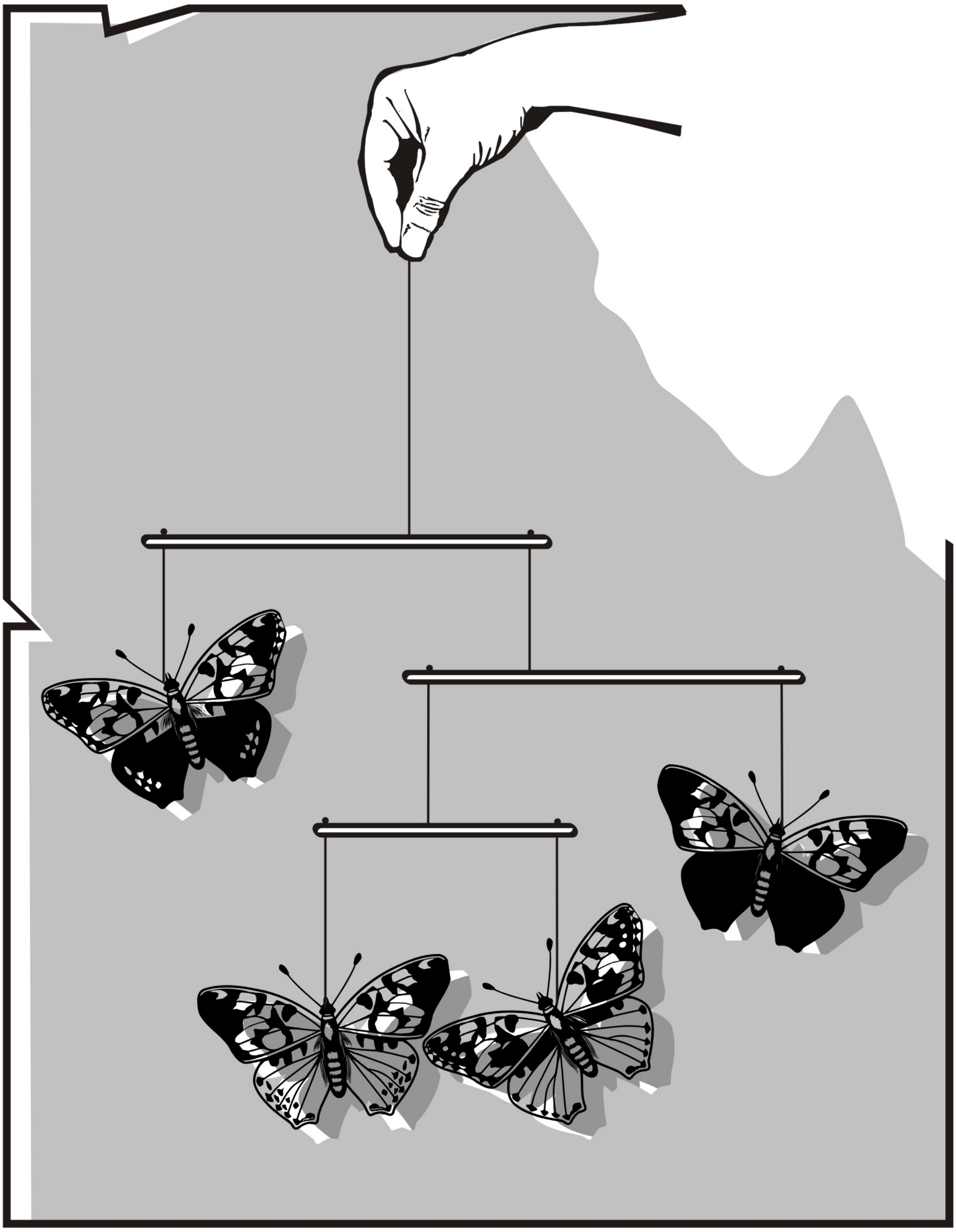


wiskunde D
Zwaartepunten

Inhoudsopgave

Zwaartepunten

experimentele uitgave, jan 2009

Colofon

Auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

Illustraties Wilson Design, Uden

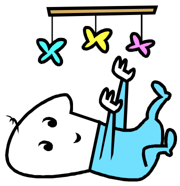
Distributie Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

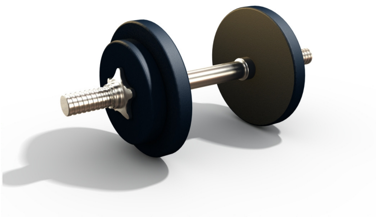
ISBN

Homepage www.wageningse-methode.nl

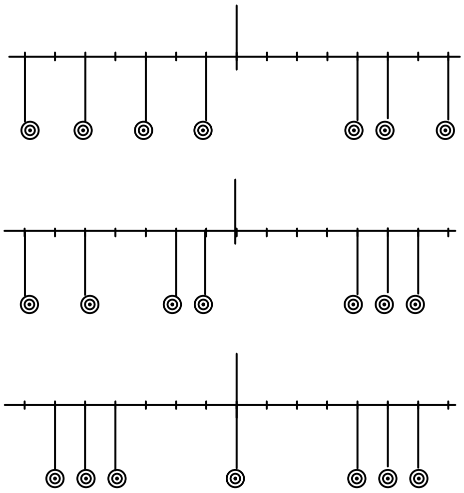
1 Op zoek naar evenwicht

Iemand heeft zeven blokken op elkaar gestapeld. De stapel helt gevaarlijk naar rechts over. Maar hij valt niet om! Hoe dat te begrijpen is, daar gaat deze paragraaf over.





1 Het mobiel hieronder is in evenwicht. De zeven massa's zijn allemaal even groot. De tweede situatie krijg je door twee van de massa's in tegengestelde richting te verplaatsen. De derde situatie krijg je door daarna twee massa's tegengesteld aan elkaar te verplaatsen over dezelfde afstand en dat daarna nog eens te doen. In de derde situatie zie je goed dat het mobiel inderdaad in evenwicht is.



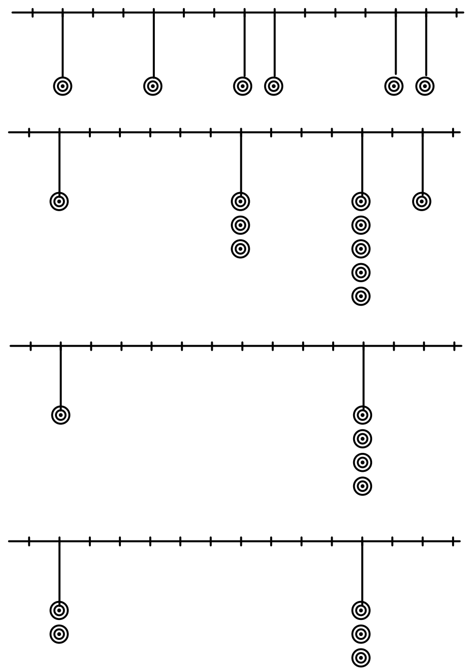
Ga deze twee verplaatsingen na.

Schuifprincipe
Het evenwicht wordt niet verstoord als je twee massa's tegengesteld aan elkaar verplaatst:
→ ← of ← →

Het schuifprincipe is ons uitgangspunt. Als je een balans tot je beschikking hebt, kun je experimenteel vaststellen dat dit juist is. Uitgaande van dit natuurkundige principe, gaan we wiskundig redeneren.

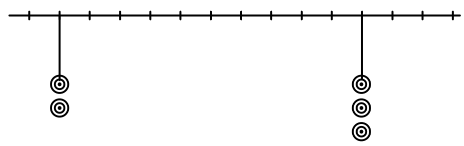
De lengte van de ophangtouwtjes is niet van belang.

* **2** Zoek uit waar je de mobielen moet ophangen opdat zij in evenwicht zijn. De mobielen staan ook op het werkblad.



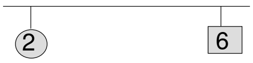
In plaats van één massa 2 eenheden te verplaatsen, kun je ook twee massa's 1 eenheid verplaatsen (in dezelfde richting).

In het laatste mobiel van de vorige opgave was de afstand tussen de linker en de rechter massa's 10.



We verplaatsen elk van de linker massa's 3 plaatsen naar rechts en elk van de drie rechter massa's 2 plaatsen naar links. Dan houden we evenwicht. Doen we dat nog een keer dan hangen alle vijf de massa's op dezelfde plaats. Die plaats verdeelt de oorspronkelijke afstand in stukken die zich verhouden als 6 : 4.

Het punt waar de staaf met massa's moet worden opgehangen om de staaf in evenwicht te krijgen, noemen we het **zwaartepunt** of **massamiddelpunt** van de staaf met massa's.

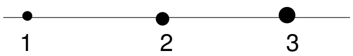


3 **a.** Aan een massaloze staaf hangen twee massa's van grootte 2 en 6.
Waar moet de staaf worden opgehangen opdat hij in evenwicht is?
b. Aan een massaloze staaf hangen twee massa's van grootte *a* en *b*.
Waar moet de staaf moet worden opgehangen opdat hij in evenwicht is?

In *A* en *B* bevinden zich twee massa's van grootte *a* en *b*.
Het zwaartepunt *Z* van de twee massa's ligt op lijnstuk *AB*, zodat *AZ* : *BZ* = *b* : *a*.

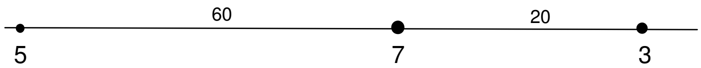
4 Aan een massaloze staaf hangen twee massa's van grootte 3 en 7.
Bepaal de plaats van het zwaartepunt *Z* op twee manieren:
a. door te schuiven
b. door bovenstaande stelling toe te passen.

Nu we weten hoe we het zwaartepunt van twee massa's kunnen bepalen, gaan we een systeem van drie massa's op één lijn aanpakken.

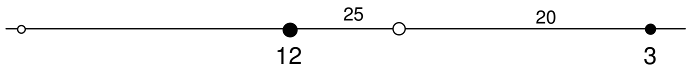


5 Aan een massaloze staaf hangen drie massa's van grootte 1, 2 en 3 op onderling gelijke afstanden, en in deze volgorde.
a. Waar ligt het zwaartepunt?
b. En waar als je de massa's 2 en 3 van plaats verwisselt?

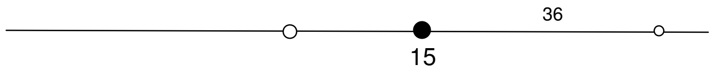
Bij drie massa's kun je er eerst twee samennemen, en vervolgens het resultaat van die twee combineren met het derde massa. Bijvoorbeeld:



Het zwaartepunt van 5 en 7 ligt op afstand 25 van 7. Dus vervangen we de situatie door:



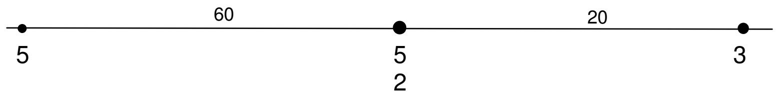
Vervolgens bepalen we het zwaartepunt van 12 en 3, die een onderlinge afstand 65 hebben:



We vinden het zwaartepunt van de oorspronkelijke drie massa's op afstand 36 van het rechter massa.

6 **a.** Ga na dat je dezelfde plek vindt als je begint met de massa's 3 en 5 samen te nemen.
b. Ook als je begint met de massa's 7 en 3 samen te nemen.

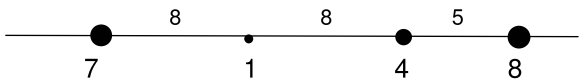
Het kan nog anders. Splits de massa van 7 in twee massa's van 5 en 2:



c. Neem nu de twee massa's van 5 samen en de massa's van 2 en 3. Vind je weer hetzelfde zwaartepunt?

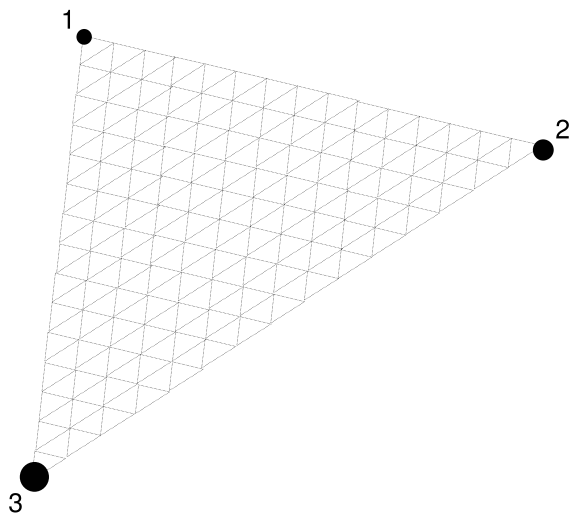
Bij elk aantal massa's op een lijn vind je altijd hetzelfde eindpunt, hoe je ook de tweetallen kiest je die je achtereenvolgens samenneemt. Dat betekent dat je terecht kunt spreken van *het* zwaartepunt. Verderop zul je – met behulp van vectoren - begrijpen waarom je altijd hetzelfde eindpunt vindt.

7 Bepaal het zwaartepunt van:



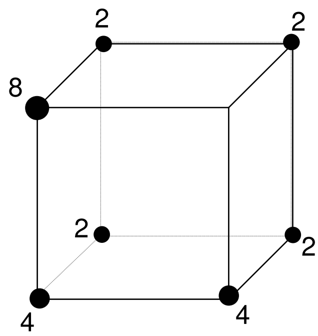
Hoe gaat het als de massa's niet op één lijn liggen? Ook dan verschuiven we massa's naar elkaar toe, tot dat alles in een "centrum" samenklontert: als dat punt weer altijd hetzelfde is, mag dat *het* zwaartepunt heten.

* **8** We bekijken een voorbeeld met drie massa's: 1, 2 en 3.



Voor het gemak hebben we een driehoekjesrooster aangebracht, waarbij de afstanden tussen een tweetal massa's verdeeld is in 15'en.
a. Bepaal op het werkblad het zwaartepunt door eerst de massa's 2 en 3 samen te nemen.
b. Ook door eerst 1 en 2 samen te nemen.
c. En door eerst 1 en 3 samen te nemen.

In de ruimte gaan we op net zo'n manier te werk.



9 In de hoekpunten van een kubus bevinden zich de massa's 0, 2, 2, 2, 2, 4, 4 en 8, zoals in de figuur hiernaast. Bepaal het zwaartepunt op twee manieren. Als het goed is vind je twee keer hetzelfde punt.

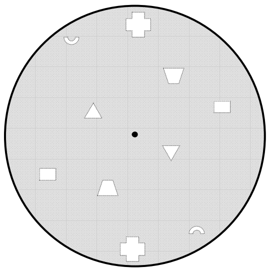
De volgende bewering zal je niet verbazen.

Het zwaartepunt van een homogene bol is zijn middelpunt.

Onder *homogeen* verstaan we dat de bol "overal hetzelfde is". Preciezer: Als je twee congruente delen neemt van de bol (bijvoorbeeld twee kubusjes), dan zijn die even zwaar. Zie ook de volgende paragraaf, bladzijde 28.

De bewering is van groot belang. Hij zegt dat we de massa van een homogene bol als in zijn middelpunt geconcentreerd mogen denken. Zo kunnen we doen alsof bijvoorbeeld de aarde een *puntmassa* is. (Weliswaar is de aarde beslist niet perfect homogeen, maar wel bij benadering.)

Je zult het wel niet nodig vinden, maar we gaan toch beredeneren dat het zwaartepunt van een homogene bol zijn middelpunt is.



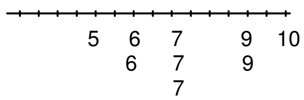
Verdeel de homogene bol in heel veel, heel kleine stukjes, die symmetrisch ten opzichte van het middelpunt liggen. We passen het schuifprincipe toe. Twee stukjes die symmetrisch ten opzichte van het middelpunt liggen verplaatsen we beide naar het middelpunt: dat is over twee tegengestelde vectoren. Daardoor verandert het zwaartepunt van de bol niet van plaats. Op die manier doorgaand verplaatsen we alle stukjes naar het middelpunt; dáár ligt dus het zwaartepunt.

* **10** We bekijken het systeem van Aarde en Maan. Aarde heeft massa $5{,}975 \cdot 10^{24}$ kg en Maan $7{,}343 \cdot 10^{22}$ kg. De straal van Aarde is 6371 km en de straal van Maan is 1738 km. Hieronder staat een plaatje op schaal. Voor de afstand Aarde-Maan is 100 mm gekozen. In werkelijkheid is die 384400 km (tussen de middelpunten van Aarde en Maan).

Waar ligt het zwaartepunt? Wat valt je op?

11 Het komt voor dat Saturnus, Jupiter en Zon nagenoeg op een lijn liggen. Voor die situatie gaan we het zwaartepunt van het systeem bestaande uit deze drie bepalen.

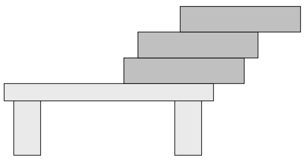
Saturnus heeft massa 568,5 · 10^{24} kg, Jupiter 1900 · 10^{24} kg en Zon 1978 · 10^{27} kg.
De stralen van Saturnus, Jupiter en Zon zijn respectievelijk 115000 km, 138000 en 696500 km
Saturnus staat 1427 · 10^{6} km van de Zon en Jupiter 778 · 10^{6} km, gemeten vanaf hun middelpunten.
Ligt het zwaartepunt van deze drie binnen Zon?



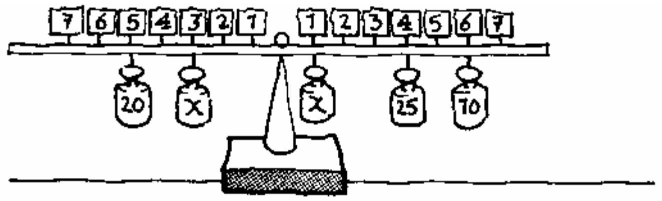
12 Anneke heeft achtereenvolgens de volgende cijfers voor wiskunde gehaald: 7, 6, 5, 9, 9, 10, 6, 7, 7.
Ze heeft de cijfers uitgezet op de getallenlijn.
Bepaal haar gemiddelde wiskundecijfer.

Merk de analogie op tussen het gemiddelde cijfer en het zwaartepunt.

* **13** Op een tafel liggen drie gelijke blokken. Ze steken gedeeltelijk over de tafelrand. Het zwaartepunt van elk van de blokken veronderstellen we in hun midden. Als het zwaartepunt van de drie blokken tezamen maar boven het tafelblad ligt, ligt de stapel stabiel, anders kantelt hij van tafel.
Blijft deze stapel liggen? De figuur staat groter op het werkblad.
Hoe ver kun jij een stapel blokken laten overhellen, zonder dat de stapel omvalt? Op internet kun je je talenten testen:
http://www.angelfire.com/bc3/mechanica/Applets/Hfdst3/Zwaartepunt.htm



14 Hoe groot is x als de balans in evenwicht is?



Balansen in evenwicht brengen kan op:
http://www.walter-fendt.de/ph11nl/lever_nl.htm

2 Het belang van het zwaartepunt

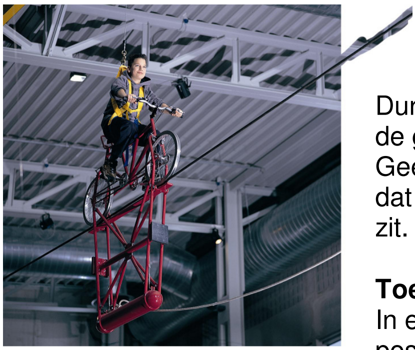
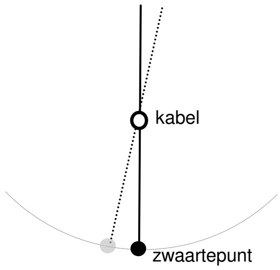


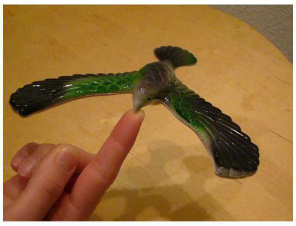
Foto: Technopolis®, het Vlaamse doe-centrum voor wetenschap en technologie

Durf jij over een stalen kabel te fietsen, vijf meter boven de grond?
Geen probleem in Technopolis te Mechelen. De truc is dat het zwaartepunt van fiets-met-fietser onder de kabel zit.

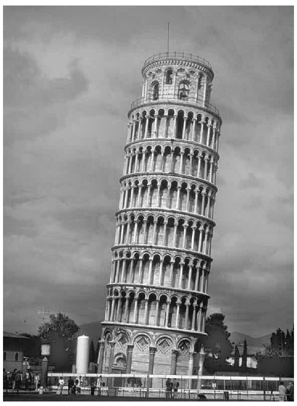
Toelichting
In een stabiele situatie is het zwaartepunt in zijn laagste positie. Bekijk de dwarsdoorsnede hieronder.



Als de fiets vanuit de verticale (veilige) stand naar links of rechts zou bewegen, gaat het zwaartepunt omhoog. De aarde zal het zwaartepunt onmiddellijk terugtrekken naar het laagste punt.



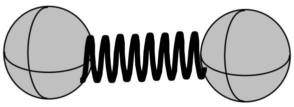
15 De arend steunt met zijn snavel op de punt van een vinger. Hij kan best tegen een stootje: hij komt steeds weer in de toestand van de foto terug, tenminste …. als de stoot niet te heftig is.
Waar ongeveer vermoed jij het zwaartepunt van de arend?



16 De scheve toren van Pisa is 55 meter hoog en heeft een diameter van 15 meter. Hij staat 5 à 6 graden uit het lood. Hij mag nog wel wat schever zakken voordat hij omvalt. Dat gebeurt namelijk pas als zijn zwaartepunt buiten de voet van de toren valt.
Veronderstel dat het zwaartepunt van de toren in zijn middelpunt zit.
Hoeveel graden uit het lood mag de toren dan hoogstens staan om niet om te vallen.

17 Een (nog ongeopende) wijnfles steekt in een standaard. Het geheel is stabiel.
Kun je dat verklaren?

Het zwaartepunt wordt ook wel **massamiddelpunt** genoemd; in het Engels: centre of mass. Voor veel berekeningen kun je doen alsof alle massa van het object in dat punt geconcentreerd is (en dus kun je de afmetingen van het object vergeten). Als we bijvoorbeeld over de snelheid van een object spreken, dan bedoelen we de snelheid waarmee het zwaartepunt van dat object beweegt. Binnen het object zelf kan er van alles bewegen of het object kan om zijn as draaien; dat doet er niet toe.
In de mechanica passen we de wetten van Newton toe op de zwaartepunten van de objecten.



18 Aan weerszijden van een veer bevinden zich twee massa's. We drukken de massa's naar elkaar toe, zodat de veer gespannen wordt.
Wat gebeurt er met het zwaartepunt als we de massa's loslaten?

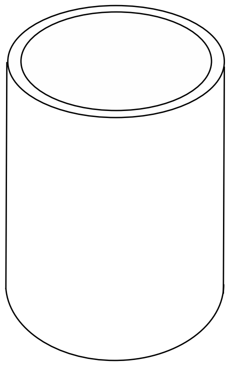
19 Een raket explodeert kort na de start; de brokstukken vliegen alle kanten op.
Wat kun je zeggen van de beweging van het zwaartepunt?

In paragraaf 3 hebben we uitgelegd dat het zwaartepunt van een homogene bol zijn middelpunt is. Precies dezelfde redenering gaat op voor elk puntsymmetrisch lichaam, zoals een balk, een cilinder, een rugbybal, een diabolo, …

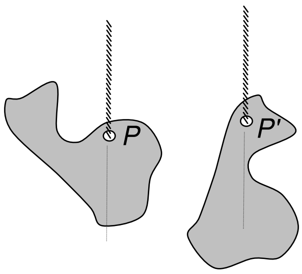
20 Van een massieve kubus is het middelpunt natuurlijk het zwaartepunt. Dat geldt ook voor een holle kubus (waarvan de wanden overal even dik zijn).
Maar hoe zit het met een kubusvormig bakje zonder deksel? Dat heeft dus vijf (even dikke) wanden. Waar zit dan het zwaartepunt?

21 Een limonadeglas glas heeft de vorm van een cilinder. De diameter van het glas is 8 cm en zijn hoogte is 12 cm. Deze maten zijn buitenmaten.
Het glas is overal even dik: 0,5 cm.
De dichtheid van glas is 3 kg/dm^3.
a. Op welke hoogte zit het zwaartepunt?

Het glas wordt tot de rand toe gevuld met water (de dichtheid van water is 1 kg/dm^3).
b. Op welke hoogte zit het zwaartepunt nu?

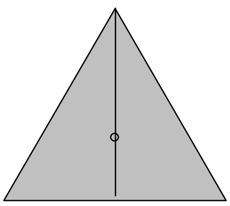


Hoe je in de praktijk het zwaartepunt vindt
Elk voorwerp (plat of ruimtelijk) heeft precies één zwaartepunt *Z*. Maak een touwtje vast in een punt *P* van het voorwerp en hang het ermee op. Het voorwerp gaat zo hangen, dat het zwaartepunt *Z* zo laag mogelijk komt. Dus zó dat *Z* recht onder *P* komt te liggen.
Kies nu een ander punt *P'* om het touwtje aan vast te maken. Hang het voorwerp op en *Z* zal recht onder *P'* komen. We kennen nu twee lijnen waarop *Z* moet liggen.
Waar je het ophangpunt *P* ook kiest. Het verlengde van het touwtje gaat altijd door *Z* !

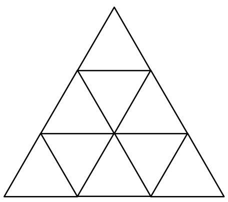


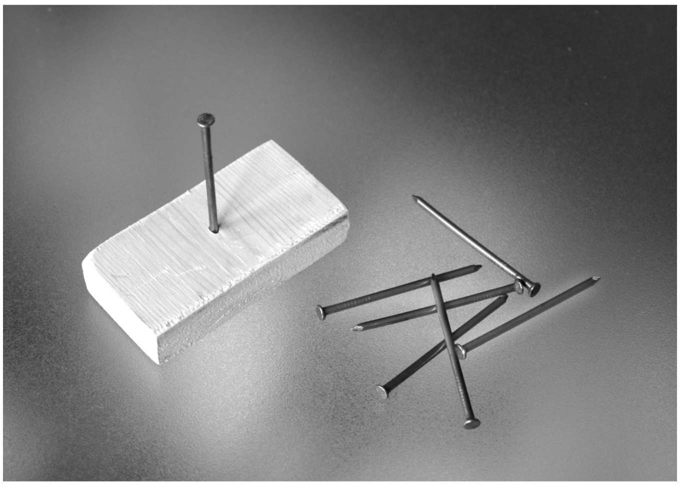
22 We hangen een houten rechthoek van 40 bij 100 cm op aan een touwtje. Het ophangpunt zit 10 cm van twee randen.
Teken hoe de rechthoek gaat hangen.

Homogene puntsymmetrische figuren hebben hun zwaartepunt in het symmetriepunt. Nogal logisch! Dit kun je toepassen op een cirkel en een rechthoek. Maar hoe zit het met een gelijkzijdige driehoek? Het zwaartepunt zit natuurlijk in het "midden", maar waar zit dat precies? Ergens op de hoogtelijn natuurlijk (zie plaatje). Nu hoeven we alleen nog maar de hoogte (boven de basis) te weten. En daar kom je als volgt gemakkelijk achter.
Verdeel de gelijkzijdige driehoek in negen even grote gelijkzijdige driehoeken.



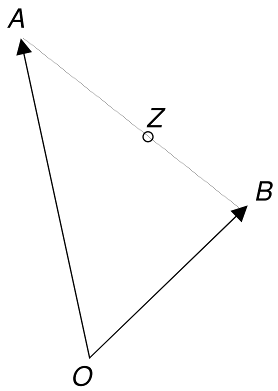
9 Op welke hoogte zit het zwaartepunt? Met andere woorden; wat is de verhouding van de twee stukken waarin het zwaartepunt de hoogtelijn verdeelt?





RAADSEL: Zes spijkers in balans
Je hebt zeven identieke grote spijkers met een duidelijke kop. Sla een spijker in een plankje.
Lukt het je de andere zes spijkers op de kop van die spijker te laten balanceren?

3 Met behulp van vectoren



Waarom vind je altijd hetzelfde eindpunt als je massa's twee aan twee samenneemt? De volgorde je daarbij te werk gaat, doet niet ter zake. Hoe kun je dat begrijpen? Daarover gaat deze paragraaf.

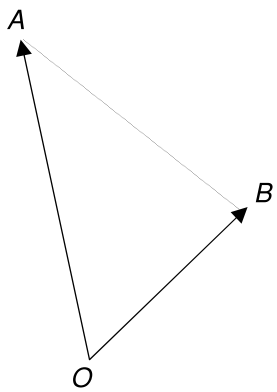
In paragraaf 3 heb je de volgende stelling ontdekt.
In de punten *A* en *B* bevinden zich de massa's *a* en *b*.
Het zwaartepunt *Z* ligt op lijnstuk *AB*, zo dat $ZA : ZB = b : a$.
Met vectoren laat zich dat fraai formuleren.

Stelling
A en *B* bevinden zich de massa's *a* en *b*.
We kiezen een willekeurig punt *O* als oorsprong.
Het zwaartepunt *Z* is het eindpunt van de vector
$\overrightarrow{OZ} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$

Bewijs

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) =$$

$$(1 - \frac{b}{a+b})\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$$



* **24** In de punten *A* en *B* bevinden zich de massa's *a* en *b*.
Geef op het werkblad de plaats van het zwaartepunt aan in de volgende gevallen.
- **a.** $a = 0$ en $b = 6$
- **b.** $a = 1$ en $b = 5$
- **c.** $a = 2$ en $b = 4$
- **d.** $a = 3$ en $b = 3$
- **e.** $a = 4$ en $b = 2$
- **f.** $a = 5$ en $b = 1$
- **g.** $a = 6$ en $b = 0$

Merk op dat de keuze van de oorsprong *O* er niet toe doet.

25 a. Hoe luidt de stelling als we voor *O* het punt *A* kiezen?
b. Hoe luidt de stelling als we voor *O* het punt *Z* kiezen?

26 Gegeven zijn vijf massa's in een vlak (of in de ruimte, of op een lijn): 2, 3, 5, 7 en 10, op de plaatsen A_1, A_2, A_3,

A_4 en A_5. Kies een oorsprong O.
Om het zwaartepunt te vinden kunnen we (bijvoorbeeld) als volgt te werk gaan:

- bepaal het zwaartepunt Z_{12} van de massa's 2 en 3 ,
- bepaal het zwaartepunt Z_{34} van de massa's 5 en 7,
- bepaal het zwaartepunt Z_{345} van het systeem met massa 12 in Z_{34} en massa 10 in A_5,
- bepaal het zwaartepunt Z van het systeem van massa 5 in Z_{12} en massa 22 in Z_{345}.

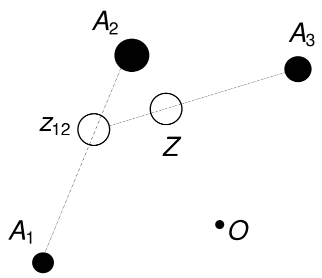
Welke vector $\overrightarrow{OZ}$ vind je, uitgedrukt in $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ en $\overrightarrow{OA_5}$?

$\overrightarrow{OZ}$ is een soort gemiddelde vector van $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ en $\overrightarrow{OA_5}$. Hoe "zwaar" elk van die vectoren in het gemiddelde meetelt, hangt af van de grootte van massa op de betreffende plaats.

We gaan nu het algemene geval bekijken.

Voor drie massa's
Gegeven zijn drie massa's a_1, a_2, a_3 op de plaatsen A_1, A_2, A_3.
We kiezen een willekeurig punt O als oorsprong en berekenen de som van de massa's: $a = a_1+a_2+a_3$.
Dan vinden we het zwaartepunt Z als volgt:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{a}\overrightarrow{OA_3}\ .$$



Bewijs
Stel dat we eerst de massa's a_1 en a_2 samennemen. Die twee kunnen we vervangen door het massa $b = a_1+a_2$ in hun zwaartepunt Z_{12} met

$$\overrightarrow{OZ_{12}} = \frac{a_1}{b}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{b}\overrightarrow{OA_2}\ .$$

Dit gecombineerd met massa a_3 geeft het punt Z met

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{b}{b+a_3}\overrightarrow{OZ_{12}} + \frac{a_3}{b+a_3}\overrightarrow{OA_3} = \frac{b}{b+a_3}\left(\frac{a_1}{b}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{b}\overrightarrow{OA_2}\right) + \frac{a_3}{b+a_3}\overrightarrow{OA_3} = \frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{a}\overrightarrow{OA_3}\ .$$

Omdat in het eindantwoord de drie massa's en de drie plaatsen volkomen symmetrisch voorkomen, is de volgorde waarin de massa's zijn samengenomen kennelijk niet van belang!

Voor vier massa's
Gegeven zijn vier massa's a_1, a_2, a_3, a_4 op de plaatsen A_1, A_2, A_3, A_4 .

We kiezen een willekeurig punt O als oorsprong en berekenen de som van de massa's: $a = a_1+a_2+a_3+a_4$.
Dan vinden we het zwaartepunt Z als volgt:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{a}\overrightarrow{OA_3} + \frac{a_4}{a}\overrightarrow{OA_4} .$$

Bewijs
Eerst nemen we de massa's in A_1, A_2 en A_3 samen. Die kunnen we vervangen door massa $b = a_1+a_2+a_3$ in plaats Z_{123}, waarbij

$$\overrightarrow{OZ_{123}} = \frac{a_1}{b}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{b}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{b}\overrightarrow{OA_3} .$$

Dit nemen we samen met massa a_4 in A_4. Dat geeft ons het zwaartepunt Z, waarvoor:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{b}{a_4+b}\overrightarrow{OZ_{123}} + \frac{a_4}{a_4+b}\overrightarrow{OA_4} =$$

$$\frac{b}{a_4+b}\left(\frac{a_1}{b}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{b}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{b}\overrightarrow{OA_3}\right) + \frac{a_4}{a_4+b}\overrightarrow{OA_4} =$$

$$\frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{a}\overrightarrow{OA_3} + \frac{a_4}{a}\overrightarrow{OA_4} .$$

Weer is het antwoord volkomen symmetrisch in de vier massa's en plaatsen. Kennelijk is de volgorde van samennemen niet van belang.

En zo gaat dat door voor vijf, zes, … massa's. Algemeen vinden we voor elk aantal massa's a_1, a_2, …, a_n. op de plaatsen A_1, A_2, … A_n het zwaartepunt Z als volgt:

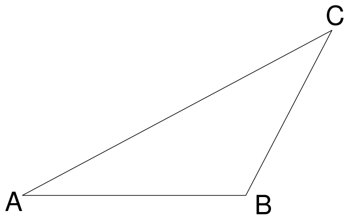
Stelling
De massa's a_1, a_2, …, a_n bevinden zich op de plaatsen A_1, A_2, … A_n . Het zwaartepunt noemen we Z, dan:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \frac{a_n}{a}\overrightarrow{OA_n} .$$

Hierbij is $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

We zien dat $\overrightarrow{OZ}$ een soort gemiddelde vector is van $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, …, $\overrightarrow{OA_n}$. Hierbij bepaalt een massa op een plaats hoe zwaar die plaats meetelt.

Het doet er niet toe in hoeveel dimensies we werken. De punten mogen best op een rechte lijn liggen, maar dat hoeft niet. En als drie punten een driehoek in de ruimte vormen, hoeft de gekozen oorsprong niet in het vlak van de driehoek te liggen. De werkwijze met vectoren is dus algemeen geldig.



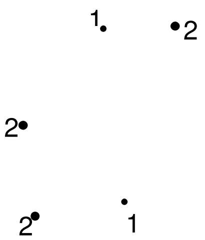
27 Bepaal het zwaartepunt van de massaloze driehoek *ABC* bij de volgende massa's in de hoekpunten:
a. in *A*: 1 , in *B*: 1 , in *C*: 2
b. in *A*: 1 , in *B*: 4 , in *C*: 5
c. in *A*: 1 , in *B*: 1 , in *C*: 1

28 Een *mediaan* van een vierhoek is de verbindingslijn van de middens van twee overstaande zijden.
Op de hoekpunten van een massaloze vierhoek zitten gelijke massa's.
Bewijs dat het zwaartepunt het snijpunt is van de medianen.

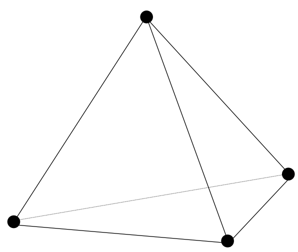
29 Op de hoekpunten van een massaloze vierhoek *ABCD* zitten gelijke massa's.
We bepalen (in gedachten) de zwaartepunten van de driehoeken *ABC*, *ABD*, *ACD* en *BCD*.
Bewijs dat het zwaartepunt van deze vier zwaartepunten hetzelfde is als het zwaartepunt van hele vierhoek.

Opmerking
Het gestelde in opgave **29** is niet juist, als de massa's in *A*, *B*, *C* en *D* verschillend van grootte zijn.

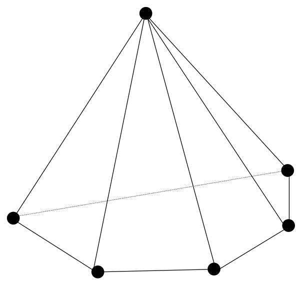
We hebben gezien dat je het zwaartepunt kunt vinden door dat "stukje bij beetje" te doen. En die stukjes mag je zelf kiezen.



* **30** Bepaal op het werkblad het zwaartepunt van de zes massa's hiernaast.

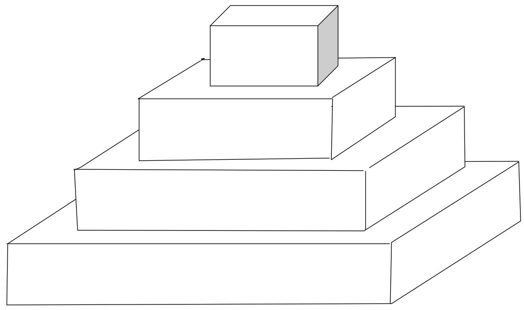


31 In elk hoekpunt van een massaloos viervlak zit eenzelfde massa.
a. Bepaal op het werkblad de plaats van het zwaartepunt.
b. Hoe hoog zit het zwaartepunt boven het grondvlak?



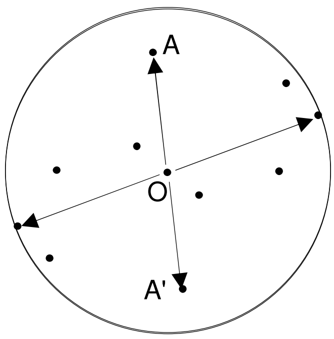
32 In elk van de hoekpunten van een vijfzijdige piramide zit eenzelfde massa.
a. Bepaal de plaats van het zwaartepunt.
b. Hoe hoog zit het zwaartepunt boven het grondvlak?

33 Een trappiramide bestaat uit vier even dikke plakken van 1×1, 2×2, 3×3 en 4×4.

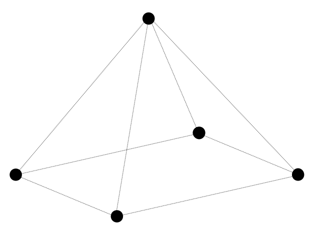


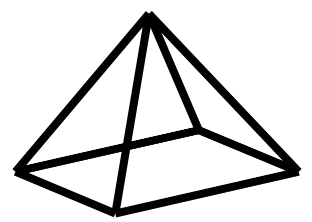
Op welke hoogte zit het zwaartepunt?

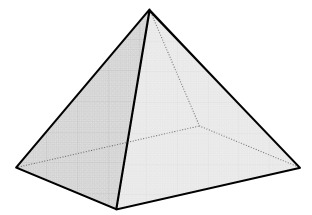
In paragraaf IV hebben we beredeneerd dat het zwaartepunt van een homogene bol in het middelpunt zit. Met vectoren ziet de redenering er als volgt uit.

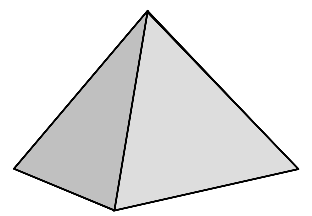


Kies het middelpunt als oorsprong. Verdeel de homogene bol weer in heel veel, heel kleine stukjes, die symmetrisch ten opzichte van het middelpunt liggen. Bij elk stukje *A* hoort een spiegelbeeld *A*'. In *A* en *A*' zitten even grootte massa's. We tellen alle vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA'}$ op. Omdat voor elke stukje A geldt dat $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$, is de som van al die vectoren $\vec{0}$. Dus het zwaartepunt is *O*: het middelpunt van de bol.









34 Vier keer een vierzijdige piramide met ribben van lengte 1. De hoogte van de piramide noemen we h (Met de stelling van Pythagoras vind je dat $h = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.)

De massa's zitten in de hoekpunten, in elk hoekpunt hetzelfde massa (de ribben zijn massaloos).
a. Op welke hoogte boven het grondvlak bevindt zich het zwaartepunt?

In de staafjespiramide zit het massa in de ribben. De acht ribben zijn even zwaar.
b. Op welke hoogte boven het grondvlak bevindt zich het zwaartepunt?

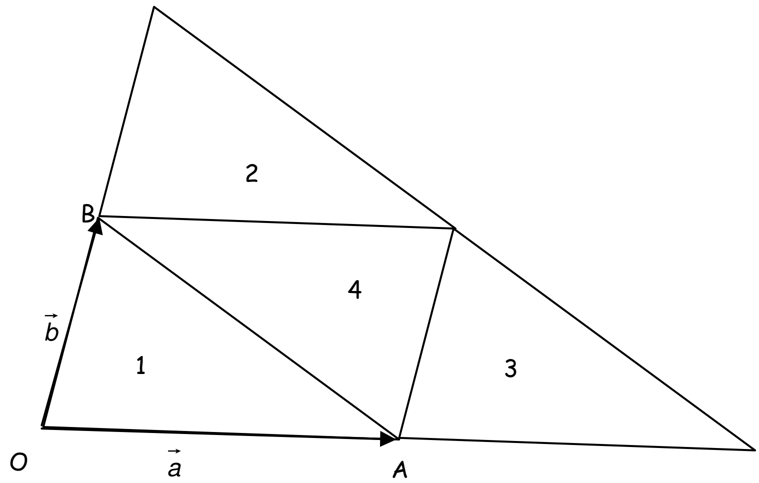
De piramide is nu gesloten: de vijf grensvlakken bestaan uit plaatwerk. Het massa van een grensvlak is dus evenredig met de oppervlakte. Verder is de piramide hol.
c. Op welke hoogte boven het grondvlak bevindt zich het zwaartepunt?

In het vierde geval is de piramide massief. En homogeen. Met integraalrekening kan de plaats van het zwaartepunt bepaald worden. Dat blijkt op hoogte $\frac{1}{4}$ van de hoogte boven het grondvlak te zitten. In de appendix staat een afleiding zonder integreren.

4 Appendix

Het zwaartepunt van een homogene driehoek

We willen het zwaartepunt van driehoek 1 hebben. Leg er nog drie identiek exemplaren bij, zoals hieronder. Kies de oorsprong *O* en de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals in de tekening.



De massa van 1 noemen we 1 en de zwaartepuntsvector van 1 noemen we $\vec{z}$.

Dan zijn de zwaartepuntsvectoren van 2, 3 en 4: $\vec{z}+\vec{b}$, $\vec{z}+\vec{a}$ en $-\vec{z}+\vec{a}+\vec{b}$.

De zwaartepuntsvector van de grote driehoek is $2.\vec{z}$

Er geldt: $2\vec{z} = \frac{1}{4}(\vec{z} + (\vec{z}+\vec{a}) + (\vec{z}+\vec{b}) + (-\vec{z}+\vec{a}+\vec{b})) =$

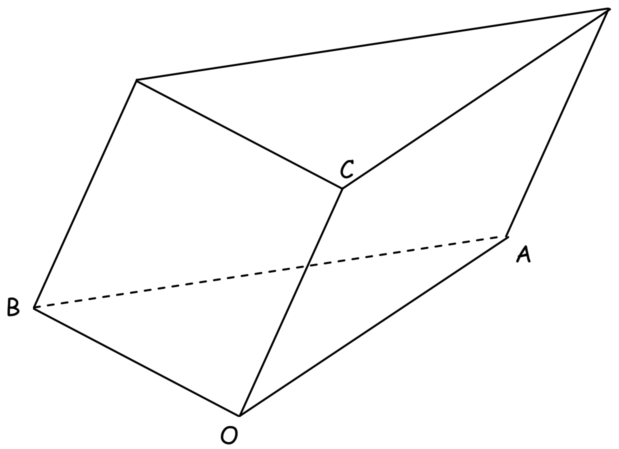
$\frac{1}{2}\vec{z} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Dus $\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Het zwaartepunt van een homogeen driezijdig prisma

We kiezen de oorsprong in een van de hoekpunten van het prisma, zie plaatje

We noteren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ enzovoort met $\vec{a}$, $\vec{b}$ enzovoort.



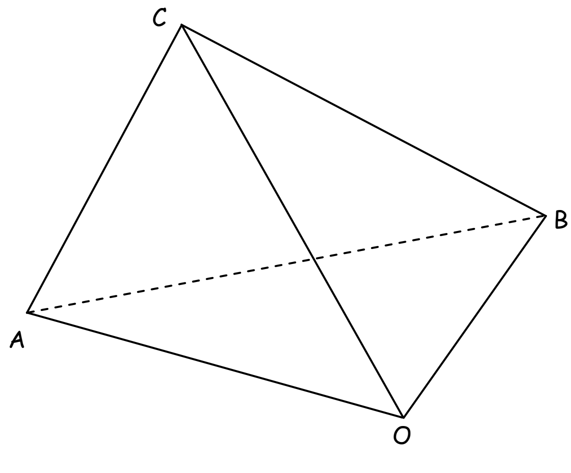
Het zwaartepunt van het prisma noemen we *Z,* dan is:

$\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

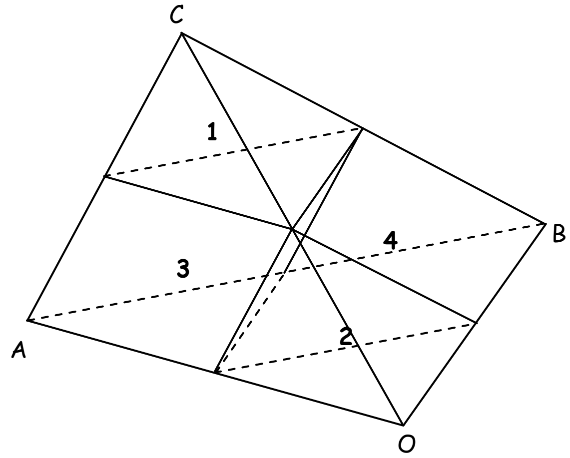
Het zwaartepunt van een homogene driezijdige piramide

De driezijdige piramide wordt door vlakken door de middens van ribben verdeeld in twee kleinere piramides en twee driezijdige prisma's.

We nemen de inhoud van zo'n kleine piramide als inhoudseenheid, dan is de inhoud van de grote piramide 8 en de inhoud van elk van de twee prisma's 3.



We kiezen één van de hoekpunten van de grote piramide als oorsprong. Het zwaartepunt van de piramide noemen we *Z*.
Het zwaartepunt van de kleine piramide met hoekpunt *C* noemen we Z_1, het zwaartepunt van de kleine piramide met hoekpunt *O* noemen we Z_2, het zwaartepunt van het prisma met hoekpunt *A* noemen Z_3 en het zwaartepunt van het prisma met hoekpunt *B* noemen we Z_4.



Er geldt:
$\overrightarrow{z_1} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{z}$,
$\overrightarrow{z_2} = \frac{1}{2}\vec{z}$,
$\overrightarrow{z_3} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$,
$\overrightarrow{z_4} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} =$
$\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$.
Dus
$\vec{z} = \frac{1}{8}\overrightarrow{z_1} + \frac{1}{8}\overrightarrow{z_2} + \frac{3}{8}\overrightarrow{z_3} + \frac{3}{8}\overrightarrow{z_4} = \frac{1}{8}\vec{z} + \frac{7}{32}\vec{a} + \frac{7}{32}\vec{b} + \frac{7}{32}\vec{c}$.
Hieruit volgt dat $\vec{z} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

Met gelijkvormigheid volgt nu dat het zwaartepunt van een homogene driezijdige piramide op hoogte $\frac{1}{4}$ van de hoogte van de piramide boven het grondvlak ligt.

Aangezien elke piramide in driezijdige piramides met dezelfde top kan worden opgedeeld, geldt dit voor elke piramide.

Antwoorden

1 Op zoek naar evenwicht

1 Zelf doen.

2 Eerste: $6\frac{1}{2}$ vanaf de linkse
Tweede: 8 vanaf de linkse
Derde: 8 vanaf de linkse
Vierde: 6 vanaf de linkse

3 **a.** $\frac{3}{4}$ van de afstand vanaf links
b. $\dfrac{b}{a+b}$ van de afstand vanaf links

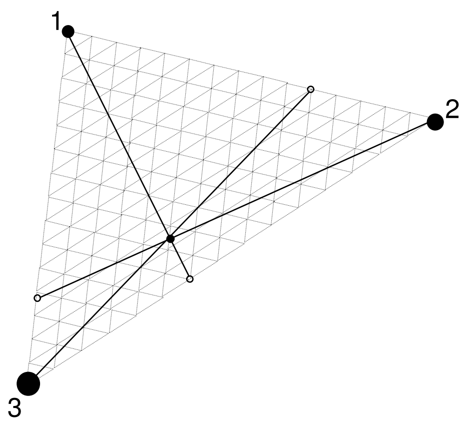
4 $\frac{7}{10}$ van de afstand vanaf links

5 **a.** $1\frac{1}{3}$ vanaf 1
b. $1\frac{1}{6}$ vanaf 1

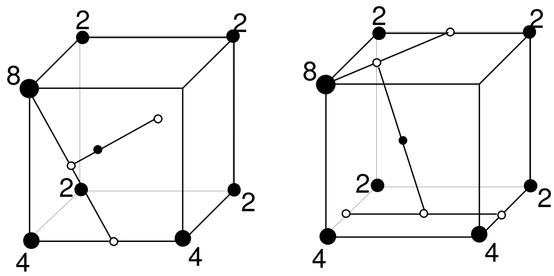
6 **a.** Zelf doen
b. Zelf doen
c. Ja

7 Op afstand 9 van rechts

8



9



10 Zwaartepunt op 4667 km van het middelpunt van de aarde. Dat is onder het aardoppervlak.

11 Zwaartepunt op 1155975 km van middelpunt Zon, dus niet binnen Zon.

12 7,3

13 Ja, het zwaartepunt ligt boven het tafelblad

14 $x = 30$

2 Het belang van het zwaartepunt

15 Loodrecht onder de punt van de snavel

16 invtan $\frac{15}{55} \approx 15°$

17 Het zwaartepunt ligt boven het voetpunt

18 Blijft op zijn plaats

19 Volgt de beweging van de raket voor de explosie

20 Zwaartepunt op de verticale symmetrieas op $\frac{4}{5}$ van de halve hoogte (of 0,4 van de bodem)

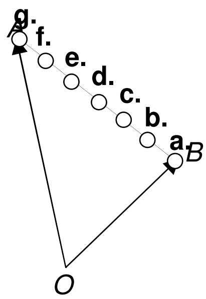
21 **a.** $5\frac{1}{7}$ vanaf de grond
b. 5,76 vanaf de grond

22 Het zwaartepunt (snijpunt van de diagonalen) komt onder het ophangpunt.

23 2 : 1

3 Met behulp van vectoren

24 a.



25 a. $\overrightarrow{AZ} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

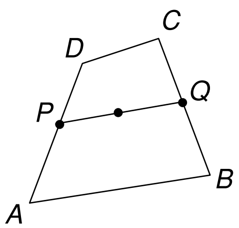
b. $\vec{0} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{ZA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{ZB}$

26 $\overrightarrow{OZ} = \frac{2}{27}\overrightarrow{OA_1} + \frac{3}{27}\overrightarrow{OA_2} + \frac{5}{27}\overrightarrow{OA_3} + \frac{7}{27}\overrightarrow{OA_4} + \frac{10}{27}\overrightarrow{OA_5}$

27 a. Teken $\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

b. Teken $\frac{1}{10}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{10}\overrightarrow{OB} + \frac{5}{10}\overrightarrow{OC}$

c. Teken $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$



28 Noem het midden van AD: P en het midden van BC: Q. het zwaartepunt Z is het midden van PQ.

$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}) +$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OD}$

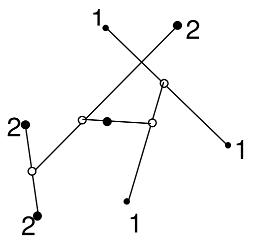
29 Uitschrijven:

$\frac{1}{4}(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}) + \frac{1}{4}(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}) +$

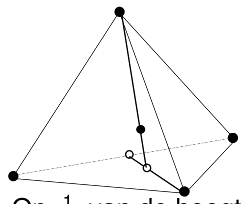
$\frac{1}{4}(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}) + \frac{1}{4}(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}) =$

$\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OD}$

30



31 a.



b. Op $\frac{1}{4}$ van de hoogte

32 b. Op $\frac{1}{5}$ van de hoogte

33 Op hoogte $1\frac{1}{6}$

34 a. $\frac{1}{5}$

b. $\frac{1}{4}$

c. 0,1494