Als je π voor β substitueert in **(14)**, dan krijg je **(4)**.
Als je $\frac{1}{2}\pi$ voor α en α voor β substitueert in **(15)**, krijg je **(7)**.
Als je $\frac{1}{2}\pi$ voor α en α voor β substitueert in **(14)**, krijg je **(8)**.
Als je α voor β substitueert in **(14)**, krijg je **(9)**.

10 a.



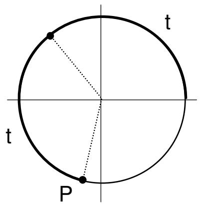
b. $\cos\alpha = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$; $\sin\beta = \sqrt{1 - (\frac{12}{13})^2} = \frac{5}{13}$
c. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot -\frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{16}{65}$
$\cos(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \cdot -\frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{33}{65}$

11 a. Vul x in voor α en voor β in **(13)**, dan krijg je **(16)**.
Vul x in voor α en voor β in **(12)**, dan krijg je **(17)**.
b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + 1$;
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

12 a. $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x = 1 - \sin(\frac{1}{2}\pi - 2x) = 1 + \sin(2x - \frac{1}{2}\pi)$,
dus bijvoorbeeld $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $d = \frac{1}{2}\pi$ of $a = 1$, $b = 1$,
$c = 2$ en $d = -\frac{1}{2}\pi$ $(+ k \cdot 2\pi)$.
b. $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x = 1 + \sin(\frac{1}{2}\pi - 2x)$, dus $a = 1$, $b = 1$,
$c = -2$ en $d = \frac{1}{2}\pi$ $(+ k \cdot 2\pi)$.
Er zijn weer meer mogelijkheden.

13 $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x{\cdot}\cos x =$
$1 + \sin 2x$, volgens **(9)** en **(16)**.

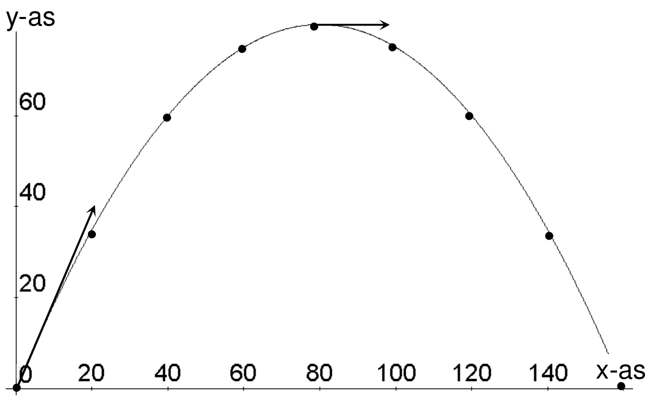
14 a. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, dus $\cos t = -0{,}6$



b. De positie is P.
c. $x_P = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = -0{,}28$ en
$y_P = \sin 2t = 2\sin t{\cdot}\cos t = -0{,}96$.

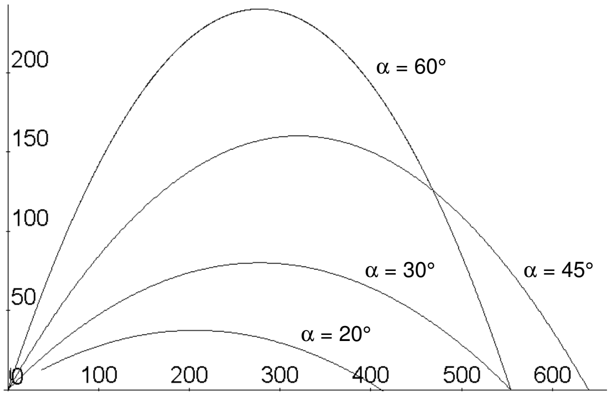
15 a. $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\cos\beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.
b. $\sin\gamma = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$ volgens **(5)**,
en $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}{\cdot}\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}{\cdot}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

16



b. $v_x = 20$; $v_y = 40 - 10t$; op $t = 0$ is $\vec{v} = (20, 40)$, dus hoek =
2nd tan $\frac{40}{20} \approx 63{,}4°$ en snelheid $= \sqrt{20^2 + 40^2} = 20\sqrt{5}$.
c. Dan is $v_y = 0$, dus $t = 4$, dit geeft het punt $(80, 80)$; snelheidsvector $= (20, 0)$.
d. $40t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = 8$, dus 8 sec; $x(8) = 160$; 160 m.
e. $\vec{v}(8) = (20, -40)$, dus de snelheid is $20\sqrt{5}$.

17 a.



b. $80T \cdot \sin\alpha - 5T^2 = 0 \Leftrightarrow T = 0$ of $T = 16 \cdot \sin\alpha$, dus $T = 16 \cdot \sin\alpha$.

c. $A = x(T) = 80T \cdot \cos\alpha = 80 \cdot 16 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 640 \cdot \sin 2\alpha$ volgens **(16)**.

$640 \cdot \sin 2\alpha$ is maximaal als $\sin 2\alpha$ maximaal is; dit is het geval als $\sin 2\alpha = 1$, dus als $\alpha = 45°$.

Paragraaf 5 Lissajousfiguren

1 **c.** 2π , π

d. Een hoogste punt krijg je als $\sin 2t = 1 \Leftrightarrow 2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.

$x(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$ en $x(1\frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{2}$, dus $(\sqrt{2},1)$ en $(-\sqrt{2},1)$ zijn de hoogste punten.

Een laagste punt krijg je als $\sin 2t = -1 \Leftrightarrow 2t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.

De laagste punten zijn: $(-\sqrt{2},-1)$ en $(\sqrt{2},-1)$.

e. $(-2\sin t, 2\cos 2t)$.

f. In de hoogste en de laagste punten is de y-component van de snelheidsvector 0.

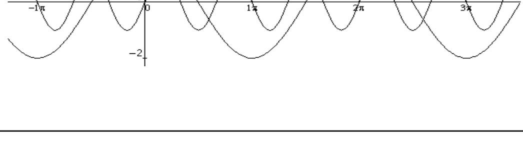
g. Uiterst links als $2\cos t = -2 \Leftrightarrow t = \pi$. Dit geeft het punt $(-2,0)$. Uiterst rechts als $2\cos t = 2 \Leftrightarrow t = 0$ of 2π. Dit geeft het punt $(2,0)$.

De x-component van de snelheidsvector is 0.

h. Dan geldt: $\cos t = 0$ en $\sin 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$. De snelheidsvector heeft dan lengte $2\sqrt{2}$. De snelheid is dan maximaal omdat de x- en de y-component van de snelheidsvector dan tegelijkertijd maximaal of minimaal zijn.

2 **a.** Amplitude van $f = 2$; amplitude van $g = 1$

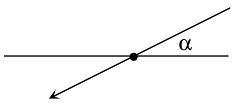
b.



c. $f(t) = 2\cos t$ (of $2\sin(t - 1\frac{1}{2}\pi)$); $g(t) = \sin 3t$

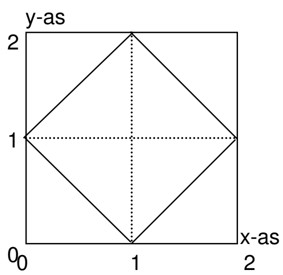
3 **a.** $(8t - 2t^3, 3t^2 - 3)$
b. $3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = \text{-}1$; $t = 1$ geeft het punt $(3\frac{1}{2},\text{-}2)$ en $t = \text{-}1$ geeft het punt $(3\frac{1}{2},2)$.
c. $8t - 2t^3 = 0 \Leftrightarrow \text{-}2t(t2 - 4) = 0 \Leftrightarrow t = 0, \text{-}2, 2$.
$t = \text{-}2$ geeft (8,-2) ; $t = 0$ geeft (0,0) en $t = 2$ geeft: (8,2).
d. De baan is symmetrisch in de x-as.
e. Met x-as: (0,0) , $(7\frac{1}{2},0)$; met y-as: $(0,10\sqrt{2})$, $(0,10\sqrt{2})$.

4 **a.** $x = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = 2$. De snijpunten met de y-as zijn (0,0) en (0,8).
$y = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = \text{-}2$. De snijpunten met de x-as zijn (0,0) en (8,0).
b. De snelheidsvector is $(2t - 2, 2t + 2)$.
In het laagste punt is y minimaal $\Rightarrow y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \text{-}1$, dus (3,-1) is het laagste punt.
In het meest linkse punt is x minimaal $\Rightarrow x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$, dus (-1,3) is het meest linkse punt.
c. Als (x,y) op de baan, dan ook (y,x) (ze worden op tegengestelde tijdstippen bereikt). Dus de baan is symmetrisch in de lijn $y = x$.
d. Als (x,y) voldoet, dan ook (y,x) want: $x + y = y + x$ en $(x - y)^2 = (y - x)^2$.



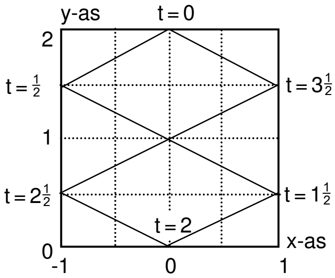
e. Dat gebeurt op $t = \text{-}2$, de snelheidsvector is (-6,-2). Als α de hellingshoek is, dan is $\tan\alpha = \frac{-2}{-6}$, dus $\alpha \approx 18°$.
f. $v = \sqrt{8t^2 + 8}$; v is minimaal als $t = 0$. Op $t = 0$ is de buiging het sterkst.

5 **a.**



6 **a.** 5 keer ; zie b.

b.

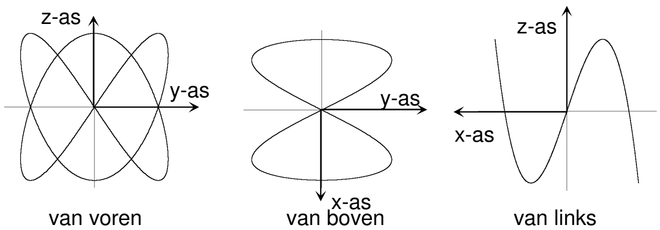


7 **a.** Hoogste punt als y maximaal $\Rightarrow \sin 2t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}\pi$ of $t = 1\frac{1}{4}\pi$. Dit geeft de punten $(\frac{1}{2}\sqrt{2},1)$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2},1)$.
Laagste punt als y minimaal $\Rightarrow \sin 2t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}\pi$ of $t = 1\frac{3}{4}\pi$. Dit geeft de punten $(\frac{1}{2}\sqrt{2},-1)$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2},-1)$.
b. Dan $\sin 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ 1\frac{1}{2}\pi,\ 2\pi$. Dit geeft de punten (0,0), (1,0), (0,0), (-1,0) en (0,0).
c. Dan moet $\sin^2 2t = 1 - (1 - 2\sin^2 t) \Leftrightarrow$ (verdubbelingsformule **17**) $\Leftrightarrow \sin^2 2t = (1 - \cos^2 2t)) \Leftrightarrow$
$\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$ en dit is formule **9** (Pythagoras).
d. y^2 is maximaal 1 als $1 - 2x^2 = 0$, dus als $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

8 **a.** De y-coördinaat is 4 keer maximaal en 4 keer minimaal op $[0,2\pi]$, dus 4 periodes op $[0,2\pi]$.
De x-coördinaat is 3 keer maximaal en 3 keer minimaal op $[0,2\pi]$, dus 3 periodes op $[0,2\pi]$.
b. $(x,y) = (\sin 3t, \sin 4t)$

9 **b.** $y = 1 - 2x^2$

10 **a.** (1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (1,-1,-1), (-1,1,1) (-1,-1,1), (-1,1,-1), (-1,-1,-1)
b.



van voren | van boven | van links

c. $t = \frac{1}{6}\pi : (\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3},1)$; $t = \frac{5}{6}\pi : (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3},1)$; $t = 1\frac{1}{2}\pi : (-1,0,1)$

Paragraaf 6 Tangens

1 **a.** A is het punt (1,0).

De helling van lijn OP = $\dfrac{y_Q}{OA} = \dfrac{y_Q}{1} = \tan t$.

b. Als $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, met k geheel, want dan snijdt lijn OP de lijn $x = 1$ niet meer.

c. De helling van lijn OP $= \dfrac{y_P}{x_P} = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

2 **a.** Teken op de lijn $x = 1$ het punt met y-coördinaat -3. De lijn door de oorsprong en dit punt snijdt de cirkel in de gevraagde punten.
inv tan $-3 \approx -1{,}25$
(0,32 , -0,95) , (-0,32 , 0,95)
b. De tijdstippen $t = -1{,}25 + k \cdot \pi$, met k geheel tussen -7 en 7, dus $t = -4{,}39$, -1,25, 1,89, 5,03

3 **a.** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$
b. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$

4 **a.** Zie het plaatje bij opgave 1: A is het punt (1,0) en B de projectie van P op de y-as. Dan Δ BPO ~ Δ AOQ, dus:
$$\frac{OP}{BP} = \frac{OQ}{AO} \Leftrightarrow \frac{1}{|\cos t|} = \frac{OQ}{1}.$$
Omdat het over de lengte van OQ gaat, en die is positief of nul.
b. Stelling van Pythagoras in driehoek AQO.
c. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow$ (delen door $\cos^2 t$)
$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$$

5 **b.** Als $t < \frac{1}{2}\pi$ en t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, dan wordt de richtingscoëfficiënt van lijn OP willekeurig groot; als $t > \frac{1}{2}\pi$ en t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, dan wordt de richtingscoëfficiënt van lijn OP willekeurig klein (negatief). Vandaar een verticale asymptoot $x = \frac{1}{2}\pi$. Zo ook $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ met k geheel.
c. Als t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, nadert de noemer $\cos t$ tot 0 en de teller $\sin t$ tot 1 .

6 **a.** $\tan(x + \pi) = \dfrac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
b. Tangens is periodiek met periode π.

7 **a.** $\tan a - \tan b = \dfrac{\sin a}{\cos a} - \dfrac{\sin b}{\cos b} = \dfrac{\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}$
$= \dfrac{\sin(a - b)}{\cos a \cdot \cos b}$, volgens formule **15.**
b. Neem $a = x + \Delta x$ en $b = x$ in **a**, dan krijg je:
$\tan(x + \Delta x) - \tan x = \dfrac{\sin(\Delta x)}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}$, dus:

$$\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}.$$

Als $\Delta x \to 0$, dan $\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\to 1$, dus $\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}\to$ $\frac{1}{\cos x\cdot\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}$.

8 $\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

9 **a.** $y'=\frac{2\tan x}{\cos^2 x}$ b. $y'=\frac{1}{2\sqrt{\tan x}\cdot\cos^2 x}$

c. $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ d. $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

10 **a.** $\tan^2 x=1 \Leftrightarrow \tan x=1$ of $\tan x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\pi$ of $x=-\frac{1}{4}\pi$, De snijpunten zijn dus $(\frac{1}{4}\pi,1)$ en $(-\frac{1}{4}\pi,1)$.

b. $f'(x)=\frac{2\tan x}{\cos^2 x}$, dus $f'(\frac{1}{4}\pi)=\frac{2\cdot 1}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}=4$

en $f'(-\frac{1}{4}\pi)=\frac{2\cdot -1}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{-2}{\left(\frac{1}{2}\right)}=-4$.

c. De raaklijn in $(\frac{1}{4}\pi,1)$ heeft vergelijking $y=4x-\pi+1$ en de raaklijn in $(-\frac{1}{4}\pi,1)$ heeft vergelijking $y=-4x-\pi+1$.
Deze raaklijnen snijden elkaar in het punt $(0,-\pi+1)$.

11 **a.** $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1$ en $f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ met k geheel.

b. Voor k geheel is $f(k\pi)=-k\pi$, dus de buigpunten zijn: $(k\pi,-k\pi)$; deze liggen op de lijn $y=-x$.

c. Voor k geheel is $f'(k\pi)=\frac{1}{(\pm 1)^2}-1=0$, dus de raaklijnen in de punten $(k\pi,-k\pi)$ zijn alle horizontaal.

Paragraaf 7 Het getal e

1 **a.** Een rechte lijn; een hyperbool
b. $y_1'=\frac{1}{2}$, $y_2'=-1/x^2$

2 **a.** Een parabool; de grafiek van en exponentiële functie

b. $y_3' = 2x$

3 **a.** y_3' is negatief op de negatieve getallen en positief op de positieve getallen.
b. y_4' is overal positief en stijgend.

4 Volgens Annekes formule is $y_4'(0) = 0$, maar dat kan niet want de functie y_4 is overal stijgend.

5 **c.** De grafieken zien er herzelfde uit; de grafiek van Y_2 loopt alleen wat minder steil dan die van Y_1.
d. De grafiek van Y_2/Y_1 is een horizontale lijn.
e. 0,69

6 **a.** 1,10
b. -0,69

7 **a.** $y = 1{,}38x - 0{,}62$

8 **a.** Door in plaats van 0,001 een kleinere waarde te nemen, bijvoorbeeld 0,0001.
b. $2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$
c. De factor 2^5 wordt buiten haakjes gehaald.
d. De factor 2^5 wordt voor het quotiënt gebracht, volgens $\frac{a \cdot b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$.

9 **a.** $y'(-3) = \frac{1}{8} \cdot y'(0)$
b. $y'(x) = 2^x \cdot y'(0)$
c. $c_2 = y'(0)$

10 **a.** 0,693387...
b. 0,693171...
c. De laatste.

11 $c_3 \approx 1{,}098...$, $c_{\frac{1}{2}} \approx -0{,}693...$

12 **a.** Tussen $2\frac{1}{2}$ en 3.
b. 2,72

13 **a.** Beide kanten worden met 0,001 vermenigvuldigd.
Aan beide kanten wordt 1 opgeteld.
Beide kanten worden tot de macht 1000 verheven.
b. 2,71692...
c. 2,71814...
d. 2,71826...

14 **a.** $(1{,}5)^2 = 2{,}25$ keer
b. $(1{,}25)^4 \approx 2{,}44$ keer

c. $(1{,}1)^{10} \approx 2{,}59$ keer
d. $(1{,}01)^{100} \approx 2{,}70$ keer
e. Als we het jaar in 10000 periodes hakken van 0,0001 jaar, wordt het kapitaal $(1{,}0001)^{10000}$ keer zo groot en dat is precies de benadering van e die in opgave **13b** is gevonden.

16 $y' = 2 \cdot e^x$ $\quad$ $y' = -e^x$
$y' = e^x$ $\quad$ $y' = \frac{1}{2} \cdot e^x$

17 $y' = 2 \cdot e^{2x}$ $\quad$ $y' = 2x \cdot e^{x^2}$
$y' = e^{2+x}$ $\quad$ $y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$
$y' = -2 \cdot e^{5-2x}$ $\quad$ $y' = e^x \cdot \cos(e^x)$

18 b. Als $x = 1$, dan zijn de y-waarden gelijk: $e^1 = e \cdot 1$ en zijn de y'-waarden gelijk, namelijk allebei e.

19 a. QR = 1
b. Richtingscoëfficiënt PR $= e^x = \frac{PQ}{RQ} = \frac{e^x}{RQ} \rightarrow RQ = 1$

20 $y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$ $\quad$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^x + \sqrt{x} \cdot e^x$
$y' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x$ $\quad$ $y' = \cos x \cdot e^{x^2} + 2x \cdot \sin x \cdot e^{x^2}$

21 a. $e^{10} \approx 22026$
b. $\frac{dD}{dt} = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}2t+10}$; op $t = 0$ geeft dit $-0{,}2 \cdot e^{10} \approx -4405$.
c. Aan het minteken: als t groter wordt, wordt $-0{,}2t+10$ kleiner, dus wordt dan ook D kleiner.
d. $D = 0$

22 a. $e^{-0{,}1t}$; hoe groter t, des te kleiner dit getal.
b. $u' = -0{,}4\, e^{-0{,}1t} \cdot \sin t + 4\, e^{-0{,}1t} \cdot \cos t$
c. $u'(1{,}47) \approx 0$ en $u'(4{,}61) \approx 0$.
d. $1{,}47 + 2\pi \approx 7{,}75$ en $4{,}61 + 2\pi \approx 10{,}89$
e. $4\, e^{-0{,}1 \cdot 60} \approx 0{,}009915$; omdat $-1 \le \sin t \le 1$, ligt u tussen $-0{,}009915$ en $0{,}009915$ als $t \ge 60$.

Paragraaf 8 De natuurlijke logaritme

1 a. $p > 0$ en q kan alle waarden aannemen.
b. 0 $\quad$ $\frac{1}{2}$
1 $\quad$ -1
3 $\quad$ -3

2 a. Door spiegeling in de lijn $x = y$.

b. De positieve getallen ; alle getallen.

3 2,9 uur

4 **a.** Die is $1/0{,}69 \approx 1{,}45$
b. In (4,2) is de helling ongeveer 0,36.
c. In $(\frac{1}{2},-1)$ is de helling ongeveer 2,86.

5 **a.** Afnemende stijging
b. y ' is positief en dalend.

6 **b.** De positieve getallen ; alle getallen

7

0	$\frac{1}{2}$
1	-1
3	-3

8 **a.** Het enige verschil is dat grondtal 2 is vervangen door grondtal e.
b. 4,605... ; klopt.

9 **b.** y_2 is het omgekeerde van x ; $y_2 = 1/x$.

10 **a.** $e^{\ln 3} = 3$
b. $\frac{1}{3}$

11 **a.** $\frac{1}{2}$
b. 1
c. 1/x

12 **a.** 1
b. $\frac{d}{du} e^u = e^u = x$
c. $\frac{du}{dx} \cdot x = 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 1/x$

13 **a.** $y = \frac{1}{e}x$
b. $y = \frac{1}{5}x - 1 + \ln 5$

14

$y' = 1/x$	$y' = -1/x$
$y' = 2/x$	$y' = \frac{1}{2} \cdot 1/x$

15

$y' = 1/x$	$y' = 1/(2+x)$
$y' = 2/x$	$y' = \ln x \cdot 2/x$

16

$y' = 2 + 3/x$	$y' = -\ln x / x^2 + 1/x^2$
$y' = \ln x + 1$	$y' = 2x \cdot \ln x + x$

17 **a.** $L = 102{,}3 - 4{,}3 \cdot \ln 80a - 0{,}03a$. Als a toeneemt, nemen $4{,}3 \cdot \ln 80a$ en 0,03a beide toe en neemt L dus af.
b. $L = 86{,}5 - 4{,}3 \cdot \ln 100v + 0{,}16v$.

L' = -4,3/v + 0,16 = 0 als v = 26, 875. Met de grafiek blijkt dat L dan inderdaad minimaal is.
c. L' = -4,3/v + 0,16 hangt niet af van a. De waarde van v waarvoor L' = 0 (en L minimaal is) hangt dus ook niet af van a.

Paragraaf 9 Bij andere grondtallen

1 **a.** $(2^a)^b = 2^{a \cdot b}$
b. $8^x = 4^{1\frac{1}{2} \cdot x}$.
c. Vul in: $(\frac{1}{4})^x = 2^{-2 \cdot x}$.

2 **a.** Horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ (ten opzichte van de y-as).
b. Horizontale vermenigvuldiging met factor $-\frac{1}{2}$ (ten opzichte van de y-as).

3 **b.** $3^{{}^3\log 2 \cdot x} = (3^{{}^3\log 2})^x = 2^x$.
c. Horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{{}^3\log 2}$ (ten opzichte van de y-as).

4 **a.** $e^{\ln 2 \cdot x} = (e^{\ln 2})^x = 2^x$.
b. Horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{\ln 2}$ (ten opzichte van de y-as).

5 **a.** $e^{\ln g \cdot x} = (e^{\ln g})^x = g^x$.
b. Horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{\ln g}$ (ten opzichte van de y-as).

6 **a.** 504
b. 9,2 km
c. $L = 1015 \cdot 2^{-0,20 \cdot h}$
d. $L = 1015 \cdot 10^{-0,06 \cdot h}$
e. $L = 1015 \cdot 0,87^h$

7 **a.** $e^u = e^{\ln 2 \cdot x} = (e^{\ln 2})^x = 2^x = y$
b. $\ln 2$, e^u
c. $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = \ln 2 \cdot e^u = \ln 2 \cdot 2^x$
d. $c_2 = 0,6931471806$
8 **a.** $\ln 10 \cdot 10^x \approx 2,3 \cdot 10^x$
b. $\ln \frac{1}{e} \cdot (1/e)^x = -(1/e)^x$
c. $\ln e \cdot e^x = e^x$

9 **a.** $\ln 2 \cdot 2^2 = \ln 2 \cdot 4 = \ln 2^4 = \ln 16$
b. $\ln \sqrt{2}$

10 a. ${}^{4}\log x = \dfrac{{}^{2}\log x}{{}^{2}\log 4} = \dfrac{{}^{2}\log x}{2} = \frac{1}{2} \cdot {}^{2}\log x$

c. ${}^{8}\log x = \frac{1}{3} \cdot {}^{2}\log x$

d. ${}^{\frac{1}{2}}\log x = -1 \cdot {}^{2}\log x$

11 a. Verticale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ (ten opzichte van de x-as).

b. Verticale vermenigvuldiging met achtereenvolgens de factoren $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ en -1 (ten opzichte van de x-as).

12 a. ${}^{2}\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

b. Verticale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{\ln 2}$ (ten opzichte van de x-as).

13 $\frac{1}{\ln 2} \cdot 1/x$

14 a. $\frac{1}{\ln 10} \cdot 1/x \approx 1{,}44 \cdot 1/x$

b. $\frac{1}{\ln 1/e} \cdot 1/x = -1/x$

c. $\frac{1}{\ln e} \cdot 1/x \approx 1/x$

15 a. $50 - 7{,}2 \cdot \ln 790 = 1{,}961$ km ≈ 1960 meter.

b. $50 - 7{,}2 \cdot \ln 950 = 0{,}633$ km ≈ 635 meter.

c. $50 - 7{,}2 \cdot \ln 900 = 1{,}023$ km ≈ 1020 meter.

d. $h = 50 - 4{,}99 \cdot {}^{2}\log L$

e. $h = 50 - 16{,}58 \cdot \log L$

f. $h = 50 - {}^{1,15}\log L$

g. $h = 50 - 7{,}2 \cdot \ln L \rightarrow \ln L = 6{,}944 - 0{,}14h \rightarrow$
$L = 1037 \cdot e^{-0{,}14 \cdot h}$; klopt redelijk.

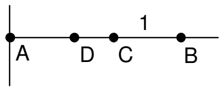
Paragraaf 10 Gemengde opgaven

1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\ln a \cdot x}$. Als $x = 1$, dan $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\ln a}$. Als $a > 1$, ligt P onder de x-as. De rc van de raaklijn is dan $OP / 1 = 3 / 1 = 3$. Dus $\dfrac{1}{\ln a} = 3$. Dus $a = e^{\frac{1}{3}}$. Als $p < 1$, ligt P boven de x-as. De rc van de raaklijn is dan -3. Dan $\dfrac{1}{\ln a} = -3$. Dus $a = e^{-\frac{1}{3}}$.

2 a. $f'(x) = 2^x + 2^x \cdot \ln 2 \cdot x = 2^x(1 + \ln 2 \cdot x)$; $f'(x) = 0$ levert $x = -\frac{1}{\ln 2}$.

b. $p \cdot 2^p = (p+2) \cdot 2^{p+2} \rightarrow p = (p+2) \cdot 2^2 \rightarrow p = 4p + 8 \rightarrow p = -\frac{3}{8}$.

3 **a.** $g(x) = 2^{2x} = f(2x)$, dus horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{2}$ (ten opzichte van de y-as).
$h(x) = 2^{3x} = f(3x)$, dus horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ (ten opzichte van de y-as).



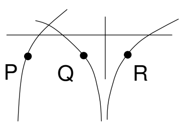
b. Uit **a** volgt $AC = \frac{1}{2}AB$ en $AD = \frac{1}{3}AB$. $\rightarrow$ $AD = \frac{2}{3}$ en $CD = \frac{1}{3}$.
c. $P = (p, 2^p)$; $f'(p) = \ln 2 \cdot 2^p$. Er geldt $\frac{f(p)}{p} = \ln 2 \cdot 2^p$ $\rightarrow$
$\frac{2^p}{p} = \ln 2 \cdot 2^p \rightarrow p = \frac{1}{\ln 2} = {}^2\log e$.

4 **a.** $f(x) = 0 \rightarrow \ln x(\ln x - 2) = 0 \rightarrow x = 1$ of $x = e^2$.
b. $f'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2\ln x - 2}{x}$; $f'(x) = 0 \rightarrow x = e$; top: (e, -1).
c. $f''(x) = \frac{4 - 2\ln x}{x^2}$; $f''(x) = 0 \rightarrow x = e^2 \rightarrow$ buigpunt: $(e^2, 0)$.
$f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$, dus buigraaklijn: $y = \frac{2}{e^2}x + b$; $(e^2, 0)$ ligt op de lijn $\rightarrow b = -2 \rightarrow$ buigraaklijn: $y = \frac{2}{e^2}x - 2$.
d. $f(x) = 3 \rightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0 \rightarrow (\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0 \rightarrow$ $x = e^3$ of $x = e^{-1}$.

5 A(x) is de afstand in het kwadraat van punt (x, f(x)) tot O.
$A(x) = x^2 + 4e^{-2x^2}$. A(x) minimaal $\rightarrow A'(x) = 0 \rightarrow$
$2x - 16x \cdot e^{-2x^2} = 0 \rightarrow 2x(1 - 8e^{-2x^2}) = 0 \rightarrow x = 0$ of $e^{-2x^2} = \frac{1}{8}$.
$x = 0$ voldoet niet $\rightarrow$ $e^{-2x^2} = \frac{1}{8} \rightarrow 2x^2 = \ln 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\ln 8}$.

6 **a.** $2e^{x+1} = e^{x+1+\ln 2}$
b. $f(x) = 0 \rightarrow e^{2x} = e^{x+1+\ln 2} \rightarrow 2x = x + 1 + \ln 2 \rightarrow x = 1 + \ln 2$.
c. $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x+1}$; $f'(x) = 0 \rightarrow e^{2x} = e^{x+1} \rightarrow 2x = x + 1 \rightarrow$ $x = 1$; $f(1) = e^2 - 2e^2 = -e^2$.
d. $f''(x) = 4e^{2x} - 2e^{x+1}$; $f''(x) = 0 \rightarrow 2e^{2x} = e^{x+1} \rightarrow$
$e^{2x+\ln 2} = e^{x+1} \rightarrow 2x + \ln 2 = x + 1 \rightarrow x = 1 - \ln 2$.

7 **a.** Voor $x < 0$ geldt $g(x) = \ln(-x)$; $g'(x) = -1 \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$ $\rightarrow$
$g'(-1) = -1 \rightarrow$ vergelijking raaklijn: $y = -x - 1$.
b. $P = (p, 0)$. $f(p) = 0 \rightarrow \ln(2p + 4) = 0 \rightarrow 2p + 4 = 1 \rightarrow p = -1\frac{1}{2}$.
$f'(x) = \frac{1}{x+2}$ $\rightarrow f'(-1\frac{1}{2}) = 2 \rightarrow$ raaklijn gaat door $(-1\frac{1}{2}, 0)$,
dus vergelijking is $y = 2x + 3$.
c. $R = (r, g(r)) \rightarrow Q = (-r, g(-r))$, $P = (-3r, f(-3r))$.

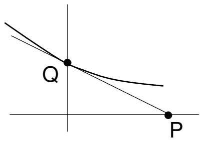


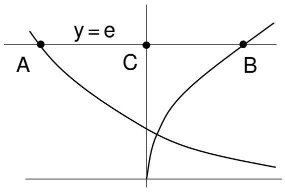
Er geldt $f(-3r) = g(r)$ $\rightarrow$ $\ln(-6r + 4) = \ln r$ $\rightarrow$ $-6r + 4 = r$ $\rightarrow$ $r = \frac{4}{7}$ $\rightarrow a = g(r) = \ln\frac{4}{7}$.

8 **a.** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$; $f'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{x}$ en $x \neq 0 \rightarrow x = 1$.

$f(1) = 2$. De extreme waarde is 2.

b. $f''(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-\sqrt{x}+2}{2x^2}$; $f''(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 2 \rightarrow x = 4$.
Buigpunt: $(4, 4 - \ln 4)$; $f'(4) = \frac{1}{4} \rightarrow$ vergelijking buigraaklijn: $y = \frac{1}{4}x + 3 - \ln 4$.





9 a. $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$; $f'(0) = -\frac{1}{2} \rightarrow \dfrac{OQ}{OP} = \frac{1}{2}$; $OQ = 1 \rightarrow OP = 2 \rightarrow$ opp. $\Delta OPQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.
b. $A = (a, f(a)) \rightarrow f(a) = e \rightarrow a = -2$; $B = (b, f(b))$; $a = -2 \rightarrow b = 2$; $g(2) = e \rightarrow p\sqrt{2} = e \rightarrow p = e/\sqrt{2}$.

10 a. Het gemiddelde van f(x) en g(x) is $1 \rightarrow f(x) + g(x) = 2 \rightarrow g(x) = 2 - f(x) = 2 - (\ln x)^2$.
b. Snijpunt links van de lijn: $B = (b, f(b))$; dan $f(a) = f(b) \rightarrow (\ln a)^2 = (\ln b)^2 \rightarrow \ln b = -\ln a = \ln \frac{1}{a} \rightarrow b = \frac{1}{a}$.
c. $a - \frac{1}{a} = 4\frac{4}{5} \rightarrow a^2 - 4\frac{4}{5}a - 1 = 0$
$\rightarrow (a-5)(a+\frac{1}{5}) = 0 \rightarrow a = 5$ (want a ligt rechts van 1).