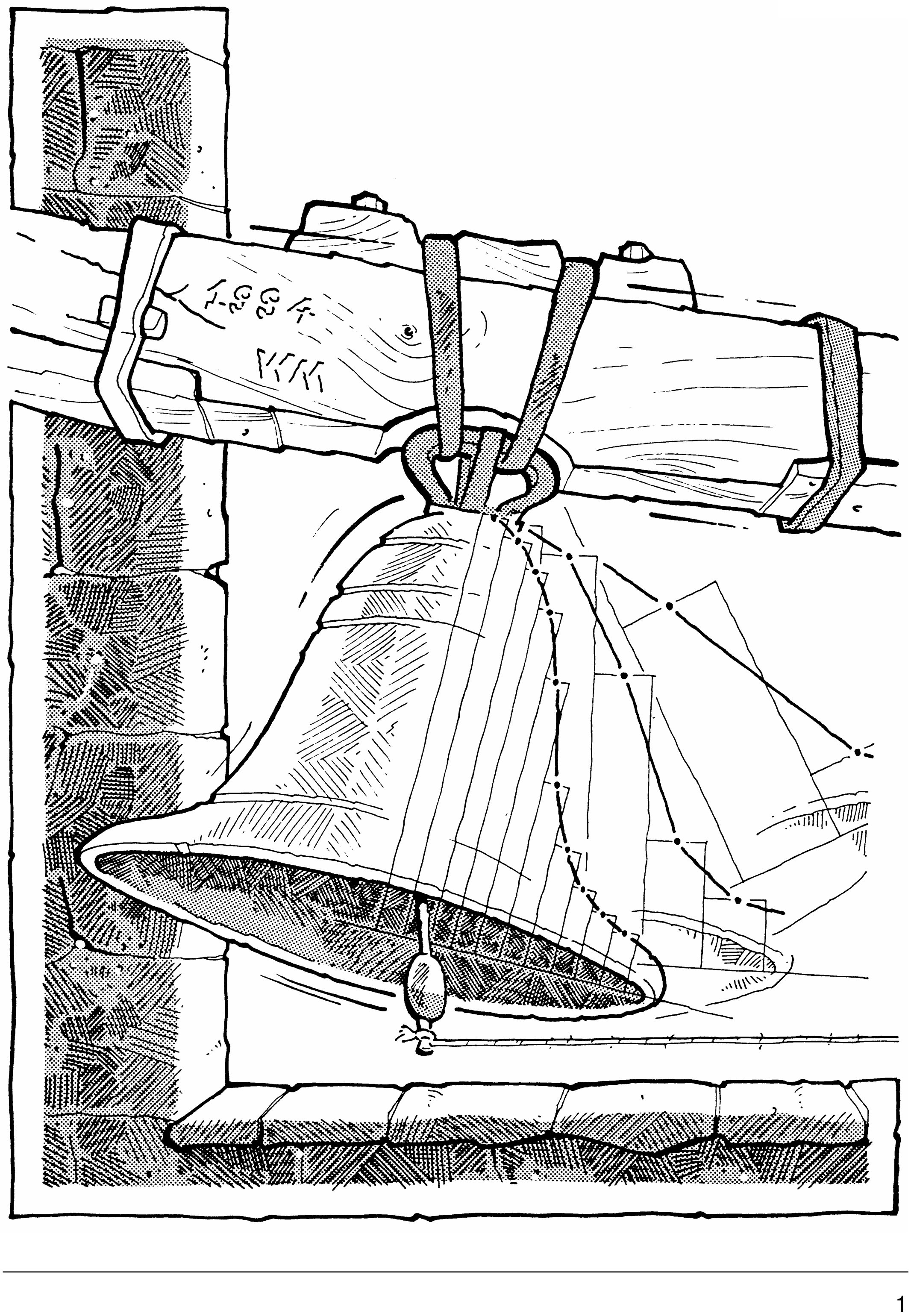
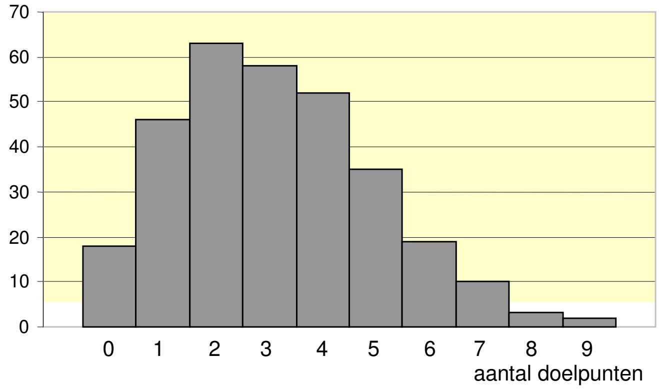
Normale verdeling



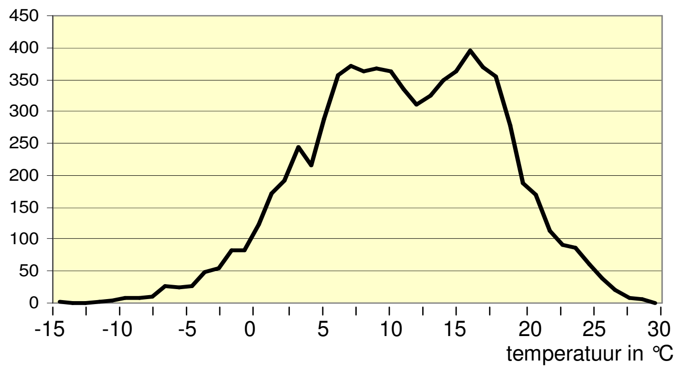
1 Normaal of niet

1 In de eredivisie voetbal worden per seizoen 306 wedstrijden gespeeld. Die zijn als volgt *verdeeld over het aantal doelpunten*.



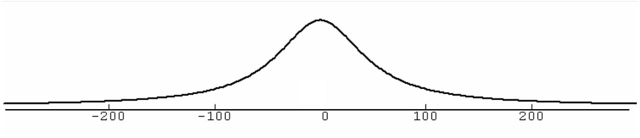
a. In hoeveel procent van de wedstrijden werd niet gescoord?
b. Deze verdeling is niet symmetrisch, maar scheef.
Wat betekent dat?

2 Elke uur wordt in De Bilt de temperatuur gemeten. De resultaten tussen 8 en 9 uur 's ochtends in de jaren 1981 t/m 2000 geven de volgende verdeling (7305 metingen).



a. Hoe groot is de gemiddelde temperatuur ongeveer?
b. Er is iets merkwaardigs aan de verdeling. Wat?

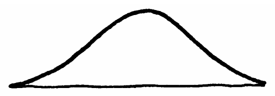
3 Een lamp hangt boven het wegdek. Uiteraard is het recht onder de lamp het lichtst. Hoe verder je van de lamp weg gaat, des te kleiner wordt de lichtintensiteit. De volgende grafiek laat zien hoe het licht verdeeld is over de lengte van de weg,



a. Schat hoeveel procent van het licht op het wegdek valt, minder dan 100 meter van de plaats waar de lamp boven hangt.
b. De grafiek is heel fraai regelmatig, zeker in vergelijking met de grafieken van opgave 1 en 2.
Noem een paar fraaie eigenschappen van deze grafiek.

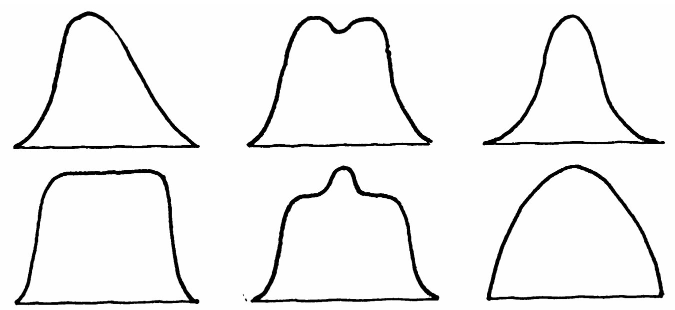
We gaan een speciaal soort verdeling bestuderen: *klokvormige*. Een paar voorbeelden zijn:
- de lengte van jongens in een bepaalde leeftijdsgroep,
- de levensduur van batterijen,
- het gewicht van zogenaamde kilopakken suiker,
- het jaarlijkse aantal verkeersdoden in een bepaalde streek.

Klokvormig wil zeggen:
- de meeste waarnemingen liggen rond het gemiddelde,
- hoe verder je van het gemiddelde afwijkt, des te minder waarnemingen daar liggen,
- de waarnemingen liggen symmetrisch rond het gemiddelde.

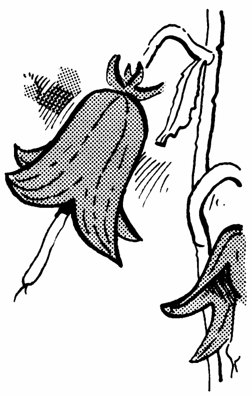


Hiernaast staat een plaatje van zo'n verdeling.

4 Geen van de volgende verdelingen is klokvormig.



Zeg van elke verdeling, waarom hij niet klokvormig is.



Hiermee is natuurlijk niet precies vastgelegd wat wel en wat niet een klokvormige verdeling is. En in de wiskunde werken we alleen maar met nauwkeurig vastgelegde begrippen.

We gaan nu definiëren wat we onder de "ideale" klokvormige verdeling zullen verstaan. Dat wordt het "prototype". Deze ideale vorm zul je wel nooit precies zo tegenkomen, maar wel zullen veel verdelingen in de praktijk hier sterk op lijken.

De ideale klokvorm kun je met de GR tekenen:
Y = normalpdf(X)
Normalpdf vind je onder DISTR.
Kies als WINDOW bijvoorbeeld:
-3 < X < 3 en -0.1 < Y < 1.1

5 **a.** Teken deze grafiek op de GR.

De ideale klokkromme zit kennelijk standaard in de GR. Je kunt je afvragen welke formule deze functie heeft, uitgedrukt in de bekende functie.

b. Teken op de GR in hetzelfde window de grafieken van: Y = 2^{-x^2} .

De grafiek lijken sprekend op elkaar. Het enige dat met de grafiek van Y = 2^{-x^2} moet gebeuren is verticaal en horizontaal oprekken (ten opzichte van de y-as en x-as). Dat lukt met $y = 0.4 \cdot 2^{-0{,}72x^2}$.

c. Teken ook de grafiek van deze derde functie. Zie je dat deze nauwelijks verschilt van de grafiek van Y = normalpdf(X)?

Je kunt je afvragen waar die factoren 0.4 en –0,72 vandaan komen. Het zijn benaderingen. Deze getallen zijn zodanig dat de standaardafwijking 1 is en de oppervlakte onder de kromme 1 is.

6 We nemen aan dat de verdeling van de lengte van 18-jarige jongens de ideale klokvorm heeft met gemiddelde $\mu = 182$ cm en standaardafwijking $\sigma = 10$ cm.
Het enige verschil met de verdeling Y = normalpdf(X) is het gemiddelde en de standaardafwijking.
Je kunt de verdeling als volgt op de GR tekenen:
Y = normalpdf(X,182,10).
Doe dit; kies een geschikt window.

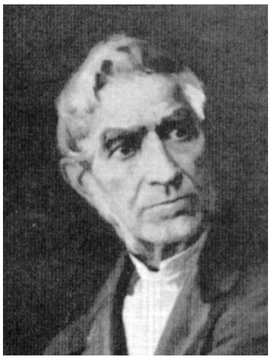
Een verdeling met de ideale klokvorm (zoals in het voorgaande gedefinieerd is), noemt men een **normale verdeling**.

Een normale verdeling ligt pas vast als je twee getallen kent: het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ. μ en σ zijn letters uit het Griekse alfabet. μ spreek je uit als *mu* en σ als *sigma*.

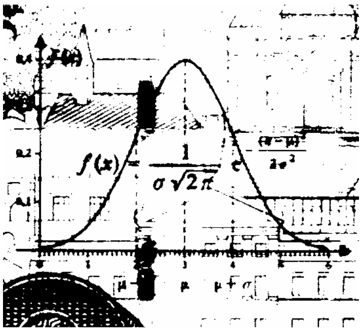
7 Kies op de GR: Y = normalpdf(X,5,3) met window-instelling $-4 \leq x \leq 12$ en $0 \leq y \leq 0{,}5$. Je krijgt nu de grafiek van de normale verdeling met $\mu = 5$ (het gemiddelde is 5) en $\sigma = 3$ (de SD is 3).
a. Teken de grafieken voor μ = 5, μ = 6 en μ = 7 in één plaatje.
b. Hoe verandert de grafiek als je μ groter maakt?

8 Kies weer: Y = normalpdf(X,5,3) met window $-4 \leq x \leq 12$ en $0 \leq y \leq 0{,}5$.
a. Teken de grafieken voor $\sigma = 2$, $\sigma = 3$ en $\sigma = 4$ in één plaatje.
b. Hoe verandert de grafiek als je σ groter maakt?

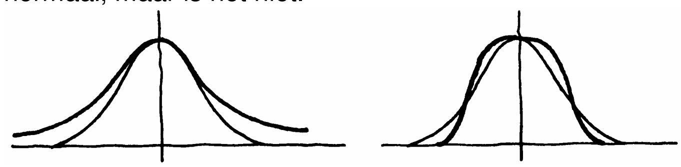
Bij elke normale verdeling is de oppervlakte onder de grafiek gelijk aan 1. Dat komt omdat die totale oppervlakte 100% van de waarnemingen vertegenwoordigt.
Zoals gezegd, zal een praktijkvoorbeeld nooit precies voldoen aan de formule van de normale verdeling, maar wel ongeveer. We spreken dan van **bij benadering normaal verdeeld**.


Adolphe Quetelet
1796 - 1874

De normale verdeling komt hier voor jou uit de lucht vallen. Vroeger is er veel onderzoek gedaan waaruit dit alles is voortgekomen. De twee belangrijkste onderzoekers zijn daarbij de Belg Quetelet en de Duitser Gauss.
In 1835 publiceerde Quetelet een boek met statistisch materiaal over allerlei grootheden betreffende een mens (bijvoorbeeld de lengte van 18-jarige jongens). Hij merkte op dat de grootheden normaal verdeeld waren rond een gemiddeld. Een individuele afwijking van dat gemiddelde kwam door toevallige oorzaken (zie ook bladzijde 21). Hij voerde de "volmaakte" mens in: dat is de mens die alle grootheden gemiddeld heeft.
De formule van de normale verdeling is afkomstig van de toen zeventienjarige (!) Gauss (1794). De grafiek wordt dan ook wel de Gauss-kromme genoemd. Zijn beeltenis komt voor op het Duitse bankbiljet van 10 mark, samen met de kromme; de kromme is naast het biljet uitvergroot.
Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) is een van de grootste wiskundige aller tijden.



Vaak is het niet zo gemakkelijk om te beslissen of een verdeling wel bij benadering normaal is of niet. In beide plaatjes hieronder is behalve een normale verdeling nog een andere kromme getekend. Die lijkt misschien wel normaal, maar is het niet.



9 Als je een kilopak suiker koopt, mag je verwachten dat er 1000 gram suiker in zit. Dat staat per slot van rekening op de verpakking. Deze pakken worden in de fabriek machinaal gevuld. De vulmachine kan wel keurig op 1000 gram zijn ingesteld, maar in de praktijk zal er in het ene pak wat meer en in het andere pak wat minder suiker terecht komen.

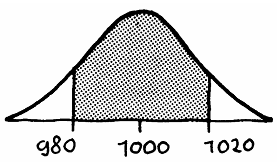
Stel dat de machine inderdaad op 1000 gram is ingesteld. Uit de geproduceerde pakken wordt een steekproef van 500 stuks genomen. De netto-inhoud van elk van die pakken wordt bepaald. De metingen staan in de volgende tabel, in gewichtsklassen met breedte 4 gram.

gewicht	aantal	gewicht	aantal	gewicht	aantal
970 - 974	1	990 - 994	62	1010 - 1014	40
974 - 978	6	994 - 998	71	1014 - 1018	21
978 - 982	12	998 - 1002	79	1018 - 1022	11
982 - 986	23	1002 - 1006	73	1022 - 1026	5
986 - 990	35	1006 - 1010	59	1026 - 1030	2

a. Teken het bijbehorende histogram.
Als je het histogram “glad strijkt”, lijkt het best op een klokvormige verdeling.
b. Teken zo goed mogelijk die klokvormige verdeling over het histogram.
c. Laat zien dat $\mu = 1000$.
d. Bereken met behulp van de tabel hoeveel procent van de pakken suiker een gewicht heeft tussen 980 en 1020 gram.
e. Ook tussen 990 en 1010 gram.

Omdat ongeveer 68% van de pakken suiker een gewicht heeft dat minder dan 10 gram afwijkt van het gemiddelde, zeggen we dat de **standaardafwijking** 10 is.
We noteren: $\sigma = 10$.
De standaardafwijking geeft aan hoe breed de verdeling is.

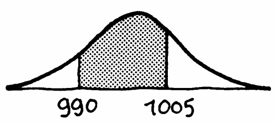
Op de GR kun je eenvoudig bij een normale verdeling de oppervlakte onder de klokvormige grafiek berekenen. Als volgt.
Kies onder 2nd DIST 2: normalcdf
Geef de grenzen van het gebied en μ en σ als volgt op:
normalcdf(980,1020,1000,10).

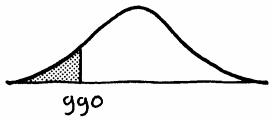


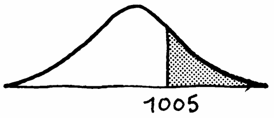
↑ ↑ ↑ ↑
linker-grens rechter-grens μ σ

Je krijgt nu als antwoord op de GR: 0,9545. Dat wil zeggen dat 95,45% van de oppervlakte onder de klokvormige grafiek ligt tussen de grenzen 980 en 1020.
e. Controleer dit op de GR.

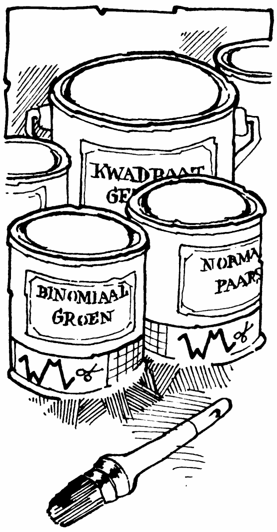
Opmerking
Behalve de berekening kun je ook nog het plaatje krijgen.
Kies daarvoor:
window: $970 \leq X \leq 1030$, $0 \leq Y \leq 0{,}05$
Y= 2nd DIST, DRAW, 1: ShadeNorm(980,1020,1000,10).







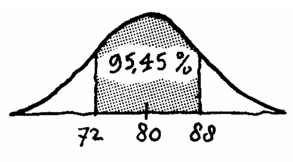
10 We werken nog steeds met pakken suiker met μ = 1000 en σ = 10.
Bereken met de GR hoeveel procent van de pakken volgens de benadering met de normale verdeling een gewicht heeft:
a. tussen 990 en 1005 gram,
b. minder dan 990 gram. (Er moet altijd een linker- en rechtergrens opgegeven worden. Kies een zodanig klein of groot getal dat de oppervlakte daarbuiten praktisch 0 is.)
c. meer dan 1005 gram.
d. Controleer in elk van deze gevallen of de tabel in opgave **6** ongeveer dezelfde uitkomsten oplevert.



11 In een fabriek worden blikken gevuld met (gemiddeld) 1 liter verf. De SD van de vulmachine is 15 milliliter. De inhoud van de blikken is normaal verdeeld.
a. Bereken hoeveel procent van de blikken meer dan 30 ml verf te weinig bevat.
b. Schets ook een normale kromme en kleur de bijbehorende oppervlakte.

Een liter verf weegt 2 kg.
c. Geef op de horizontale as in de schets van **b** het gewicht in grammen aan.
d. Bereken hoeveel procent van de blikken minder dan 1980 gram verf bevat.

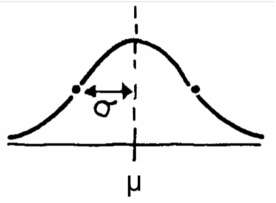
De normale verdeling is zodanig dat de volgende **vuistregel** geldt. Een daarvan is:
Bij iedere normale verdeling (dus bij elke keuze van μ en σ) is de oppervlakte onder de klokvormige grafiek tussen de grenzen $\mu-2\sigma$ en $\mu+2\sigma$ (ongeveer) 95%.



12 Neem enkele waarden voor μ en σ en controleer deze vuistregel. Bijvoorbeeld voor $\mu = 80$ en $\sigma = 4$.

Naast bovenstaande vuistregel voor $\mu-2\sigma$ en $\mu+2\sigma$ is er ook een vuistregel voor $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$:
Bij iedere normale verdeling (dus bij elke keuze van μ en σ) is de oppervlakte onder de klokvormige grafiek tussen de grenzen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ongeveer __%.

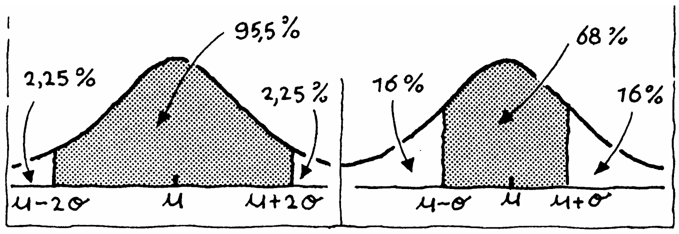
13 **a.** Onderzoek hoe groot dat percentage ongeveer is.
b. Wat is het percentage tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$?



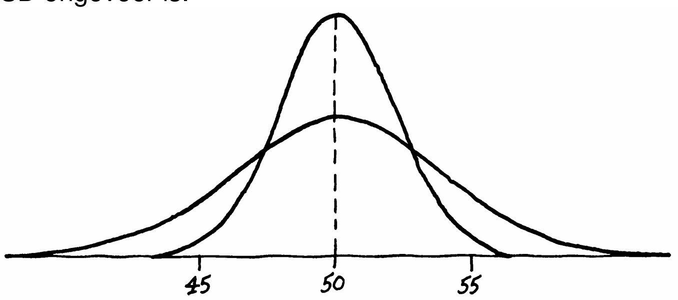
Samenvatting

Bij klokvormige verdelingen hoort een wiskundig model: de **normale verdeling**. De ideale klokvorm wordt een **normale kromme** genoemd. Bepalend voor de normale kromme zijn het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ.

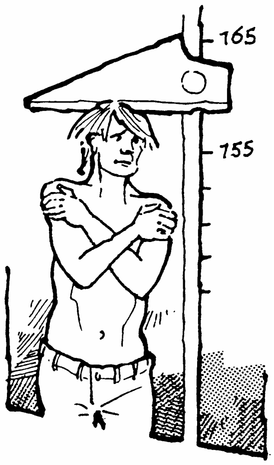
Eigenschappen:
- de verticale lijn door het gemiddelde μ is symmetrieas,
- de oppervlakte onder de kromme is 1 (= 100%),
- de buigpunten van de kromme liggen precies op afstand σ van de symmetrieas af,
- de vuistregels zijn in de plaatjes hieronder weergegeven.



14 Door de horizontale afstand van de buigpunten tot de symmetrie-as te schatten, kun je bepalen hoe groot de SD ongeveer is.



a. Laat zien dat de standaardafwijking bij de smalle verdeling ongeveer 2 is.
b. Hoe groot is de standaardafwijking ongeveer bij de brede verdeling?



15 De lichaamslengte van volgroeide mensen van een bepaalde leeftijd is bij benadering normaal verdeeld. Bij de keuring voor militaire dienst werd de lichaamslengte opgemeten. Zodoende beschikken we over gegevens van 18-jarige jongens. In de tabel hieronder staan de gegevens van 1950 en 1986. De laatste lichting dienstplichtige militairen werd in 1996 opgeroepen. Daarmee kwam ook een eind aan de massale medische keuring van jongemannen die "voor hun nummer opkwamen."

Dienstplichtigen naar lichaamslengte (in procenten)

	1950	1986
- 159 cm	1,5	0,1
160 - 164 cm	6,0	0,7
165 - 169 cm	17,3	3,4
170 - 174 cm	28,3	11,6
175 - 179 cm	27,0	23,8
180 - 184 cm	14,4	28,9
185 - 189 cm	4,5	20,4
190 - 194 cm	0,9	8,4
195 - 199 cm	0,1	2,2
200 cm of meer	0,0	0,5
Gemeten abs. (=100%)	79.696	103.370

170 - 174 cm staat voor alle lengtes vanaf 170,0 tot aan 175,0 cm. De klassenbreedte is dus 5 cm.

a. Maak een histogram voor de frequentieverdeling van 1986.

b. Teken er de bijbehorende normale kromme bij.

c. Schat uit de tekening hoe groot de σ ongeveer is.

d. Bereken de σ met de tabel.

e. Voor 1950 is de σ bijna net zo groot. De gemiddelde lengte is tussen 1950 en 1986 17 cm gestegen. Schets met deze gegevens de grafiek van de lengten in 1950.

Als je weet dat er sprake is van een normale verdeling en het gemiddelde en de σ zijn bekend, dan moet je met de GR opgaven kunnen maken van de vorm: “Hoeveel procent ligt onder ... / boven ... / tussen ... en ...”.

16 Het gewicht van varkens in een bepaalde groep is normaal verdeeld met gemiddelde 40 kg en SD 8 kg.

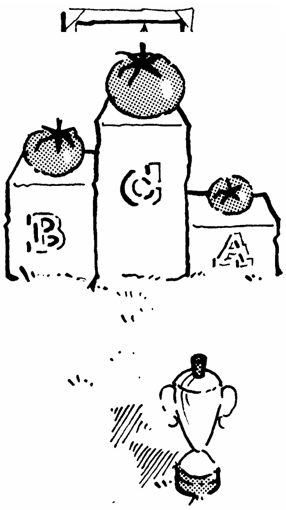
a. Bereken hoeveel procent van de varkens een gewicht heeft onder 30 kg.

b. Hoeveel procent heeft een gewicht boven 42 kg?

c. Hoeveel procent heeft een gewicht tussen 30 kg en 50 kg?

17 Terug naar de dienstplichtige 18-jarigen van 1986 (opgave **12**). Van 103.370 jongens bleek de gemiddelde lengte 181,8 cm te zijn en de standaardafwijking 7 cm.
We willen weten hoeveel jongens 190 cm of langer zijn.
a. Schets een normale kromme en geef daarbij de gegevens en het gevraagde aan.
b. Bereken met de normale verdeling hoeveel van de jongens naar verwachting 190 cm of langer waren. Klopt je antwoord ongeveer met de tabel bij opgave **15**?

Jongens die langer waren dan 200 cm of korter dan 160 cm werden op grond van hun lengte afgekeurd.
c. Teken weer een bijpassend plaatje.
Bereken met de normale verdeling hoeveel jongens er in 1986 op grond van hun lengte werden afgekeurd. Controleer je antwoord in de tabel bij opgave **15**.



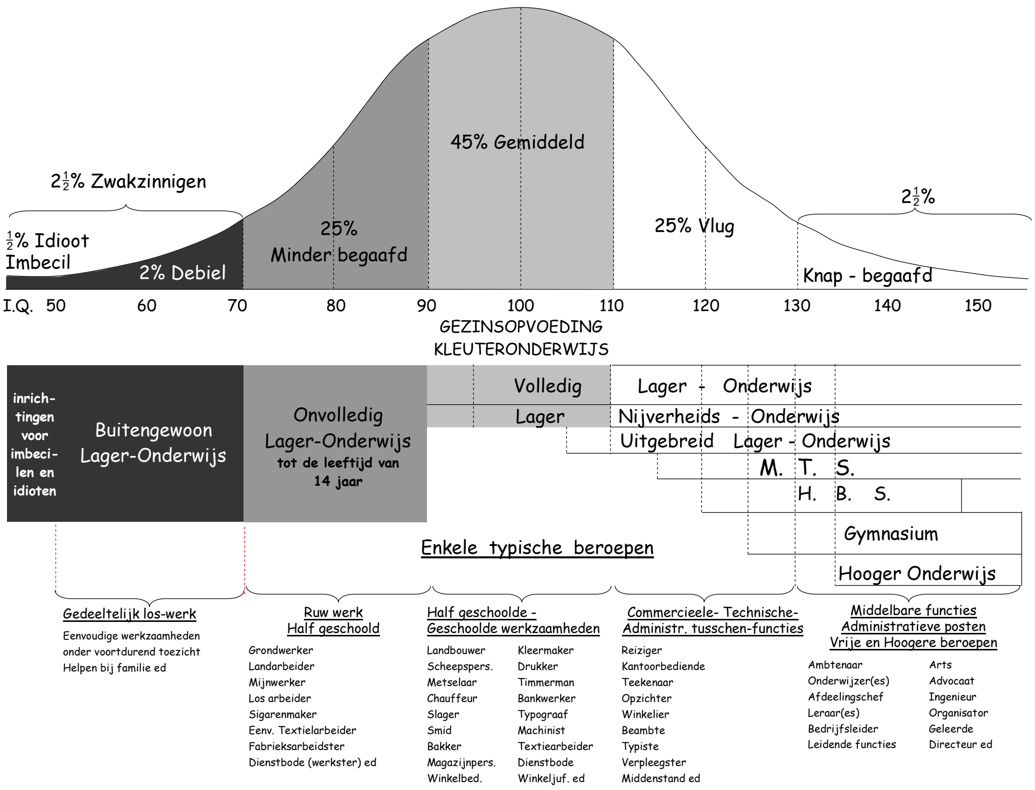
18 Een tomatenkweker heeft geoogst. De vruchten variëren in grootte en gewicht. Het gewicht is normaal verdeeld met μ = 90 gram en σ = 15 gram. In totaal zijn 60.000 tomaten geoogst. De oogst wordt op gewicht gesorteerd. De drie gewichtsklassen zijn:
- klasse A: tot 70 gram,
- klasse B: van 70 tot 100 gram,
- klasse C: meer dan 100 gram.

a. Hoeveel procent van de oogst komt in elk van de klassen terecht?

De opbrengst van een tomaat hangt af van zijn gewichtsklasse:
- klasse A: 20 eurocent,
- klasse B: 25 eurocent,
- klasse C: 30 eurocent.

b. Welke opbrengst mag de kweker voor zijn hele oogst verwachten?

19 Intelligentie is een van de factoren die een rol spelen bij het met succes volgen van een schoolopleiding. In 1938 gebruikte een onderwijskundige onderstaande grafiek, waarin de mate van intelligentie (uitgedrukt in IQ) werd gekoppeld aan soorten opleidingen en mogelijke beroepen.



Het IQ van leerlingen is normaal verdeeld met $\mu = 100$.
a. Bepaal uit het plaatje hoe groot de SD ongeveer is.
b. Bereken hoeveel procent van de bevolking in 1938 in staat werd geacht om ten minste de MTS als opleiding te volgen.
c. Bereken hoeveel procent in aanmerking kwam voor de HBS, maar niet voor het Gymnasium.

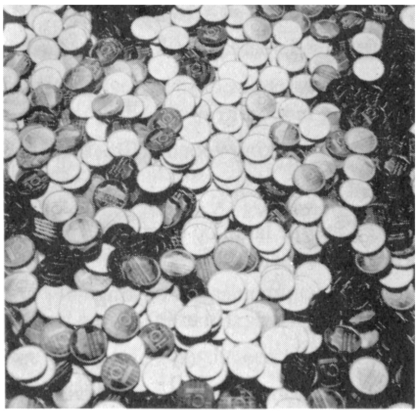
20 Twee fabrikanten brengen voor dezelfde prijs eenzelfde type lamp op de markt. Het aantal branduren is voor beide merken normaal verdeeld. Merk A heeft een gemiddelde van 1250 uur en een SD van 300 uur. Merk B heeft een gemiddelde van 1200 uur en een SD van 250 uur.
Je wilt een lamp kopen die minstens 1000 uur moet branden.
Welk merk heeft jouw voorkeur?

21 Alle Nederlandse munten worden in Utrecht geslagen bij 's Rijks Munt. De afmetingen en gewichten zijn aan zeer strikte regels gebonden.

Muntsoort	metaal	middellijn in mm	gewicht in gr	tolerantie in duizensten
vijftigguldenmunt	zilver	38,0	25,0	5
tienguldenmunt	zilver	38,0	25,0	3
vijfguldenmunt	verbronsd nikkel	23,5	9,25	27
rijksdaalder	nikkel	29,0	10,0	15
gulden	nikkel	25,0	6,0	15
kwartje	nikkel	19,0	3,0	15
dubbeltje	nikkel	15,0	1,5	15
stuiver	brons	21,0	3,5	15

Het gewicht van een nieuw geslagen gulden is normaal verdeeld met $\mu = 6000$ mg en $\sigma = 6$ mg. Munten die meer dan 15 mg afwijken van het vereiste gewicht mogen niet in omloop worden gebracht.

a. Waarom gelden zulke strikte eisen voor het toegestane gewicht?
b. Bereken welk percentage van de nieuw geslagen guldens niet in omloop zal worden gebracht.
c. Per jaar zijn er 25 miljoen nieuwe guldens nodig.
Hoeveel moeten er geslagen worden om aan die vraag te kunnen voldoen?

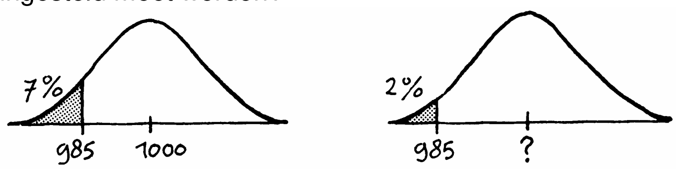


Container met 400.000 nieuw geslagen dubbeltjes (foto 's Rijks Munt)

22 We gaan terug naar de vulmachine die pakken vult met (ongeveer) 1 kilogram suiker. Als de machine ingesteld staat op 1000 gram, zal het werkelijke gewicht van een pak normaal verdeeld zijn met gemiddelde 1000 gram en SD 10 gram.

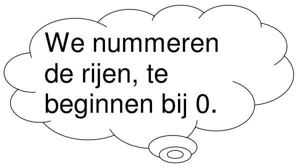
a. Toon aan dat bijna 7% van de pakken een gewicht heeft van 985 gram of minder.

Volgens EU-richtlijnen mag slechts 2% van dit soort pakken suiker een gewicht van 985 gram of minder hebben. Dit houdt in dat de vulmachine op een hoger gemiddeld gewicht moet worden ingesteld. We nemen aan dat bij een andere instelling de SD onveranderd 10 gram is.
Het probleem is nu op welk gewicht de machine minimaal ingesteld moet worden?



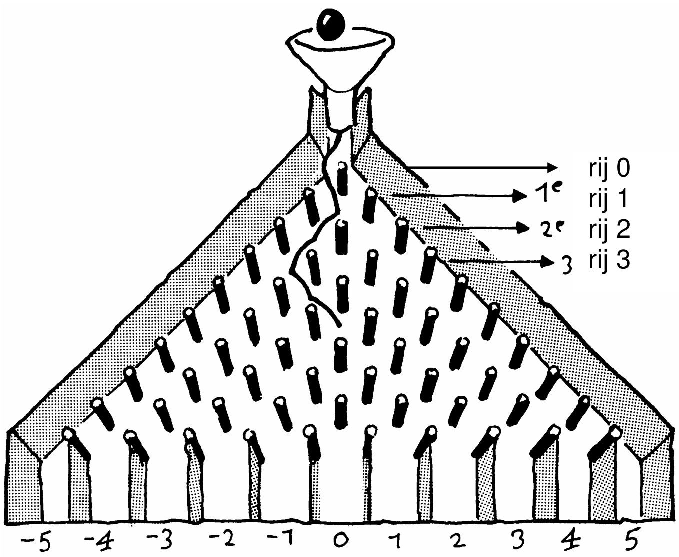
b. Probeer het antwoord te vinden (in grammen nauwkeurig) door verschillende instellingen te proberen.

In plaats van proberen willen we natuurlijk een rechtstreekse methode.
Om dit soort problemen op te lossen, moeten we eerst de nodige voorbereidingen treffen. In paragraaf 4 komen we hierop terug.



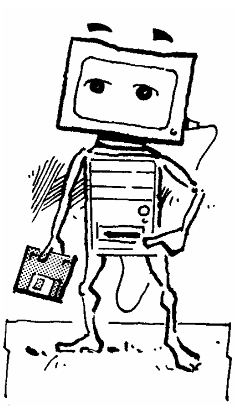
2 Het bord van Galton

1 Hieronder staat schematisch het bord van Galton. Een balletje wordt boven in de trechter losgelaten en valt over de pinnen naar beneden. De pinnen zijn zo geplaatst dat, als een balletje op zo'n pin komt, het met even grote kans naar links als naar rechts valt. Na 10 keer een pin geraakt te hebben, komt het balletje in een van de elf bakjes onderaan het bord. De bakjes zijn genummerd -5 tot en met 5.



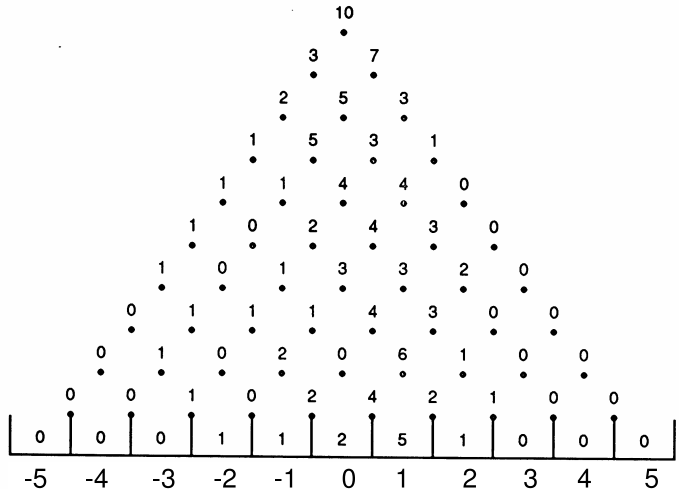
a. Een balletje legt de route LRLLRRLLLL af.
Laat zien dat dat balletje in bakje -2 komt.
b. Er zijn nog andere routes die naar bakje -2 leiden. Je hoeft die routes niet allemaal op te schrijven, maar je moet wel zeggen hoe je aan een rijtje L'en en R'en kunt zien of het balletje in bakje -2 komt.
c. Een balletje raakt op zijn weg naar beneden de derde pin van links op de zevende rij.
In welke bakjes kan het balletje dan nog terecht komen?

Bij één enkel balletje valt absoluut niet te voorspellen welke route het zal volgen. Alle routes zijn namelijk even (on)waarschijnlijk.
d. Mag je daaruit concluderen dat in elk bakje ongeveer evenveel balletjes terecht zullen komen?



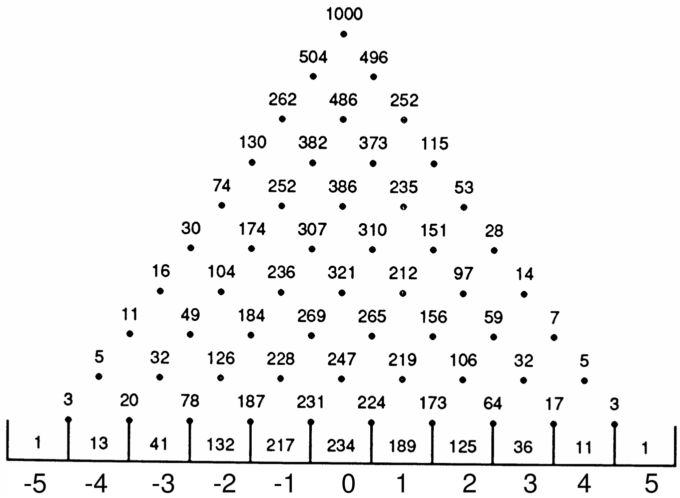
2 Met het computerprogramma *Het Galtonbord* kun je zelf het bord van Galton simuleren. Je vindt dat op www.wageningse-methode.nl/ Kies software / Kans.
Maak een aantal simulaties.

3 Hieronder zie je het resultaat van een simulatie op een Galtonbord met 10 rijen. Men liet 10 balletjes naar beneden vallen.



Op grond van deze simulatie schatten we de kans dat een balletje in bakje -2 komt op $\frac{1}{10}$.

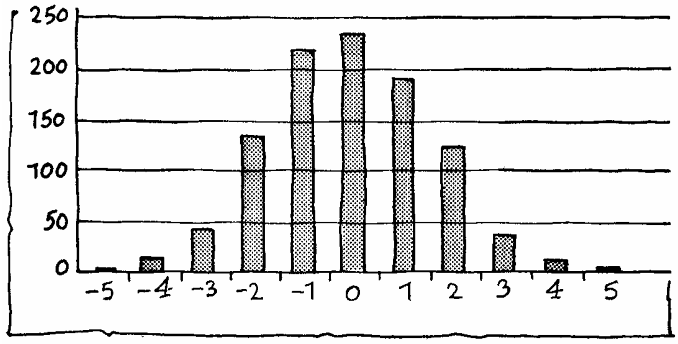
Bij 1000 balletjes was het resultaat:



Op grond van deze simulatie schatten we de kans dat een balletje in bakje -2 terecht komt op $\frac{132}{1000}$.

Waarom is dit waarschijnlijk een betere schatting dan de eerdere schatting $\frac{1}{10}$?

Bij de simulatie met 1000 balletjes kan een histogram gemaakt worden:



Bij iedere simulatie ontstaan soortgelijke histogrammen. De klokvorm is goed herkenbaar.

4 **a.** Bereken bij de simulatie van opgave **3** met 1000 balletjes het gemiddelde van de nummers van de bakjes waarin de balletjes terecht komen.
b. Bereken met de vuistregels van de normale verdeling (zie blz. 9) hoe groot de SD ongeveer is.

5 Als we 1000 balletjes in de trechter werpen, verwachten we theoretisch dat op de eerste pin 500 balletjes naar links zullen vallen en 500 balletjes naar rechts. Op de tweede rij verwachten we van links naar rechts 250, 500 en 250 balletjes.

1000

500 500

250 500 250

? ? ? ?

? ? ? ? ?

a. Welke verdeling verwacht je op de volgende twee rijen?

Het is voor dit rekenwerk handiger om met 1024 balletjes te werken, dan met 1000.
b. Waarom?

rij 0	1024										
rij 1	512	512									
rij 2	256	512	256								
	.										
	.										
	.										
rij 9	2	18	72	168	252	252	168	72	18	2	
rij 10	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

c. Op de laatste regel komen aantallen te staan die je in de bakjes verwacht.
Welke aantallen zijn dat?

Zoals gezegd, is van een enkel balletje onvoorspelbaar welke route het zal volgen over het bord. Bij een groot aantal balletjes zal er toch een zekere verdeling optreden: er komen veel balletjes in het midden en weinig in de buitenste bakjes. Dat komt doordat er meer wegen zijn naar de middelste bakjes dan naar de buitenste. En het aantal wegen wordt precies gegeven door de driehoek van Pascal:

rij 0	1										
rij 1	1	1									
rij 2	1	2	1								
rij 3	1	3	3	1							
rij 4	1	4	6	4	1						
rij 5	1	5	10	10	5	1					
rij 6	1	6	15	20	15	6	1				
rij 7	1	7	21	35	35	21	7	1			
rij 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
rij 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
rij 10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

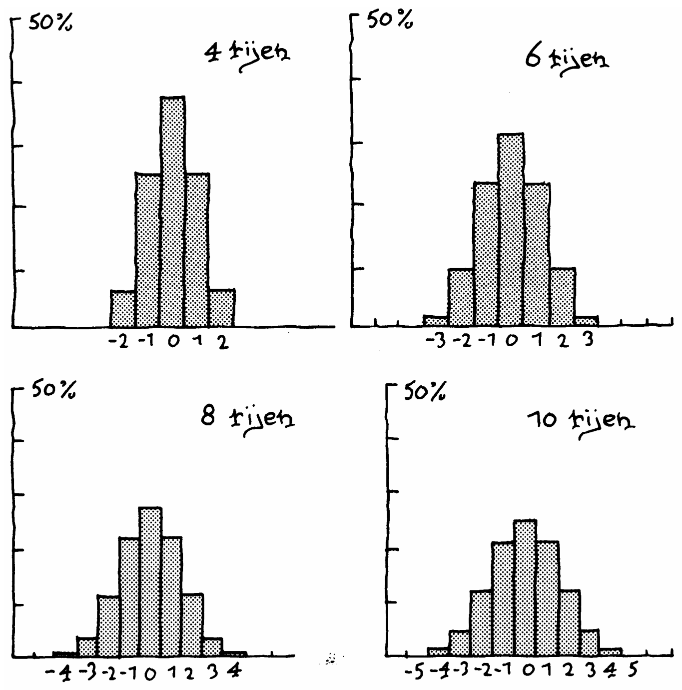
Deze getallen vind je ook snel op de GR. Bijvoorbeeld het getal 84 op plaats 3 in rij 9 krijg je via: 9 nCr 3. De optie nCr vind je in het menu MATH, PRB.

6 **a.** Bereken met de driehoek van Pascal de kans dat een balletje in bakje -2 komt.
b. Bereken de kans dat een balletje in een van de middelste vijf bakjes komt.

7 **a.** Op de vierde rij van het bord van Galton staan vijf pinnen.
Geef voor elk van die pinnen de kans dat een balletje erop komt. Gebruik de driehoek van Pascal.
b. Op de zevende rij van het bord van Galton staan acht pinnen.
Wat is de kans dat een balletje op de derde pin van links komt? Gebruik de driehoek van Pascal.

We kijken naar Galtonborden met een *even* aantal rijen (inclusief de rij 0). Dan zijn er een oneven aantal bakjes onderaan. Het middelste bakje krijgt nummer 0. Naar rechts loopt het nummer steeds met 1 op, naar links steeds met 1 af.
(Voor borden met een *oneven* aantal rijen kan het volgende ook wel gedaan worden, maar dat is lastiger te formuleren.)

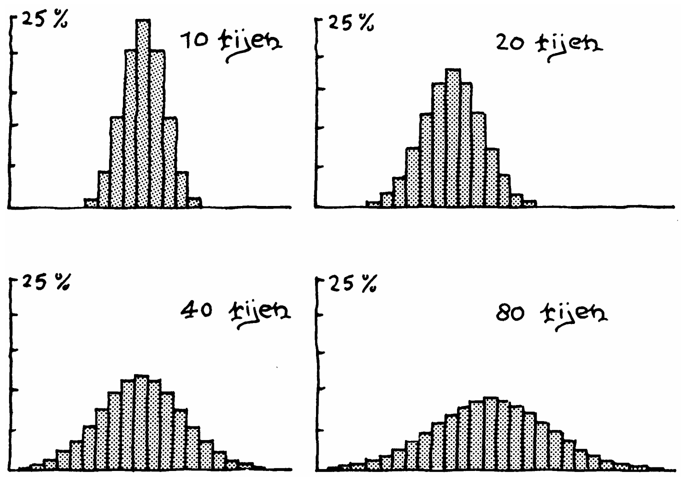
Dan krijg je de volgende histogrammen.



Het is lastig om uit deze histogrammen precieze kansen af te lezen. Voor precieze kansen kunnen we beter naar een bord van Galton of naar de driehoek van Pascal kijken.

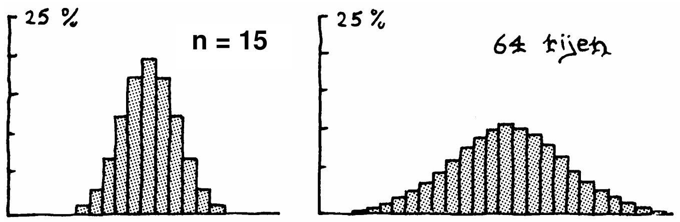
8 Hoe hoog is de balk van het histogram bij 8 rijen van bakje -2 precies?

De normale kromme wordt steeds duidelijker zichtbaar als het aantal rijen op het bord van Galton groter wordt.
Het gemiddelde is steeds 0.
De SD bij een bord met n rijen is $\frac{1}{2}\sqrt{n}$. Dus 68% van de ballen zal in een bakje komen met nummer groter dan $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ of kleiner dan $-\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

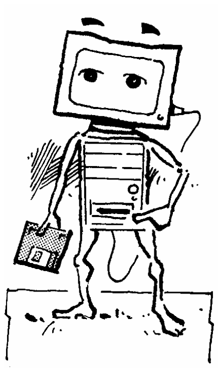


9 **a.** Bereken met behulp van de formule $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ de SD bij 40 rijen en bij 80 rijen.
b. Als je een gladde kromme over de histogrammen tekent, moeten de buigpunten daarvan (zo ongeveer) op afstand SD van het gemiddelde liggen.
Controleer of dat klopt.

10 Bij 16 rijen en 64 rijen is de verdeling als volgt.



a. De SD bij 64 rijen is twee keer zo groot als bij 16 rijen. De top bij 64 rijen is juist twee keer zo laag als bij 16 rijen.
Leg uit dat deze twee dingen met elkaar kloppen.
b. Controleer of iets dergelijks ook geldt voor de verdelingen bij 20 en bij 80 rijen.



Met het computerprogramma *Binomiaal of Normaal* kun je de resultaten van een Galtonbord vergelijken met een normale verdeling. Je vindt dat programma op www.wageningse-methode.nl/ Kies software / Kans.

Het bord van Galton staat als het ware model voor de normale verdelingen. Bij een bord met 20 rijen pinnen wordt een balletje 20 keer naar rechts (+) of naar links (–) gestuurd. Wanneer het aantal plussen precies opweegt tegen het aantal minnen, komt het balletje in het middelste bakje terecht. In alle andere gevallen krijgt het een afwijking ten opzichte van het midden. Hoe groter de afwijking, des te kleiner is de kans daarop.

Bekijk de lengte van een volwassen mens. Een mens groeit vanaf de bevruchting tot ongeveer zijn negentiende levensjaar. De groei wordt door allerlei factoren versterkt (+) of geremd (–). In veel gevallen speelt het toeval daarbij een rol. Al die (toevals)factoren tezamen bepalen het uiteindelijke resultaat: de lengte van de volgroeide mens.
Op deze manier bezien is de groei van een individu vergelijkbaar met de route die een balletje volgt over het bord van Galton. Zo lijkt de lengteverdeling van bijvoorbeeld Nederlandse mannen op de verdeling van een groot aantal balletjes over de bakjes van een bord van Galton.

11 a. Noem eens een aantal factoren die invloed hebben op de groei van een mens.
b. Kun je daarbij spreken van *toevals*factoren?

Het bovenstaande is niet alleen van toepassing op de lengtegroei van de mens, maar geldt ook voor allerlei groeiprocessen in de natuur en voor bijvoorbeeld het vulproces van pakken suiker.
In het algemeen geldt: als het verloop van een of ander proces beïnvloed wordt door een groot aantal (onafhankelijke) toevalsfactoren, is het eindresultaat van dat proces bij benadering normaal verdeeld.

3 z-waarde

Jan komt thuis en vertelt dat hij een 8 voor zijn proefwerk heeft gehaald. “Mooi”, zegt zijn vader, “maar wat was het gemiddelde van de klas?” “Dat was een 6” antwoordt Jan triomfantelijk.

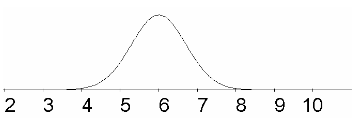
Of de 8 die Jan haalde voor het proefwerk een *uitzonderlijk* goed cijfer was, hangt blijkbaar (volgens Jans vader) af van het gemiddelde. Dat lijkt logisch. Immers als het gemiddelde cijfer van de klas een 9 is, dan is een 8 niet uitzonderlijk goed (misschien zelfs slecht). Maar ook als het gemiddelde cijfer een 6 is, hoeft een 8 niet uitzonderlijk goed te zijn. Kijk maar naar de volgende drie groepen.

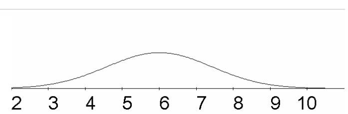
- groep 1 (6 leerlingen): cijfers: 3, 4, 4, 8, 8, 9
- groep 2 (8 leerlingen): cijfers: 2, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 10
- groep 3 (7 leerlingen): cijfers: 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8

1 In welke groep(en) vind je een 8 een uitzonderlijk goede prestatie? Waarom?

2 **a.** Gemiddeld bedraagt de temperatuur in De Bilt in de maand juli 16,6 °C. In 1983 was de gemiddelde juli-temperatuur in De Bilt 20,1 °C.
Is dat uitzonderlijk hoog? Wat denk jij?
b. Anneke simuleert op de computer het gooien met een dobbelsteen. De computer “gooit” 1000 keer met een dobbelsteen. Ze verwacht ongeveer 167 keer zes ogen te krijgen, met een standaardafwijking van 12. Bij de simulatie krijgt ze 150 keer zes ogen.
Is dit uitzonderlijk weinig? Wat vind jij?
c. De consumentenbond controleert 10 kilopakken suiker. Gemiddeld behoren de pakken 1000 gram te bevatten. In de steekproef bleken acht pakken minder dan 1000 gram te bevatten. Vind jij dit uitzonderlijk?

3 Bekijk de volgende twee normale verdelingen, beide met gemiddelde 100. De SD rechts is twee keer zo groot als de SD links.





a. Bij welke verdeling vind jij de waarde 8 het meest uitzonderlijk? Waarom?

b. Welke waarde vind jij het meest uitzonderlijk, de 8 links of de 10 rechts?

Vaak is het lastig om, zo op het oog, te beoordelen of een waarneming uitzonderlijk is. Daarom gebruiken we een methode:
Bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking. Kijk hoeveel SD's de waarneming boven (onder) het gemiddelde ligt. Hoe hoger dit aantal SD's, des te uitzonderlijker is de waarneming.

c. De SD links is 0,8 en rechts 1,6. Bereken voor beide verdelingen hoeveel keer de SD de waarde 8 boven het gemiddelde ligt.
d. Bereken hoeveel keer de SD de waarde 10 rechts boven het gemiddelde ligt.

Het aantal keer de SD dat een waarneming afwijkt van het gemiddelde, noemen we de z-waarde.

$$\textbf{z-waarde} = \frac{\text{waarneming} - \text{gemiddelde}}{\text{SD}}$$

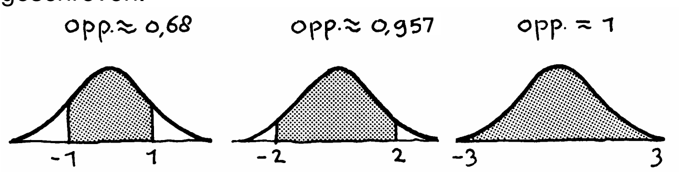
Voorbeeld
Gemiddelde = 16,6 , σ = 1,4 , waarneming is 20,1.
De z-waarde van 20,1 is 2,5.

4 **a.** Laat met een berekening zien hoe je in het voorbeeld aan de z-waarde 2,5 komt.
b. De z-waarde kan ook negatief zijn.
Bij welke waarnemningen is de z-waarde negatief?

5 We bekijken de lengten in twee groepen: 16-jarige jongens en 16-jarige meisjes. Bij de jongens is de gemiddelde lengte 176 cm en de SD 12 cm. Bij de meisjes is de gemiddelde lengte 164 cm en de SD 10 cm.
Een jongen en een meisje uit deze groepen krijgen verkering. Ze zijn beiden erg lang: de jongen 196 en het meisje 186.
a. Bereken de z-waarde van de lengte van de jongen en van de lengte van het meisje om te bepalen wie van de twee de grootste uitschieter is qua lengte binnen zijn/haar groep.
b. Hoe lang is een meisje dat een z-waarde heeft van 0?
c. Hoe lang is een meisje dat een z-waarde heeft van -1,6?

In paragraaf **1** hebben we al opgemerkt dat een normale verdeling twee parameters heeft: het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ. Voor μ en σ kun je in principe elke (positieve) waarde nemen. Bij de speciale keuze: $\mu = 0$ en $\sigma = 1$ krijgen we de **standaardnormale verdeling**.

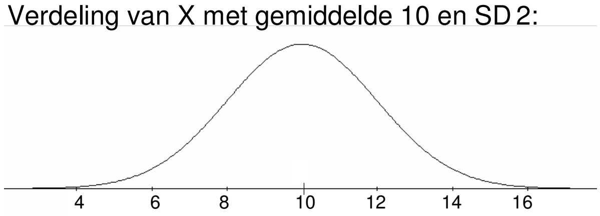
6 Hieronder is drie keer de standaardnormale kromme getekend. In elk van de plaatjes is een gebied met grijs aangegeven; de oppervlakte van het gebied is erbij geschreven.



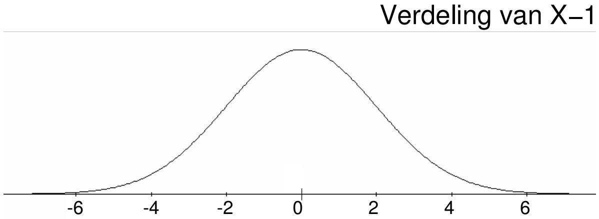
Controleer met de GR de oppervlakten van de drie gebieden.

7 We vergelijken drie normale verdelingen:

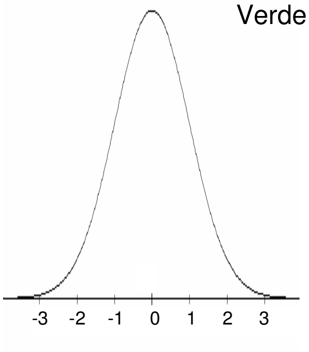
Verdeling van X met gemiddelde 10 en SD 2:



Verdeling van X−10 met gemiddelde 0 en SD 2:

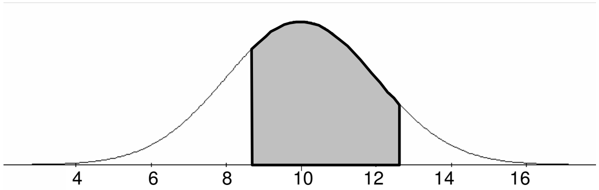


Verdeling van $\frac{X-10}{2}$ met gemiddelde 0 en SD 1:

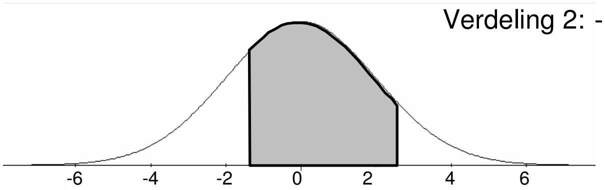


a. Ga na dat de plaatjes bij de gegeven gemiddelden en standaardafwijkingen passen.
We bekijken bij elk van de drie verdelingen de oppervlakte tussen twee waarden.

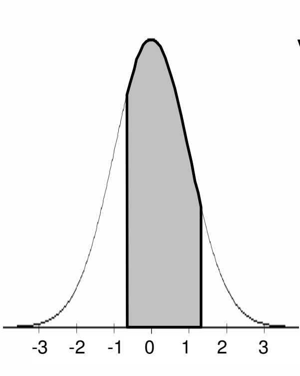
Verdeling 1: $8{,}6 \le X \le 12{,}6$



Verdeling 2: $-1{,}4 \le X-10 \le 2{,}6$



Verdeling 3: $-0{,}7 \le \frac{X-10}{2} \le 1{,}3$



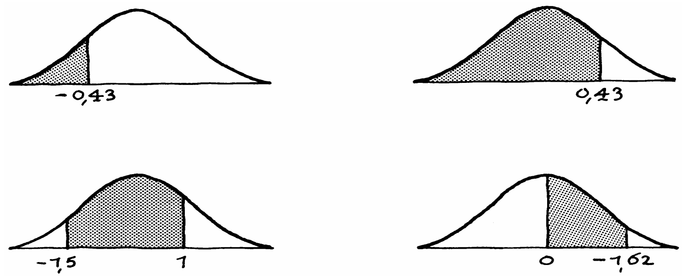
b. Ga na dat de grenzen bij de drie verdelingen met elkaar overeenstemmen.

$\frac{x-10}{2}$ is de bij x behorende z-waarde.

c. Bereken met de GR hoeveel procent bij de eerste verdeling tussen 8,6 en 12,6 ligt.
d. Bereken ook hoeveel procent bij de tweede verdeling tussen -1,4 en 2,6 ligt.
e. En hoeveel procent bij de derde verdeling tussen -0,7 en 1,3 ligt.

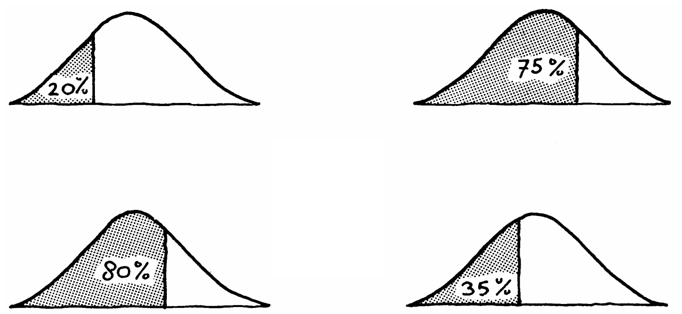
Als X normaal verdeeld is met gemiddelde 10 en SD 2, dan is de z-waarde $\frac{X-10}{2}$ standaard normaal verdeeld (dus met gemiddelde 0 en SD 1).

8 Hieronder staat vier keer een plaatje van de standaardnormale verdeling.

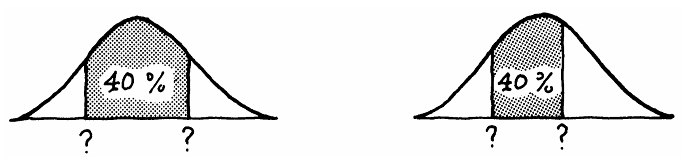


Bereken de oppervlakte van de grijze stukken.

9 Welke z-waarden passen het best bij de volgende oppervlakten?



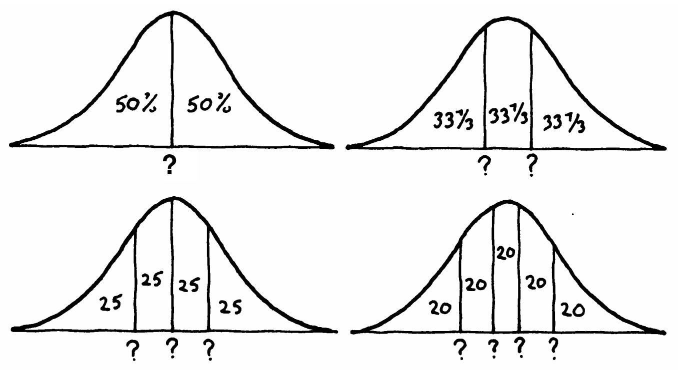
10 Bij oppervlakten tussen twee z-waarden lukt het terugzoeken meestal niet.
Twee situaties:



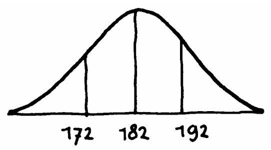
In het linkerplaatje liggen de linker- en rechtergrens even ver van het midden. Bij het rechter plaatje is dat niet zo.
a. Bepaal de z-waarden in het linker plaatje.
b. Kun je de z-waarden ook in het rechter plaatje bepalen?

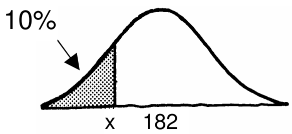
11 De reistijd van A naar B is normaal verdeeld met gemiddelde 56 minuten en standaardafwijking 8 minuten.
De reistijd van B naar A is normaal verdeeld met gemiddelde 42 minuten en standaardafwijking 6 minuten.
a. Leg uit dat een reistijd van A naar B boven de 60 minuten even uitzonderlijk is als een reistijd van B naar A boven de 45 minuten.
b. In hoeveel procent van de reizen van A naar B duurt de reistijd langer dan 60 minuten?

12 In de volgende plaatjes is de oppervlakte onder de normale kromme verdeeld in twee gelijke stukken, in drie, in vier en in vijf gelijke stukken.
Welke waarden horen bij de verdeelpunten (gemarkeerd door de vraagtekens)?



4 De vier typen



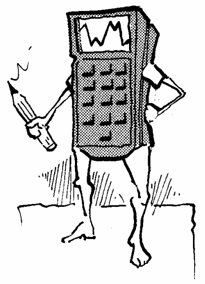


1 De lengte van 18-jarige jongens is normaal verdeeld met gemiddelde 182 cm en SD 10 cm.
a. Bereken hoeveel procent langer is dan 200 cm.

We gaan nu de volgende vraag behandelen:
Hoe lang is de kortste 10 procent jongens?
Een bijbehorend plaatje staat hiernaast.

Gevraagd wordt de grenswaarde x (cm): zo lang mag een jongen hoogstens zijn om tot de 10% kortste te horen.
Op de GR zou je dus díe waarde x moeten zoeken zodat normalcdf (0 , x ,182 , 10) = 0,1.
↑ ↑ ↑ ↑
linker-grens rechter-grens gem. SD

Hierbij is de linkergrens 0 willekeurig gekozen (als hij maar klein genoeg is).
b. Probeer die waarde x te vinden.



Proberen hoeft niet; er is ook een rechtstreekse methode:
2nd DIST 3: invNorm(0.1 ,182, 10)
↑ ↑ ↑
percen-tage gem. SD

c. Ga na dat je als antwoord 169,18…. krijgt.
Om tot de kortste 10% jongens te horen, mag je dus hoogstens 169,2 cm zijn.

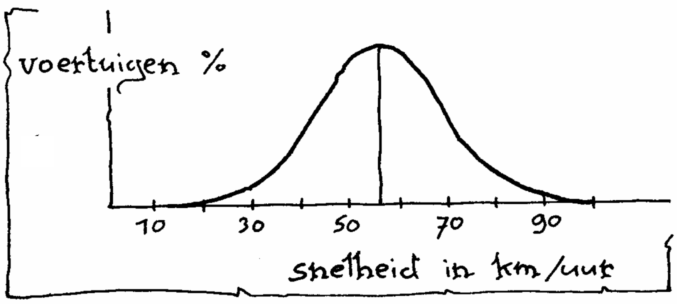
De langste 10% kun je op twee manieren bepalen:
1. via invNorm (0.9,182,10)
2. door de waarde 169,2 te spiegelen in het gemiddelde.

d. Bepaal op beide manieren hoe lang de langste 10% jongens zijn.
e. Hoe lang zijn de jongens van wie de lengte tot de middelste 50% behoort?

2 Veronderstel dat de puntenaantallen bij het CSE van een bepaald vak bij benadering normaal verdeeld zijn met gemiddelde 68 en SD 12.
Bereken met welk puntenaantal een leerling tot de 25% zwakste leerlingen behoort.

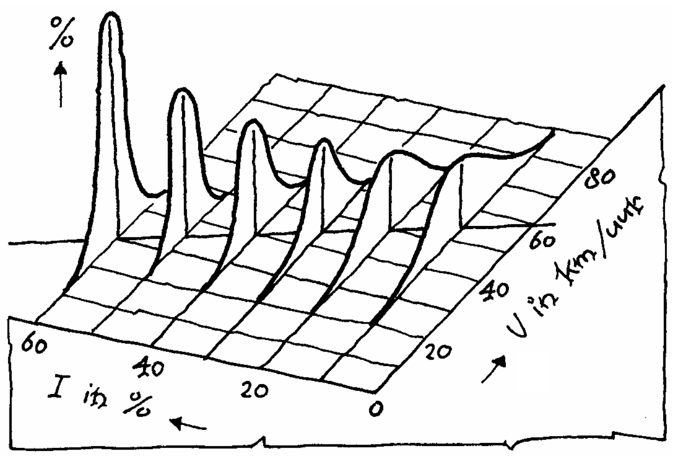
3 **Verkeersintensiteit en rijsnelheden**
Om aan te geven hoe druk het is op de weg gebruikt men het begrip verkeersintensiteit. Die intensiteit I wordt gegeven als een percentage van het maximale aantal auto's dat een weg per uur kan verwerken. Is er geen verkeer,

dan is de verkeersintensiteit 0. Bij een lage verkeersintensiteit (het is rustig op de weg) is er veel variatie in de snelheden van de auto's. Naarmate de intensiteit toeneemt, moet de automobilist zijn snelheid meer aanpassen aan het overige verkeer. Hieronder is de verdeling van de snelheden getekend bij weinig verkeer (I = 5); we nemen aan dat het een normale verdeling is.



Neem aan dat de snelheden normaal verdeeld zijn met gemiddelde 56 km/uur en standaardafwijking 13 km/uur. Op deze weg mag maximaal 70 km/uur gereden worden.
a. Bereken hoeveel procent van de auto's te hard rijdt.

In de volgende figuur is voor een bepaald type weg bij een aantal verschillende verkeersintensiteiten I de verdeling van de snelheden V getekend. Die verdeling lijkt steeds sterk op een normale verdeling.



Als de verkeersintensiteit I toeneemt, verandert ook:
1. de spreiding van de snelheden,
2. de gemiddelde snelheid,
3. het percentage voertuigen dat ongeveer de gemiddelde snelheid rijdt.

b. Geef voor elk van deze drie veranderingen aan of er sprake is van toename.

Examen havo wiskunde A 1992, eerste tijdvak

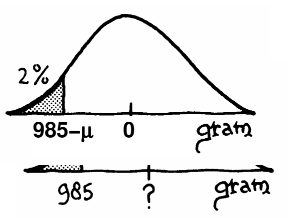
4 De vulmachine

Aan het einde van paragraaf 1 hebben we een probleem laten liggen:

Op welk gemiddelde gewicht moet de machine worden afgesteld opdat aan de EU-richtlijn wordt voldaan dat slechts 2% van de pakken een gewicht heeft onder de 985 gram (SD = 10 gram)? Zie plaatje.

a. Het gemiddelde μ moet gezocht worden, zo dat normalcdf(0,985, μ,10) = 0,02.
Zoek μ door te proberen.

We gaan een manier behandelen, waarop je de waarde van μ rechtstreeks kunt vinden;
Trekken we van alle pakken μ gram af, dan krijgen we de normale verdeling met gemiddelde 0, nog steeds met SD 10. Zie het plaatje hiernaast.



De grenswaarde waar 2% onder ligt, vind je op de GR met invNorm

b. Vind die grenswaarde.

c. Weet je nu ook het gemiddelde μ?

Het kan ook zó:
MATH 10:Solver
eqn: 0 = normalcdf(0,985,x,10) − 0,02
kies een startwaarde voor x (liefst een beetje in de buurt van de gezochte waarde)
ALPHA SOLVE.

d. Vind ook op deze manier het gemiddelde μ.

5 Veronderstel dat de puntenaantallen bij het CSE van een bepaald vak bij benadering normaal verdeeld zijn en dat we weten dat de SD 12 is. Het percentage onvoldoende (54 punten of minder) is 10%.
Bereken het gemiddelde puntenaantal.

6 Uit een onderzoek bleek dat de scores van leerlingen bij het CSE wiskunde A havo bij benadering normaal verdeeld zijn. In 1991 was het gemiddelde 62 punten en 28% van de leerlingen hadden een onvoldoende (54 punten of minder).

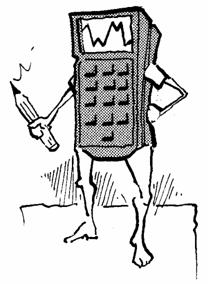
a. Bereken de SD door te proberen.

Er is ook een rechtstreekse methode.

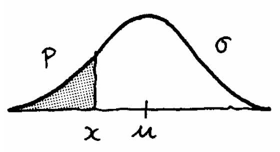
Merk op dat $\frac{score - 62}{SD}$ standaard normaal verdeeld is.

b. Bereken invNorm(0.28 , 0 , 1)

Dat is dus $\frac{54-62}{SD}$. Bereken nu SD.



Een andere manier is met behulp van Solver:
MATH 10: Solver
Equ: 0 = normalcdf(0 , 54 , 62 , x)
c. Bereken de SD op deze manier.



Bij vraagstukken over de normale verdeling draait alles om vier grootheden: het gemiddelde μ, de standaard-afwijking σ, een percentage p en een waarde x. (p is de oppervlakte onder de normale kromme links van x). De grootheden zijn gekoppeld: als er drie bekend zijn, kun je de vierde uitrekenen. In principe zijn er dus vier verschillende typen vragen. Van elke soort maken we een opgave.

7 Bereken de onbekende.
a. x = 17 , μ = 20 , σ = 2 , p = ?
b. x = ? , μ = 20 , σ = 2 , p = 0,1
c. x = 17 , μ = ? , σ = 2 , p = 0,1
d. x = 17 , μ = 20 , σ = ? , p = 0,1

8 a. Gevraagd p
Auto's worden op de lopende band in elkaar gezet. Een robot heeft voor het monteren van een wiel gemiddeld 96 seconden nodig met een standaardafwijking van 5 sec.
Er treedt vertraging op in de totale montagelijn als de robot meer dan 110 seconden nodig heeft.
Bereken in hoeveel procent van de gevallen er vertraging zal optreden.

b. Gevraagd σ
Een robot heeft gemiddeld 80 seconden nodig voor het bevestigen van een bumper, In zo'n 20% van de gevallen is hij al na 77 sec. klaar.
Bereken hoe groot de standaardafwijking is.

c. Gevraagd μ
De robot die de deuren inzet, heeft daarvoor in 8 op de 1000 gevallen meer dan 105 seconden nodig. De standaardafwijking voor deze bewerking bedraagt 4 sec.
Bereken hoeveel seconden de robot gemiddeld doet over zijn karwei.

d. Gevraagd x
De robot die de achterklep in de auto's plaatst, heeft slechts in 0,1% van de gevallen te veel tijd nodig. Gemiddeld heeft de robot 29 seconden nodig met SD 5 sec.
Bereken hoe lang de robot er over mag doen (en dus niet te veel tijd nodig heeft).

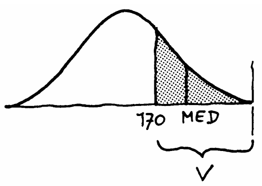
9 In de rechtzaal

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen nieuwe personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm, De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen, omdat ze niet aan deze eis voldeden.

De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van de aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van Volksgezondheid.

Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu = 160{,}4$ cm en standaardafwijking σ.

a. Toon aan dat $\sigma = 7{,}2$ cm.



De groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 noemen we V. De mediaan van de lengte van de vrouwen in V noemen we even MED.

b. Hoeveel procent van de totale groep vrouwen langer dan MED?

c. Toon aan dat MED = 172,6 cm (uitgaande van $\sigma = 7{,}2$ cm en $\mu = 160{,}4$ cm).

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91 sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselecte steekproef van 1000 vrouwen tussen 18 en 65 jaar werd bij 117 vrouwen een lengte gemeten van meer dan 172,6 cm.

Neem aan dat de standaardafwijking ongewijzigd is, dus $\sigma = 7{,}2$ cm.

d. Wat is de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen.

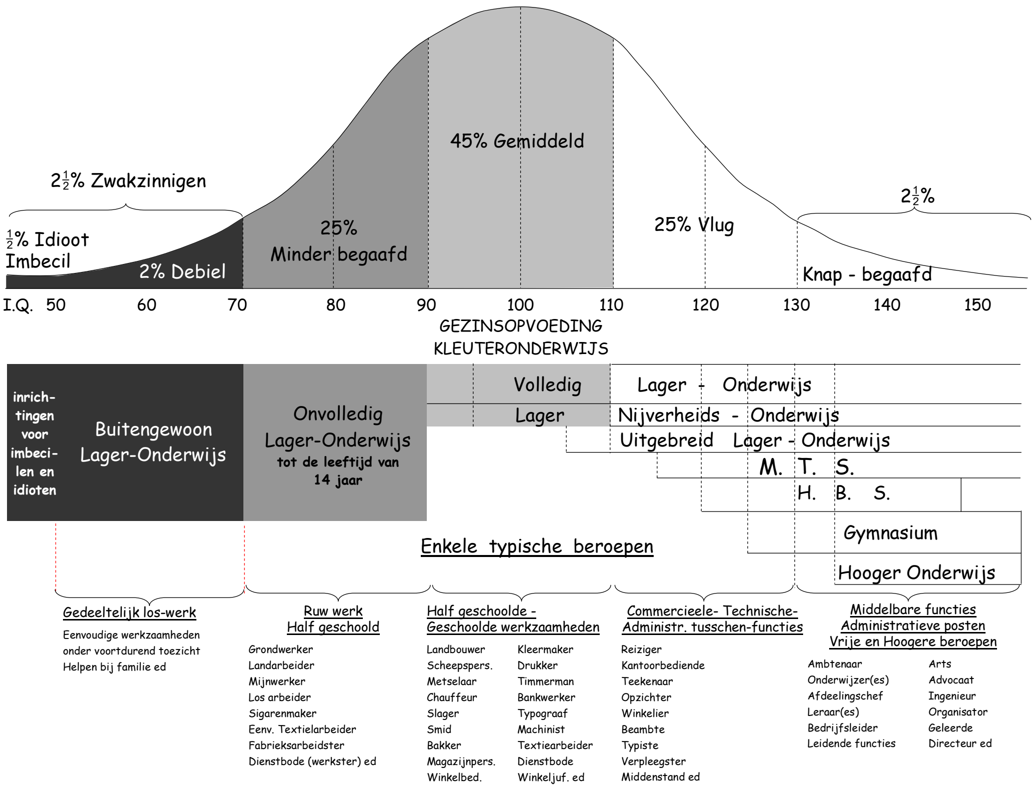
Stel dat voor 1972 gold: $\mu = 164{,}0$ cm en $\sigma = 7{,}2$ cm.

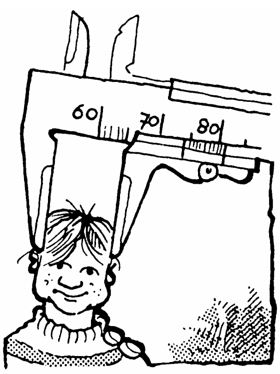
e. Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

Naar: Examen vwo wiskunde A 1990

10 Nogmaals IQ

Onderstaande gegevens hebben we al eerder ontmoet. Toen heb je de SD van de normale verdeling uit de grafiek afgelezen. Nu zijn we ook in staat deze te berekenen.





Het gemiddelde IQ is 100.

a. $27\frac{1}{2}$% heeft een IQ kleiner dan 90.
Bereken uit dit gegeven de SD.

b. $97\frac{1}{2}$% heeft een IQ kleiner dan 130.
Bereken de SD ook uit dit gegeven.

c. De antwoorden in **a** en **b** zijn niet hetzelfde.
Hoe kan dat nou?

11 De EU-voorschriften betreffende vulgewichten zijn in Nederland vastgelegd in het zogenaamde “Hoeveelheids-aanduidingenbesluit” (de Warenwet). De bedoeling van deze normen is dat de consument niet onaangenaam verrast wordt door een artikel waar veel minder in zit dan er op de verpakking staat. De fabrikanten die zich aan deze normen houden tonen dat door op de verpakking aan de inhoudsopgave de letter “e” toe te voegen.

In deze voorschriften worden de volgende begrippen gebruikt:
- nominale hoeveelheid: de hoeveelheid die op het pak vermeld staat (dus bijvoorbeeld 1 kg suiker),
- fout in minus: de hoeveelheid die de werkelijke inhoud kleiner is dan de nominale hoeveelheid.

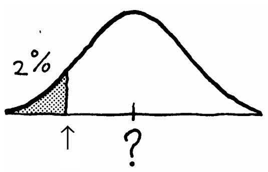
Artikel 3 van de voorschriften zegt ongeveer het volgende:
- de werkelijke hoeveelheid mag gemiddeld niet kleiner zijn dan de nominale hoeveelheid,
- bij een statistische controle (steekproef) mag hoogstens 2% van de pakken een hoeveelheid bevatten die een grotere fout heeft dan de toegelaten fout in minus (zie tabel).

Nominale hoeveelheid Q_n van een e-verpakking in gram of in milliliter	toegelaten fout in minus in % van Q_n	in gr. of ml.
van 5 tot 50	9	--
van 50 tot 100	--	4.5
van 100 tot 200	4.5	--
van 200 tot 300	--	9
van 300 tot 500	3	-
van 500 tot 1000	--	15
van 1000 tot 10000	1.5	--

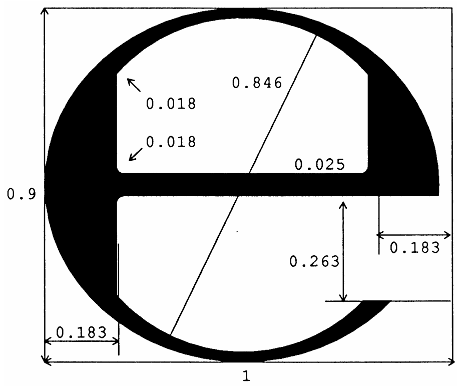
a. Lees af hoe groot de toegelaten fout in minus is van een $1\frac{1}{2}$-literfles cola.
En van een blikje cola van 33 cl.

Pakken koffie worden machinaal gevuld door een machine die bij iedere ingestelde hoeveelheid een SD heeft van 5 gram. We nemen aan dat de gemiddelde hoeveelheid koffie in de pakken gelijk is aan de ingestelde hoeveelheid. We bekijken de pondspakken (500 gram).
b. Bereken op welke hoeveelheid de machine moet worden ingesteld als aan beide eisen van artikel 3 voldaan moet worden.

Naast pondspakken zijn er ook nog halfpondspakken in de handel. Ook deze pakken moeten aan de EU-normen voldoen.
c. Bereken voor halfpondspakken op welke hoeveelheid de machine ingesteld moet worden. Bepaal eerst welke waarde bij de pijl in de figuur hiernaast moet staan.



d. Verbruikt de fabrikant bij halfpondspakken meer, minder of evenveel koffie per nominaal gewicht van 1 kg vergeleken met pondspakken?



De verhoudingen van de letter e als aanduiding dat aan de EU-normen is voldaan.

12 Veel beleggingsmaatschappijen geven bij hun fondsen een verwacht gemiddeld rendement. Daarbij vermelden ze hoe groot het risico is. Een voorbeeld van dergelijke informatie is:

fonds	gem. rendement	rendement ligt met 95% kans tussen
A	8,6%	5,6% en 11,6%
B	10,2%	-1,6% en 22%

De beleggingsmaatschappij gaat er hierbij vanuit dat het rendement normaal verdeeld is.
a. Bereken bij fonds B de kans op een negatief rendement.
b. Bereken bij fonds A de SD van het rendement.

Hierboven zijn de grenzen gegeven waartussen het rendement met een kans van 95% ligt.
c. Tussen welke grenzen ligt het rendement bij fonds A met kans 99%?

5 Keuzeopgaven

1 Dienstkeuring

Voor de dienstkeuring van 1990 meldden zich 95.000 jongens. Een jongen werd afgekeurd als hij een lengte had onder 1.60 μ of boven 2.00 m. De groep van 1990 had een gemiddelde lengte van 182 cm en SD 9 cm.

a. Laat zien dat ongeveer 2850 jongens afgekeurd werden vanwege hun lengte.

De kleding was ingedeeld in Small, Medium en Large. Jongens van 1,60 tot 1,75 meter krijgen Small, van 1,75 tot 1,85 meter Medium en van 1,85 tot 2,00 meter Large.

b. Bereken hoeveel jongens in elk van de klassen zaten.

Eigenlijk had men voor 1990 maar 90.000 jongens nodig. Men heeft overwogen de ondergrens van 1,60 zó te veranderen, dat men nog 90.000 jongens zou overhouden. De bovengrens blijft 2,00 meter.

c. Op welke lengte had men de ondergrens moeten zetten om dit te bereiken?

2 Sollicitatiegesprek

Binnen een grote groep sollicitanten is het IQ normaal verdeeld met $\mu = 115$ en $\sigma = 13$. De personen waarvan het IQ tot de hoogste 15% behoort, komen in aanmerking voor een tweede sollicitatiegesprek.

Vanaf welk IQ komt men in de tweede ronde?

3 Pakken groente

Een machine vult pakken groente met een gemiddelde gewicht van 150 g. De fabrikant wil dat 90% van de pakken een gewicht heeft dat maximaal 5 g afwijkt van deze 150 g. Veronderstel dat de vulgewichten normaal verdeeld zijn.

Welke standaardafwijking zal hij accepteren?

4 Frisdrank

Een robot vult flessen frisdrank met gemiddeld 1,03 liter. Uit een onderzoek van de consumentenbond blijkt dat 2,8% van de flessen minder dan 1 liter bevat.

Bereken de standaardafwijking, ervan uitgaande dat de hoeveelheid frisdrank in een fles normaal verdeeld is.

5 Appels

Een grote partij appels heeft een gemiddeld gewicht van 80 g en een standaardafwijking van 15 g. De gewichten zijn normaal verdeeld. De partij appels wordt verdeeld in vijf gewichtsklassen, die elk evenveel appels bevatten.
Bereken de klassengrenzen.

6 Kraanleertjes

Een fabrikant van wastafels heeft kraanleertjes nodig met en dikte tussen 3,6 en 4,4 mm. Leertjes met een andere dikte zijn voor hem onbruikbaar. Hij heeft de keuze uit twee aanbiedingen:

- leertjes waarvan de dikte normaal verdeeld is met $\mu = 4$ mm en $\sigma = 0{,}2$ mm; die kosten € 15 per 100 stuks,
- leertjes waarvan de dikte normaal verdeeld is met $\mu = 4$ mm en $\sigma = 0{,}3$ mm; die kosten € 13 per 100 stuks.

Welke aanbieding is het aantrekkelijkst voor de fabrikant?

7 Caloriearm dieet

We kijken in deze opgave naar het verband tussen voeding en levensduur van muizen. Daarbij vergelijken we muizen die van jongs af aan een gewoon dieet krijgen met muizen die van jongs af aan een caloriearm dieet krijgen. Een caloriearm dieet bevat slechts de helft van het aantal calorieën van het gewone dieet.
De levensduur van muizen met het gewone dieet is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 33 maanden en een standaardafwijking van 2,7 maanden.
a. Bereken hoeveel procent van deze muizen de leeftijd van 36 maanden bereikt.

Muizen met het caloriearme dieet hebben een gemiddelde levensduur van 45 maanden. Dit hogere gemiddelde wijst er al op dat het caloriearme dieet het verouderingsproces vertraagt. Behalve op de gemiddelde levensduur letten we nog op de “maximale” levensduur in beide groepen muizen; daarmee wordt de levensduur bedoeld die door slechts 0,1% van de muizen overschreden wordt. Bij muizen met het caloriearme dieet is deze “maximale” levensduur 51,5 maanden.
b. Toon aan dat de levensduur van muizen met het caloriearme dieet een SD van 2,1 maanden heeft.

Ook wat de “maximale” levensduur betreft, is er een aanzienlijk verschil tussen beide groepen muizen. Van de muizen met een caloriearm dieet leeft een groot percentage langer dan de “maximale” levensduur met een gewoon dieet.
c. Bereken dit percentage.

8 Zakken aardappelen
Zakken met 2,5 kg aardappelen bevatten natuurlijk zelden precies 2500 gram. Ontevreden klanten beweren dat er vaak te weinig in zit. Een leverancier beweert dat in zijn zakken van 2,5 kg gemiddeld 2540 gram aardappelen zit met een standaardafwijking van 80 gram.

Veronderstel dat de leverancier het bij het rechte eind heeft.

a. Wat is dan de kans dat een willekeurige zak aardappelen minder dan 2500 gram bevat?

Een consumentenvereniging doet een onderzoek. In verschillende winkels worden in totaal vijf van die zakken gekochte veronderstellen nog steeds dat de leverancier het bij het rechte eind heeft
b. Wat is dan de kans dat alle vijf de zakken minder dan 2500 gram bevatten?

Het bleek dat alle vijf zakken minder dan 2500 gram bevatten.
c. Wat denk jij van de bewering van de leverancier?

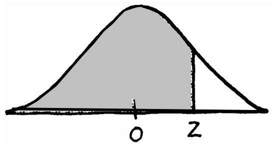
9 Omzet
Het bedrag dat in een week bij de kassa's van een supermarkt binnenkomt, is in zes van de tien weken meer dan € 40.000.
Neem aan dat de wekelijkse omzet normaal verdeeld is met standaardafwijking € 6515.
Bereken de gemiddelde weekomzet.

Tabel van de standaardnormale verdeling: $\mu = 0$ en $\sigma = 1$

voor negatieve waarden van z

z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
-0,0..	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1..	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2..	0,4207	0,4618	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3..	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4..	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5..	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6.-	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7..	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8..	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9..	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0..	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1432	0,1401	0,1379
-1,1..	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2..	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3..	0,0968	0,9951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4..	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5..	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6..	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,7..	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8..	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0303	0,0301	0,0294
-1,9..	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-2,0..	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-2,1..	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,2..	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,3..	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,4..	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,5..	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,6..	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,7..	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,8..	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,9..	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-3,0..	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-3,1..	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,2..	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
-3,3..	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,4..	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,5..	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,6..	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7..	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,8..	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,9..	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

voor positieve waarden van z



z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
0,0..	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1..	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2..	0,5793	0,5382	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3..	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4..	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5..	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6..	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7..	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8..	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9..	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0..	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8568	0,8599	0,8621
1,1..	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2..	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3..	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4..	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5..	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6..	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7..	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8..	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9697	0,9699	0,9706
1,9..	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0..	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1..	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2..	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3..	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4..	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5..	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6..	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7..	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8..	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9..	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0..	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1..	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2..	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,3..	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4..	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5..	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6..	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7..	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8..	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9..	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Antwoorden

Paragraaf 1 Normaal of niet

1 **a.** Bijna 6%
b. De top zit niet in het midden (bij 4 doelpunten), maar links daarvan. Er is een uitloop naar rechts.

2 **a.** Ongeveer 10 °C
b. Er zit een “deuk” n de grafiek bij 13 °C

3 **a.** 90 % (?) Let op de oppervlakte!
b. De grafiek is symmetrisch, heeft één top, hioe verder je van die top komt, hoe lager de grafiek.

4 Niet symmetrisch ; tweetoppig ; middenstukken te steil; top te plat ; topje te uitstekend ; begin en eind te steil.

7 **b.** Als μ groter wordt, verschuift de grafiek naar rechts.

8 **b.** Als σ groter wordt, wordt de grafiek breder en lager.
d. 94,9%

9 **d.** 51%
e. 69%

10 **a.** GR: 53,28% ; tabel: 53,35%
b. GR: 15,87% ; tabel: 15,40%
c. GR: 30,85% ; tabel: 31,25%

11 **a.** 2,28%
d. 25,25%

12 Bij $\mu = 80$ en $\sigma = 4$: tussen 72 en 88 ligt 95,45%.

13 **a.** 68,27%
b. 99,73%

14 **b.** 4,7

15 **c.** SD ≈ 7
d. SD = 6,73

16 **a.** 10,56%
b. 40,13%
c. 78,87%

17 **b.** GR: 12,07% ; tabel: 11,10%
c. GR: 577 ; tabel: 620

18 a. A: 9,12%; B: 65,63%; C: 25,25%.
b. € 15.483,84

19 a. Ongeveer 15.
b. Ongeveer 16%.
c. Ongeveer 4,3%.

20 A, want de kans op meer dan 1000 branduren is bij merk A 79,77% en bij merk B 78,81%.

21 a. Die munten worden bijvoorbeeld in scherp afgestelde muntautomaten gebruikt.
b. 1,24%
c. 25 314 389 munten.

22 a. 6,6807228...%
b. 1006 gram

Paragraaf 2 Het bord van Galton

1. b. Elke route die in bakje -2 eindigt bestaat uit 3 letters R en 7 letters L.
c. In -3, -2, -1 en 0.
d. Nee, er is maar 1 route naar bakje 5 en er zijn 252 routes naar bakje 0.

3 Dit is waarschijnlijk een betere schatting omdat het aantal balletjes veel groter is.

4 a. m = -0,065
b. SD = 1,60
c. In de bakjes -1, 0 en 1 (dat is op een afstand van minder dan één keer de SD ligt) 64% van de waarnemingen; in de bakjes -3 t/m 3 (dat is op een afstand van minder dan twee keer de SD ligt 97,4% van de waarnemingen. Klopt redelijk met de vuistregels.

5 a. 125, 375, 375, 125; $62\frac{1}{2}$, 250, 375, 250, $62\frac{1}{2}$.
b. $1024 = 2^{10}$
c. 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1

6 a. $120 \cdot (\frac{1}{2})^{10} = 0{,}1172$
b. $912 \cdot (\frac{1}{2})^{10} = 0{,}8906$

7 a. $\frac{1}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{1}{16}$
b. $\frac{21}{128}$

8 $\frac{28}{256} \approx 0{,}11$

9 a. $\frac{1}{2}\sqrt{40} = 3{,}1623$; $\frac{1}{2}\sqrt{80} = 4{,}4721$
b. Dat klopt.

10 a. De SD wordt twee keer zo groot, dus de grafiek twee keer zo breed. De oppervlakte moet 1 blijven dus wordt de hoogte twee keer zo klein.
b. Ja, want $80 = 4 \cdot 20$ dus $\frac{1}{2}\sqrt{80} = \sqrt{20}$.

11 a. Voeding, werk, rust, ...
b. Nee, goede leefomstandigheden hangen vaak af van je woonomgeving.

Paragraaf 3 z-waarde

1 Groep 3. In die groep is 8 het hoogste cijfer.

2 b. Niet erg uitzonderlijk, 150 ligt ongeveer 1,4 keer de SD van het te verwachten aantal af.

3 a. Bij de linker verdeling
b. Even uitzonderlijk
c. 1/4 en 1/8
d. 1/4

4 a. (20,1 – 16,6) : 1,4
b. voor waarden die kleiner zijn dan het gemiddelde

5 a. Jongen: 1,67 ; meisje: 2,20.
b. 164 cm
c. 148 cm

6 0,6826... , 0,9544... , 0,9973...

7 a. Verdeling X: de top zit bij 10 en de buigpunten op afstand 2 van 10.
Verdeling X-10: de top zit bij 0 en de buigpunten op afstand 2 van 0.
Verdeling $\frac{X-10}{2}$: de top zit bij 0 en de buigpunten op afstand 1 van 0.
b. Bij de verdeling van X –10 zijn de grenzen ook met 10 verminderd.
Bij de verdeling van $\frac{X-10}{2}$ zijn de grenzen ook door 2 gedeeld.
c. normalcdf(8.6 , 12.6 , 10 , 2) = 0,6612…
d. normalcdf(-1,4 , 2.6 , 0 , 2) = 0,6612…
e. normalcdf(-0.7 , 1.3 , 0 , 1) = 0,6612…

8 0,3336 ; 0,6664 ; 0,7745 ; 0,4474

9 -0,84 , 0,67 , 0,84 , -0,39

10 a. -0,52 ; 0,52
b. Nee

11 a. De reistijd van A naar B van 60 minuten heeft z-waarde $\frac{60-56}{8}$ = 0,5 en ook de reistijd van B naar A heeft z-waarde $\frac{45-42}{6}$ = 0,5.
b. normalcdf(60, 100, 56, 8) = 0,3085…, dus 31 %
Merk op dat normalcdf(0.5 , 100, 0 , 1) = 0,3085…

12 Twee: 56
Drie: -0,43 ; 0,43
Vier: -0,67 ; 0 ; 0,67
Vijf: -0,84 ; -0,25 ; 0,25 ; 0,84

Paragraaf 4 De vier typen

1 a. 3,59%
b. ongeveer 169 cm
d. 1. ten minste 194,8 cm
2. 182 – 169,2 = 12,8 en 182 + 12,8 = 194,8 cm.
e. invNorm(0.25 , 182 , 10) 175,3
invNorm(0.75 , 182 , 10) = 188,7
Dus tussen 175,3 en 188,7 cm.

2 invNorm(0.25,68,12) = 59,91

3 a. 14%
b. 1 en 2 nemen af; 3 neemt toe.

4 a. μ ≈ 1005,5
b. invNorm(0.02,0,10) = -20,537…
c. -20,537… = 985 – μ ,
dus μ = 985 + 20,537… ≈ 1005,5
μ ≈ 1005,5

5 Het *puntenaantal MIN μ* is normaal verdeeld met gemiddelde 0 en SD 12. invNorm(0.1,0,12) = -15,38 = 54 – μ, dus μ = 69,38
of
Met Solver: equ: 0 = normcdf(0,54,x,12) – 0.1

6 a. Ongeveer 13,7

b. Uit $\frac{54-62}{SD}$ = -0,5828… volgt dat SD = 13,7
c. SD = 13,7

7 **a.** p = 0,067
b. x = 17,44
c. μ = 19,6
d. σ = **2,34**

8 **a.** p = 0,26%
b. σ = 3,57 sec.
c. μ = 95,36 sec.
d. x = 44,45 sec.

9 **a.** σ = 7,1641...
b. 4,5%
c. MED = 172,64
d. μ = 164,03 cm.
e. 79,8 %

10 **a.** SD = 16,67
b. SD = 15,31
c. Waarschijnlijk is de verdeling van het IQ niet helemaal normaal. En de percentages en IQ-waarden zijn afgerond

11 **a.** 22,5 ml; 9,9 ml.
b. 500 gram; dan is automatisch aan de 2^e eis voldaan.
c. Meer
d. 4· 251,25 is meer dan 2 · 495,25.

12 **a.** 4,2%
b. 1,53
c. Tussen 4,66 en 12,54

Paragraaf 5 Keuzeopgaven

1 **a.** p = 97% goedgekeurd, dus 2850 jongens afgekeurd.
b. Small: 20.054 ; Medium: 39.160 ; Large: 32.936
c. 165,1 cm

2 128,5

3 Kleiner dan 3,04 g

4 0,0157

5 67,37 ; 76,20 ; 83,80 ; 92,62

6 Eerste aanbieding: van 100 stuks zijn er 95,45 bruikbaar, dus per stuk 15,725 eurocent.

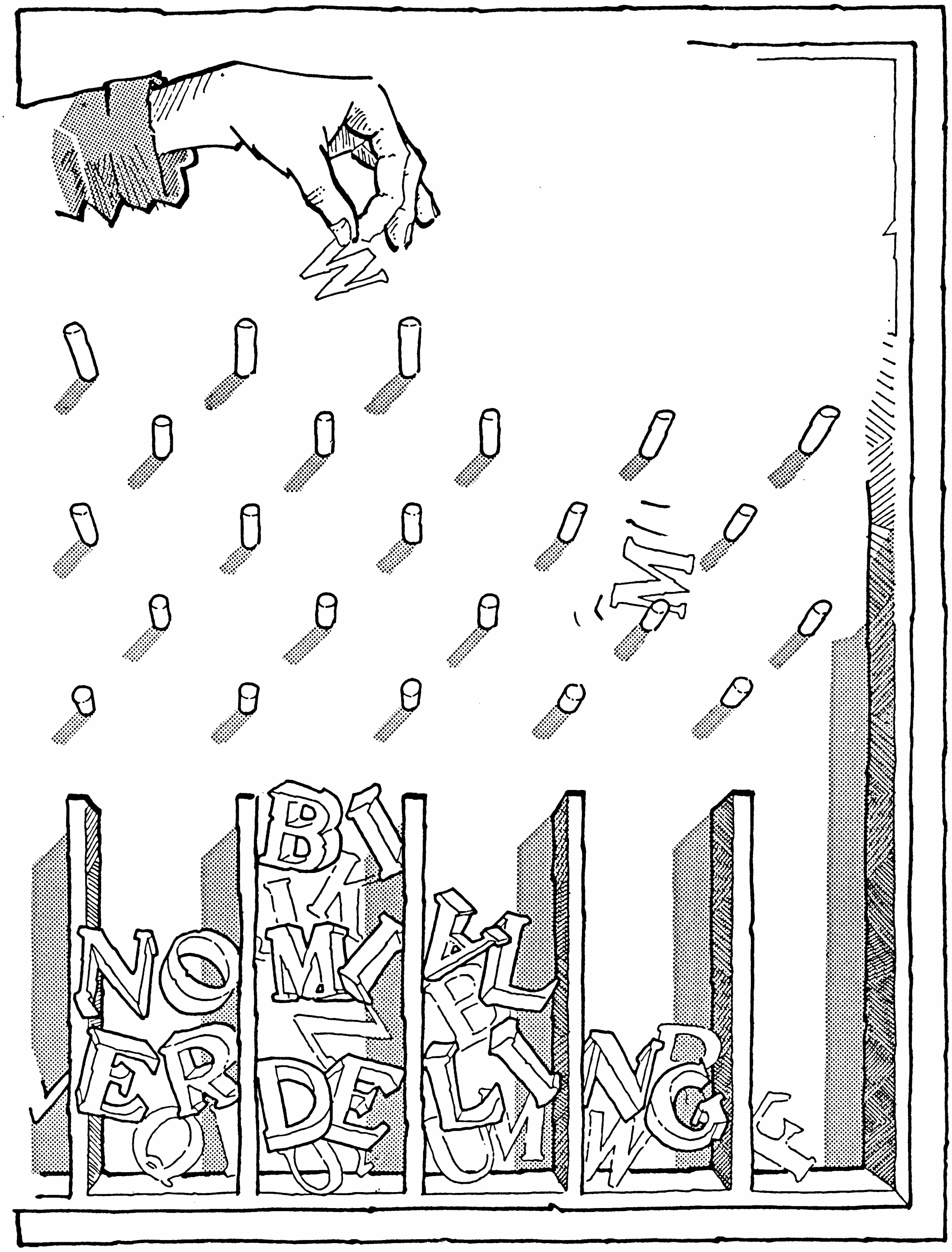
Tweede aanbieding: van 100 stuks zijn er 81,76 bruikbaar, dus per stuk 15,901 eurocent.
De eerste aanbieding is dus aantrekkelijker.

7 **a.** 13,3%
b. invNorm(0.999,0,1) = 3,090… = $\frac{51,5-45}{\sigma}$, dus $\sigma = 2,1$
c. Max. levensduur met gewoon dieet is 41,34 maanden, dus percentage is 96%.

8 **a.** 0,3085…
b. $0,3085\ldots^5 \approx 0,0028$
c. Als de leverancier gelijk heeft, is het zeer uitzonderlijk dat alle vijf de zakken minder dan 2500 gram bevatten (nl. een kwart procent). Dus geloof ik de leverencier niet.

9 De kans op minder dan 40000 euro is 0,4.
invNorm(0.4,0,1) = -0,2533… = $\frac{40000-\mu}{6515}$, dus $\mu = 41651$

De binomiale verdeling



1 Hoeveel mogelijkheden?

* **1 Vijf kinderen**

We bekijken alle mogelijke gezinnen met vijf kinderen. We letten op het aantal jongens en meisjes. Er zijn zes mogelijkheden:

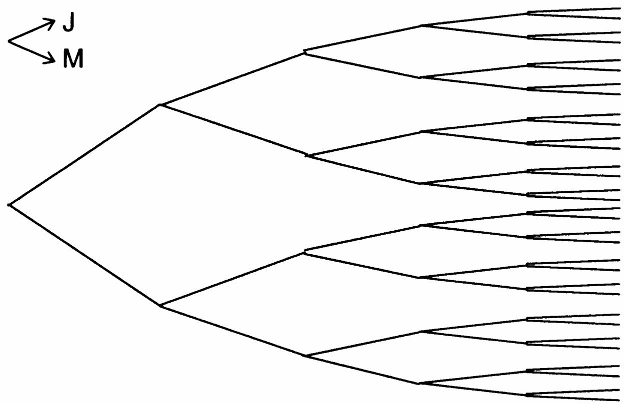
1) vijf jongens,
2) vier jongens en één meisje,
3) drie jongens en twee meisjes,
4) twee jongens en drie meisjes,
5) een jongens en vier meisjes,
6) vijf meisjes.

De kans op een jongen en de kans op een meisje is bij elke geboorte $\frac{1}{2}$.

a. Wat is de kans op mogelijkheid 1)?

b. De kans op mogelijkheid 2) is groter dan de kans op mogelijkheid 1). Dat komt doordat "vier jongens en een meisje" op meerdere manieren kan optreden, en "vijf jongens" maar op een manier kan optreden.
Kun je dat uitleggen?
Op hoeveel manieren kan mogelijkheid 2) optreden?

Hieronder staat een bijbehorend boomdiagram.



c. Hoeveel uiteinden heeft de boom?

d. Zoek alle uiteinden, waarbij er vier jongens en een meisje zijn. Geef die aan op het werkblad.

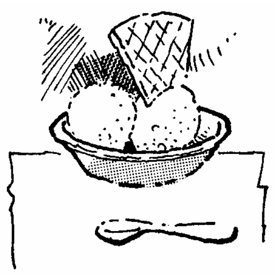
e. Schrijf op het werkblad bij elk uiteinde het aantal jongens.

f. Wat is de kans op elk van de zes mogelijkheden? Schrijf die kansen overzichtelijk in een tabel:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
kans						

g. Hoe kun de zes kansen controleren?

In het boomdiagram kun je tellen op hoeveel manieren de verschillende mogelijkheden kunnen voorkomen. En daarmee vind je de kansen op de mogelijkheden.
We gaan nu eerst onze kennis over tellen opfrissen.

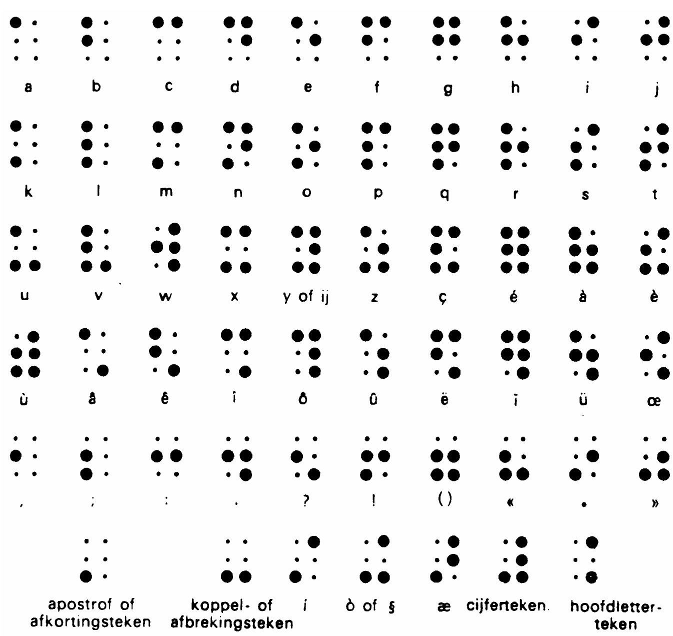


2 Twee bolletjes ijs
Een Italiaanse ijssalon heeft zeven smaken ijs: vanille, mokka, stracciatella, pistache, walnoot, aardbei, citroen. Anneke kiest een bakje met twee bolletjes.
a. Hoeveel mogelijkheden zijn er als de twee smaken verschillend moeten zijn?
b. En hoeveel als ze ook hetzelfde mogen zijn?

3 Letterrijtjes
Wat levert meer rijtjes op:
1) rijtjes van tien letters waarbij alleen de letters A, B en C gebruikt mogen worden; bijvoorbeeld ABBCBAACCA,
2) rijtjes van drie letters waarbij de tien letters A tot en met J gebruikt mogen worden; bijvoorbeeld JEE?

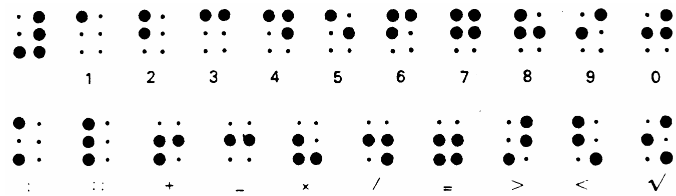
4 Iemand werpt met drie dobbelstenen.
Wat is de kans dat de som van de ogen 10 is?

5 Braille
Voor blinden is het brailleschrift ontwikkeld. Het kan met de vingers “gelezen” worden.

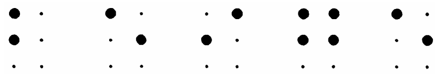


Uit de encyclopedie

Het brailleschrift bestaat uit groepen van zes punten waarmee 63 verschillende combinaties kunnen worden gevormd. Iedere groep van zes punten stelt een teken (letter, cijfer, enz) voor. De punten waaruit een teken is samengesteld, worden in reliëf in speciaal, enigszins stijf papier gedrukt, zodat ze door blinden kunnen worden afgetast. Een blinde die in het lezen van brailleschrift een zekere vaardigheid heeft verkregen, kan de leessnelheid van een normaal ziende evenaren.

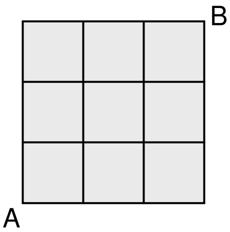


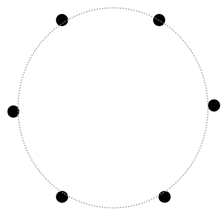
a. Welk woord staat hier?

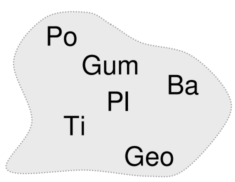


b. Het braillewoord kan ook een getal voorstellen. Welk getal? Is dat niet verwarrend?
c. Volgens de tekst uit de encyclopedie zijn er 63 codes mogelijk. Controleer dat aantal.
d. Er zijn 15 codes mogelijk, waarbij op twee van de zes plaatsen een punt is vet gemaakt.
Controleer dit aantal.
e. Hoeveel codes zijn er met één punt vet, met vier punten vet, met vijf punten vet en met zes punten vet?
f. Weet je nu ook hoeveel codes er zijn met drie punten vet?

0	1	1	0	1	0



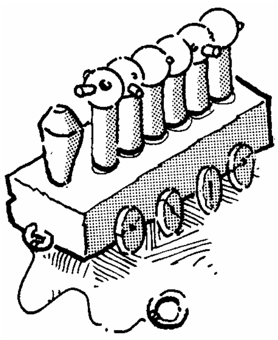




6 **a.** We bekijken de 0-1-rijtjes met drie enen en drie nullen. 0 1 1 0 1 0 is zo'n rijtje. Hoeveel van zulke rijtjes zijn er?
b. We bekijken alle kortste routes van A naar B in het rooster hiernaast. Hoeveel van zulke routes zijn er?
c. Er staan zes stippen in een kring. Door drie van deze zes stippen te verbinden, maak je een driehoek.
Hoeveel driehoeken kun je op die manier maken?
d. Anneke heeft de inhoud van haar etui op tafel uitgestald: een potlood, een gum, een balpen, tipp-ex, plakband, geodriehoek. Iemand grist drie dingen weg.
Hoeveel verschillende grepen van drie uit de zes dingen zijn er?

- We bekijken speciale rijtjes, namelijk die met a nullen en b enen.
- We bekijken speciale routes, namelijk met a stappen naar rechts en b naar boven.
- We bekijken speciale grepen, namelijk waarbij je a dingen pakt en b dingen laat liggen.

Hiervan zijn er evenveel. Dit aantal noteren we met $\binom{7}{3}$; spreek uit: “zeven boven 3”. Het is een zogenaamd combinatiegetal. Op de GR reken kun je dat uitrekenen met nCr in het menu MATH / PRB.



7 Overzichtsopgave

Anneke heeft een treintje met zes plaatsen. De reizigers zijn houten poppetjes in verschillende kleuren. Anneke vindt het leuk op allerlei manieren de reizigers in de trein te plaatsen. Er mogen, net als in het echt, ook plaatsen onbezet blijven. Zelfs de hele trein kan leeg blijven. Maar vol is vol: er kunnen niet meer dan zes passagiers meereizen.

Bepaal in elk van de volgende gevallen op hoeveel manieren Anneke de trein van reizigers kan voorzien.

a. Anneke heeft zes verschillend gekleurde poppen, die allemaal meereizen.

b. Anneke heeft zes dezelfde poppen (waar dus helemaal geen verschil tussen is).

c. Anneke laat precies twee verschillend gekleurde poppen meereizen.

d. Anneke laat twee dezelfde poppen meereizen.

e. Anneke heeft blauwe en rode poppen. Er moeten 3 rode en 3 blauwe poppen meereizen.

f. Anneke heeft blauwe en rode poppen. Er moeten meer rode dan blauwe poppen meereizen en het treintje is helemaal vol.

Commentaar bij opgave 7

Bij vraag **a** heb je te maken met het aantal **rangschikkingen** van zes dingen.

Bij vraag **b** kan er op elke plaats hetzelfde gebeuren: hij kan bezet worden en hij kan leeg blijven.

Bij vraag **c** moet je twee plaatsen van de zes bezetten; de andere blijven leeg. Als je de twee bezette plaatsen verwisselt, heb je een andere manier.

Bij vraag **d** heb je dezelfde manier als je de bezette plaatsen verwisselt.

Bij vraag **e** heb je te maken met een combinatiegetal.

Bij vraag **f** zit er niets anders op dan de verschillende mogelijkheden op te tellen.

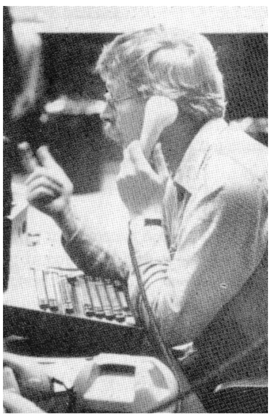
2 Binomiale kansexperimenten

Als er landelijke verkiezingen op komst zijn, worden enquêtebureaus actief: ze proberen de uitslag te voorspellen. Meestal zijn de enquêtebureaus het onderling eens, maar soms verschillen hun voorspellingen aanzienlijk.
In Nederland zijn het NIPO en Inter/view de bekendste enquêtebureaus. Om aan hun voorspellingen te komen, ondervragen ze een groot aantal personen, vaak telefonisch. Ze bellen aselect gekozen mensen op die stemrecht hebben.

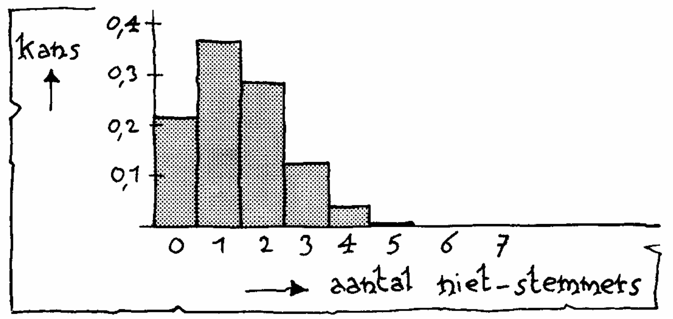
1 Een enquêtebureau voorspelde bij de vorige Tweede-Kamerverkiezingen het stemgedrag van de Nederlanders. Daartoe belde het bureau 1500 mensen op met de vraag of ze zouden gaan stemmen, en zo ja op welke partij.
Achteraf bleek de opkomst 80% te zijn (80% van de stemgerechtigden was gaan stemmen).
a. Hoeveel niet-stemmers kun je zo ongeveer verwachten op het totaal van 1500 ondervraagden?

Een enquêteur belde achtereenvolgens drie mensen op.
b. Hoe groot is de kans dat hij van alle drie te horen kreeg dat ze niet zouden gaan stemmen?
c. Bereken ook de kans op 0, op 1 en op 2 niet-stemmers.
d. Controleer of de som van de vier kansen 1 is.

2 De enquêteur van opgave **1** ondervroeg zeven mensen. Een stemmer noteerde hij als S, een niet-stemmer als N.
a. Een mogelijk resultaat is SSNNSSN.
Bereken de kans hierop.
Wat is de kans op het resultaat NNSSSNS?
Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er op drie niet-stemmers en vier stemmers?
b. Bereken de kans op drie niet-stemmers en vier stemmers.
c. Bereken de kans dat twee van de zeven ondervraagden niet-stemmers waren.

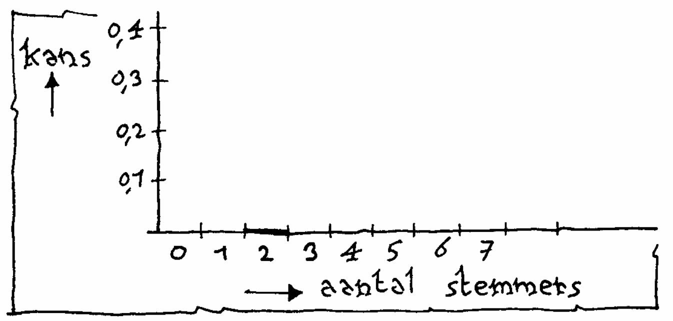


3 We gaan verder met de enquêteur van opgave **2** die zeven stemgerechtigden opbelde.
In het plaatje hieronder kun je aflezen hoe groot de kans is dat de enquêteur 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 of 7 niet-stemmers aantreft. Zo'n plaatje is een **kanshistogram**.



a. Controleer in het kanshistogram je antwoord op de vragen **b** en **c** van de vorige opgave.
b. Je ziet in het kanshistogram dat de enquêteur de grootste kans heeft om 1 of 2 niet-stemmers aan te treffen.
Was dat te verwachten?
c. De kansen op 6 en op 7 niet-stemmers lijken in het kanshistogram 0 te zijn. In werkelijkheid is dat niet zo. De kansen zijn zo klein dat ze met deze schaalverdeling niet meer van 0 zijn te onderscheiden.
Bereken de kans op 6 niet-stemmers.

We kunnen ook letten op het aantal mensen onder de zeven ondervraagden die wel stemmers waren.
d. Wat is de kans op 5 stemmers?
e. Teken het kanshistogram voor het aantal stemmers.



De telefonische enquête van opgave **2** en **3** is een voorbeeld van een speciaal soort kansexperiment:
- een telefoongesprek kent *twee uitkomsten*: S en N,
- de kans op S is bij elk gesprek *hetzelfde, namelijk 0,8,*
- *het telefoongesprek wordt een aantal keer herhaald.*

Dit soort kansexperimenten komt vaak voor.

4 Zeg bij elk van de volgende kansexperimenten:
- wat de twee mogelijke uitkomsten zijn,
- wat de kans is elk van deze twee uitkomsten,
- hoeveel herhalingen er zijn.

a. Hoeveel zessen je gooit met 10 dobbelstenen.
b. Hoeveel jongetjes er geboren worden bij 15 bevallingen.
c. Hoeveel goede antwoorden je hebt als je bij een multiple-choice-test zeven driekeuzevragen beantwoordt.
d. Hoe vaak je 2 kop gooit in een serie van 20 worpen met twee munten.
e. Een roulette tafel heeft 18 rode vakjes, 18 zwarte vakjes en 1 groen vakje.
Hoeveel keer het balletje bij 20 keer draaien op de roulettetafel op rood komt.
f. Een geneesmiddel werkt bij 90% van de patiënten. Hoeveel van tien patiënten die het geneesmiddel gebruiken er baat bij hebben.

Als je problemen hebt met opgave **4**, helpt het misschien de situatie te vertalen naar een “vaasmodel”. De vertaling bij onderdeel **a** ziet er zo uit:
- een vaas met zes ballen, één witte en vijf rode,
- pak er 10 keer een bal uit, met terugleggen,
- let op het aantal keer dat je een witte bal pakt.

Als opgave **4** niet lukte, probeer het dan nog eens door de situatie naar een vaasmodel te vertalen.


Jacob Bernoulli 1654-1705
hoogleraar wiskunde
te Basel

In 1713 verscheen het eerste leerboek over kansrekening: 'Ars conjectandi' van Jacob Bernoulli, wat betekent 'de kunst van het gissen'. Hierin staat een studie van dit soort kansexperimenten. Een experiment waarbij je maar twee uitkomsten hebt, wordt dan ook wel een Bernoulli-experiment genoemd. De ene uitkomst heet wel 'succes', de andere 'mislukking'.
Als je een Bernoulli-experiment een aantal keer (onafhankelijk van elkaar) herhaalt, heb je een zogenaamd binomiaal kansexperiment.
'Binomiaal' betekent letterlijk 'tweetermig'.

Een **binomiaal kansexperiment** is dus een kansexperiment dat vertaald kan worden naar een vaas met balletjes in twee kleuren. Daaruit pak je aselect met terugleggen een aantal balletjes. Je telt het aantal balletjes die je gepakt hebt van een van de kleuren.

5 Opgave **2** en **3** gingen over een binomiaal kansexperiment: kans op succes = 0,8 ; aantal herhalingen = 7.
In opgave **4** staan nog zes voorbeelden van een binomiaal kansexperiment.
Verzin zelf minstens vijf voorbeelden. Vermeld bij elk voorbeeld de kans op succes en het aantal herhalingen. (Je kunt voorbeelden halen uit de schoolwereld, sport of spel, de gezondheid, de misdaad, het weer, enzovoort.)

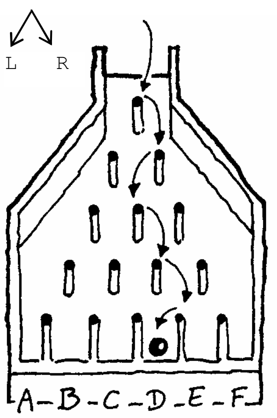
Een zeker binomiaal kansexperiment bestaat uit 18 herhalingen, elk met succeskans $\frac{2}{7}$.

Dan is de kans op 6 successen: $\binom{18}{6} \cdot (\frac{2}{7})^6 \cdot (\frac{5}{7})^{12}$.

Hierin is $(\frac{2}{7})^6 \cdot (\frac{5}{7})^{12}$ de kans op eerst 6 successen en daarna 12 mislukkingen (in die volgorde)
en is $\binom{18}{6}$ het aantal volgordes voor 6 successen en 12 mislukkingen.

Notatie
De letter P wordt internationaal voor "kans" gebruikt (het is de eerste letter van het Latijnse woord *probabilitas).* Als we het aantal successen S noemen, kunnen we de kans op 6 successen zo noteren: $P(S = 6)$.

6 **a.** Een multiple-choicetest bestaat uit tien vragen, elk met vier antwoordmogelijkheden. Een leerling maakt de test volledig op de gok. S is het aantal vragen dat hij goed beantwoordt.
Bereken $P(S = 3)$.
b. Op een dag worden in een ziekenhuis negen kinderen geboren. S is het aantal meisjes. De kans op een meisje is $\frac{1}{2}$.
Bereken $P(S = 6)$.



7 Een bord van Galton heeft vijf rijen pinnen. Een kogeltje dat bovenaan wordt losgelaten raakt op elke rij een pin.
a. Bij elke pin heeft het kogeltje evenveel kans om naar links als om naar rechts te vallen.
Bereken de kans dat het kogeltje in bak C terecht komt.
b. Bij elke pin heeft het kogeltje kans 0,7 om naar rechts te vallen.
Bereken de kans dat het kogeltje in bak E terecht komt.
c. In welk bakje verwacht je in de situatie van **b** dat de meeste kogeltjes terecht zullen komen? Toelichten.

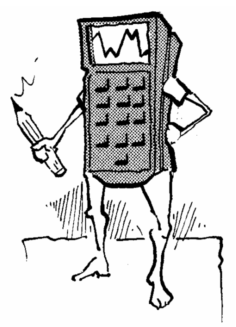
8 Een binomiaal kansexperiment heeft vijf herhalingen, elk met succeskans 0,3. S is het aantal successen.
We maken een kanstabel:

k	0	1	2	3	4	5
P(S=k)	0,1681	0,3602				

a. Controleer de kansen die al zijn ingevuld.
b. Bereken de ontbrekende kansen.
c. Maak een kanshistogram, waarbij horizontaal het aantal successen wordt uitgezet.

9 Bij korfbaltraining probeert iemand vanaf de strafworpstip de bal door de korf te werpen. Op grond van zijn vroegere prestaties weten we dat hij bij elke poging 45% kans heeft om raak te schieten. Het aantal treffers noemen we S.
Schrijf de volgende kansen in de gedaante P(S =_) =
$\binom{\cdot}{\cdot} \cdot (\_)^{-} \cdot (\_)^{-}$; je hoeft de kansen niet uit te rekenen.

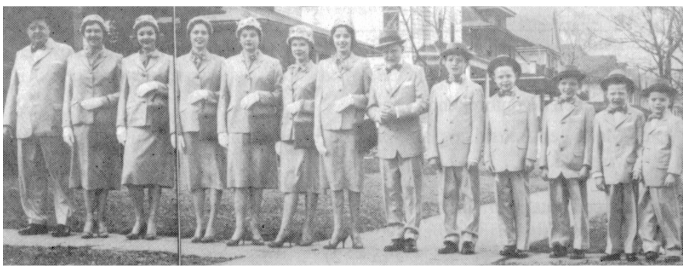
a. De kans op drie treffers bij vijf pogingen.
b. De kans op drie treffers bij twaalf pogingen.
c. De kans op k treffers bij n pogingen.



Met de GR kun je ook kansen bij een binomiaal kansexperiment uitrekenen. Dat gaat sneller dan met de formule en je hebt minder kans op fouten. Overigens blijft het wel belangrijk dat je formule goed begrijpt.
Voorbeeld
We berekenen de kans op 2 successen van opgave **8** met de GR als volgt:
DISTR 0:binompdf(5,0.3,2) ENTER.
Je hoeft dus alleen achter binompdf(in te vullen: 5 (het aantal herhalingen), 0.3 (de succeskans) en 2 (het aantallen succes). Ga na dat je antwoord 0,3087 krijgt.

10 Bereken met de GR de kansen van opgave **9a** en **b**.

11



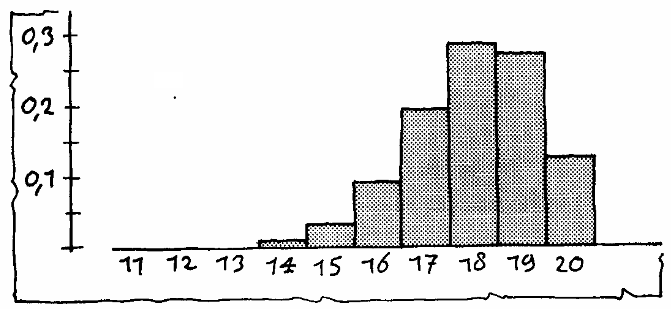
Het gezin van Thomas V. Brennan in de Amerikaanse stad Oak Park, Illinois, is zeldzaam: vijf dochters achter elkaar en toen zes zonen. De kans op deze rangschikking van elf kinderen is 1 op 2048.

Stel dat een gezin elf kinderen heeft.
a. Wat is de kans dat de oudste 5 meisjes zijn en de jongste 6 jongens? Is de kans die naast de foto vermeld staat correct?
b. Bereken de kans dat het gezin in totaal vijf meisjes telt.

12 In een vaas zitten vijf rode en tien witte ballen. Er worden drie ballen uit de vaas genomen.
a. Bereken de kans op twee witte ballen, als er *met* terugleggen wordt gepakt.
b. Dezelfde vraag zonder terugleggen.
c. In welk van deze twee gevallen is het experiment binomiaal?
d. We veranderen de inhoud van de vaas: 1 rood en 2 wit. Maakt dat iets uit voor de kansen bij het binomiale kansexperiment?
En bij het andere kansexperiment?

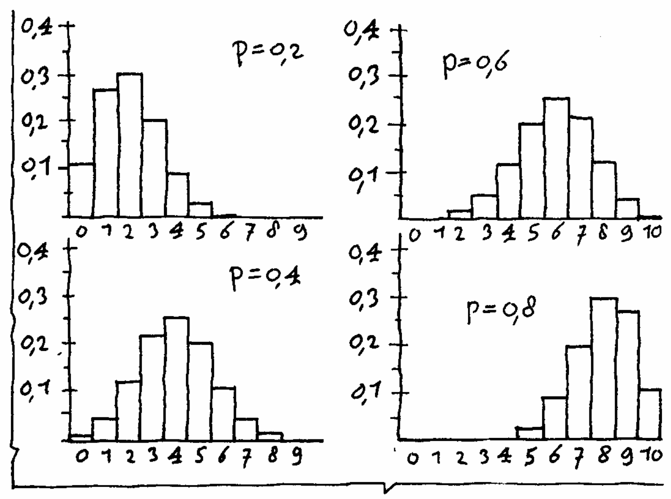
13 De deltawerken zijn uitgevoerd om een herhaling van de watersnoodramp van 1953 te voorkomen. De bekroning van de deltawerken is de Oosterscheldedam. Deze pijlerdam bestaat uit een serie van 62 gigantische schuiven, opgehangen tussen 65 pijlers, die bij zwaar weer worden neergelaten. Dan dienen ze als stormvloedkering. Elk van de schuiven wordt onafhankelijk van de andere bestuurd door een computer.
De stormvloed wordt alleen maar gekeerd als alle 62 schuiven neergelaten zijn. Wanneer een schuif niet gesloten wordt, gaat het mis. De kracht van het water kan dan het hele bouwwerk ruïneren. Gelukkig is de kans dat een individuele schuif niet werkt erg klein.
a. Hoe groot is de kans dat het mis gaat, als de kans 1% is dat een individuele schuif niet werkt?
b. Volgens de bouwers van de dam is de kans dat een individuele schuif niet werkt 1 op 1 000.
Is dat voor de Zeeuwen een geruststellende mededeling?

14 Een binomiaal kansexperiment heeft twintig herhalingen. Hieronder staat het kanshistogram van het aantal successen S (dat is horizontaal uitgezet).



a. Heb je een vermoeden hoe groot de kans op succes ongeveer is (in één decimaal)?
b. Gegeven is dat P(S = 17) = 0,1901.
Controleer hiermee of je vermoeden juist is.
c. Bepaal met het kanshistogram hoe groot P(S ≥ 18) ongeveer is.

15 Hieronder staan kanshistogrammen van vier binomiale kansverdelingen. Steeds is het aantal herhalingen tien. De succeskansen p staan bij de histogrammen vermeld.



a. Zoek bij elk histogram het aantal successen met de grootste kans. Zijn die aantallen logisch?
b. Welke histogrammen zijn elkaars spiegelbeeld?
Kun je dat verklaren?
c. Bij welke succeskans is het kanshistogram symmetrisch?

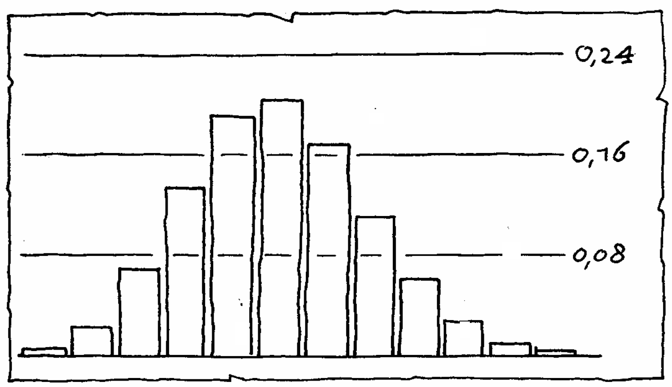
3 Cumulatieve binomiale kansen

1 Een multiple-choicetest bestaat uit 20 vierkeuzevragen. Iemand beantwoordt de vragen volkomen op de gok. We zijn geïnteresseerd in het aantal goede antwoorden. Dat kan zijn: 0, 1, 2,...., 20. Het is een binomiaal kansexperiment met 20 herhalingen en met succeskans 0,25.
De kans op elk van deze 21 mogelijkheden vind je in de linker tabel hieronder.

aantal goede =	kans	aantal goede ≤	kans
0	0,0032	0	0,0032
1	0,0211	1	0,0243
2	0,0670	2	0,0913
3	0,1339	3	0,2252
4	0,1896	4	0,4148
5	0,2024	5	0,6172
6	0,1686	6	0,7858
7	0,1124	7	0,8982
8	0,0609	8	0,9591
9	0,0270	9	0,9861
10	0,0100	10	0,9961
11	0,0030	11	0,9991
12	0,0007	12	0,9998
13	0,0002	13	1,0000
14	0,0000	14	1,0000
15	0,0000	15	1,0000
16	0,0000	16	1,0000
17	0,0000	17	1,0000
18	0,0000	18	1,0000
19	0,0000	19	1,0000
20	0,0000	20	1,0000

a. Bepaal uit de linker tabel de kans op 4 of minder goede
b. De kans op 4 of minder goede kun je ook direct uit de rechter tabel aflezen. Doe dat.
c. Hoe kun je de rechter tabel uit de linker maken? Controleer de eerste drie kansen in de rechter tabel.

Hieronder staat een kanshistogram voor het aantal goede antwoorden.



d. In de rechter tabel vind je dat de kans op 5 of minder goede gelijk is aan 0,6172.
Wat is de bijbehorende oppervlakte in het histogram?
e. In de rechter tabel vind je ook dat de kans op 6 of minder goede gelijk is aan 0,7858.
Wat is de bijbehorende oppervlakte in het histogram?
f. Hoe vind je met de kansen in **d** en **e** de kans op precies 6 goede?
Hoe kun je de linker tabel uit de rechter tabel maken?

2 Nog even verder met de multiple-choicetest van opgave **1**. We willen weten wat de kans is op meer dan 4, maar minder dan 10 goede antwoorden; dus 5, 6, 7, 8 of 9 goede.
a. Bepaal die kans uit de linker tabel.
b. Bepaal die kans uit de rechter tabel.
c. Welk van de twee manieren heeft je voorkeur?

Soms kost het meer rekenwerk om met de linker tabel een kans te vinden dan met de rechter tabel. Het omgekeerde komt nooit voor. Daarom werkt men vaak met kansen zoals de rechter tabel. Dat zijn dus niet de kansen op de aantallen successen zelf, maar de kansen op alle mogelijkheden van 0 tot en met een aantal successen opgeteld. We noemen dat een **cumulatieve kanstabel** (cumulatief = stapelend).

3 Een voorbeeld, hoe je met cumulatieve kansen werkt. Hieronder staat de cumulatieve tabel bij een binomiaal kansexperiment met 6 herhalingen en succeskans 0,4.
S is het aantal successen.

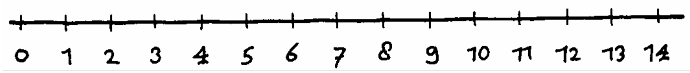
aantal successen (=k)	P(S ≤ k)	aantal successen (=k)	P(S ≤ k)
0	0,0467	4	0,9590
1	0,2333	5	0,9959
2	0,5443	6	1,000
3	0,8208		

Bepaal uit de tabel:
a. $P(S = 4)$,
b. Bepaal $P(S > 3)$,
c. Bepaal $P(2 \leq S \leq 5)$.

Cumulatieve kansen bij een binomiaal kansexperiment zitten ook op de GR. Als voorbeeld berekenen we de kans $P(S \leq 3)$ van de vorige opgave:
DISTR A:binomcdf(6,0.4,3) ENTER.
Ga na dat je het antwoord 0,8208 krijgt.
“cdf” staat voor “cumulative distribution function”.

4 Een binomiaal kansexperiment bestaat uit 14 herhalingen. S is het aantal successen. p is de succeskans.
Bepaal de volgende kansen met de GR:
a. $P(S < 7)$ als $p = 0{,}15$,
b. $P(1 < S < 4)$ als $p = 0{,}25$,
c. $P(S < 8)$ als $p = 0{,}15$,
d. $P(3 < S < 8)$ als $p = 0{,}30$.

5 Een binomiaal kansexperiment heeft 14 herhalingen en succeskans 0,3.
a. Welke waarden kan S aannemen?
Geef op een getallenlijn als hieronder de waarden aan die groter dan of gelijk aan 7 zijn.



Bepaal de kans $P(S \leq 6)$.
b. Bepaal $P(S \geq 7)$.
c. Bepaal de volgende kansen:
$P(S \geq 2)$ als $p = 0{,}30$,
$P(S > 4)$ als $p = 0{,}20$,
$P(S > 9)$ als $p = 0{,}25$,
$P(S \geq 10)$ als $p = 0{,}10$.

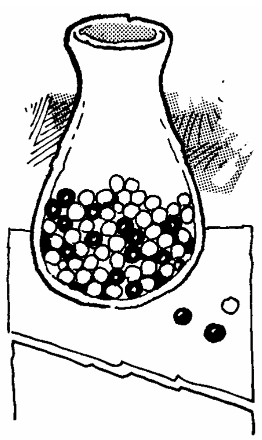
6 Bepaal de volgende kansen.
a. $P(S \leq 12)$ voor $n = 20$ en $p = 0{,}4$
b. $P(S < 8)$ voor $n = 10$ en $p = 0{,}6$
c. $P(S = 19)$ voor $n = 20$ en $p = 0{,}2$
d. $P(S \geq 4)$ voor $n = 12$ en $p = 0{,}5$
e. $P(S > 7)$ voor $n = 100$ en $p = 0{,}1$
f. $P(11 < S < 14)$ voor $n = 17$ en $p = 0{,}8$

7 We werpen tien keer met een dobbelsteen en letten op het aantal zessen in die tien worpen.
a. Het experiment: "Tien keer werpen met een dobbelsteen; tel het aantal keer 6 ogen" is een binomiaal kansexperiment.
Wat is het aantal herhalingen n?
Wat is "succes"?
Wat is de succeskans p?
b. Het kan gebeuren dat er drie of meer zessen bij zijn.
De kans daarop noteren we zó: P(S _ _) (vul in).
Hoe groot is die kans?

8 Zo'n 10% van de auto's die over de Nederlandse wegen razen, vertoont technische gebreken. Regelmatig worden door de politie uitgebreide technische keuringen uitgevoerd langs de kant van de autoweg.

a. Er worden 100 auto's gecontroleerd.
Hoe groot is de kans dat er bij meer dan dertien auto's gebreken worden geconstateerd?

Gemiddeld 1 op de 100 auto's is zo gammel dat hij van de weg wordt gehaald en naar de sloper gaat.
b. Hoe groot is de kans dat bij 100 controles er minstens één auto rijp is voor de sloop?



9 Uit een vaas met 30 witte en 20 rode ballen wordt een aantal keren met teruglegging een bal getrokken.
a. Hoe groot is de kans dat bij 15 trekkingen de meerderheid van de getrokken ballen rood is?
b. Bereken bij 12 trekkingen de kans op zes witte ballen.

10 Bij een eerlijke munt zijn de kansen op "kop" en "munt" gelijk. Je mag dus verwachten dat in ongeveer 50% van de worpen "kop" zal worden gegooid. De kans is groot dat het aantal keer kop tussen de 40% en 60% van het aantal worpen ligt.
a. We doen 10 worpen.
Bereken de kans dat het aantal keer "kop" tussen de 40% en 60% ligt.
b. Dezelfde vraag voor 20 worpen, voor 50 worpen en voor 100 worpen.
c. Hoe groter het aantal worpen, des te groter de kans dat het aantal keer "kop" tussen de 40% en 60% ligt.
Kun je dat verklaren?

11 Bij een landelijk onderzoek is gebleken dat 15% van alle middelbare scholieren regelmatig spijbelt.
a. Hoe groot is de kans dat in een havo5-klas van twintig leerlingen er meer dan 4 zijn die regelmatig spijbelen?
b. Bij vraag **a** heb je de binomiale kanstabel gebruikt.
Maar hebben we hier wel te doen met een binomiaal kansexperiment? Waarom is dat twijfelachtig?

12 In een bedrijf worden schroeven gefabriceerd. Volgens de bedrijfsleider is 5% van de productie niet bruikbaar. De slechte exemplaren worden niet verwijderd, omdat de controle daarop te veel geld kost. De schroeven worden in doosjes van 50 stuks verkocht aan de winkeliers.
a. Hoe groot is de kans dat een doosje meer dan vier onbruikbare schroeven bevat?
b. Een winkelier heeft een partij van 500 doosjes schroeven besteld bij de fabriek.
Hoeveel doosjes met 50 bruikbare schroeven kan hij daarbij verwachten?

13 Een docent geeft een multiple-choicetest die bestaat uit twintig vierkeuzevragen.
a. Stel dat hij voor elk goed beantwoorde vraag een halve punt toekent.
Hoe groot is de kans dat iemand die alle antwoorden gokt als cijfer een 4 of hoger krijgt?

b. De docent vindt dat een gokker ten hoogste 1% kans mag hebben om een cijfer 4 of hoger te halen.
Bij welk aantal goede antwoorden moet hij dan het cijfer 4 toekennen?

14 Om de kooplust te stimuleren, heeft de winkeliersvereniging "Ons Eigen Belang" besloten een grote decemberactie op poten te zetten. Er wordt een groot aantal envelopjes in omloop gebracht via de deelnemende winkels. In 5% van de envelopjes zit een waardebon, goed voor een uitgebreid kerstpakket ter waarde van € 50. Nog eens 10% bevat een waardebon ter waarde van € 10, vrij te besteden in een van de winkels. De rest van de envelopjes is leeg.
Voor iedere € 25 aan boodschappen krijgt een klant een envelopje.
a. Iemand heeft voor 312 euro boodschappen gedaan. Hoe groot is de kans dat vier van de gekregen envelopjes een waardebon bevatten?
b. Hoeveel zullen de winkeliers door deze actie naar schatting kwijt zijn aan prijzengeld per 1000 euro omzet?

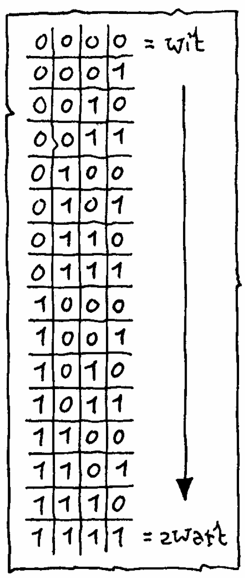
15 Hernia-operaties worden alleen uitgevoerd als alle andere methoden om de pijnen te bestrijden hebben gefaald. Reden: een operatie heeft maar 70% kans van slagen. Mislukt een operatie, dan kan de kwaal daardoor nog verergeren.
In een ziekenhuis worden per maand 18 hernia-operaties uitgevoerd.
Bereken de kans dat ten minste 80% van de operaties zal slagen.

16 Een bollenkweker uit Hillegom biedt de mogelijkheid om schriftelijk pakketten bloembollen te bestelen. De bestelling wordt na betaling via het eigen postorderbedrijf naar de klant gestuurd. Omdat er ongezien gekocht wordt, garandeert de kweker dat minstens 90% van de bestelde bollen tot bloei komt. Als dat niet gebeurt, heeft de klant recht op een gratis pakket van dezelfde samenstelling.
Veronderstel dat de kweker met de kwaliteitsgarantie bedoelt dat iedere afzonderlijke bol een bloeikans van 90% heeft.

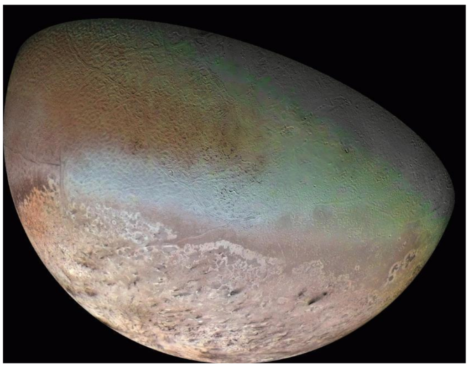
a. Je koopt een pakket van 20 bollen.
Hoe waarschijnlijk is het dat ten minste 90% van de bollen in bloei komt?
b. Hoe groot is de kans op een gratis nieuw pakket, als je een pakket van 50 bollen koopt?

17 In de vorige opgave heb je gezien dat een bloeigarantie van 90% niet slim is, als de bloeikans van een individuele bol ook 90% is. Stel nu dat de bloeikans per bol 95% is.
a. Bereken de kans dat een pakket van 20 stuks niet aan de 90%-garantie voldoet.

Per jaar worden door de kweker ongeveer 1000 pakketten van 20 stuks verkocht en 1500 pakketten van 50 stuks. Van de klanten die recht hebben op een gratis nieuw pakket, maakt zo'n 60% gebruik van de garantiebepalingen.
b. Hoeveel pakketten van iedere soort zal de kweker achter de hand moeten houden om aan zijn garantieverplichtingen te kunnen voldoen?



18 Een foto wordt naar de aarde overgeseind door middel van een binaire code. Daartoe wordt een opname eerst met verticale en horizontale lijnen verdeeld in een groot aantal vierkantjes. Van elk afzonderlijk vierkantje wordt de zwartingsgraad gemeten en uitgedrukt op een schaal van 0 (=volledig wit) tot 15 (=volledig zwart). Zo kunnen 16 verschillende grijstinten worden onderscheiden. De grijstint van elk vierkantje wordt, als binair codewoord van lengte vier, overgeseind naar de aarde. De 16 gebruikte codewoorden staan hiernaast.
Bij het overseinen kunnen onderweg storingen optreden, waardoor op aarde een andere code wordt ontvangen dan door de Voyager 2 is verstuurd. Veronderstel dat de kans op een verstoord symbool 5% is; dat wil zeggen dat een "0" als "1" wordt ontvangen of omgekeerd.
De Voyager verzendt het codewoord 1111 (=zwart).



In 1977 werd de Voyager 2 gelanceerd voor een reis langs de planeten. Ruim twaalf jaar later (augustus 1989) passeerde hij Triton, een van de manen van Neptunus, en stuurde o.a. deze foto van Triton naar de aarde.

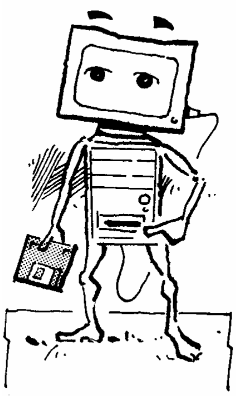
a. Hoe groot is de kans dat op aarde wordt ontvangen als 0101 (= tamelijk lichtgrijs)?
b. Bereken de kans dat het codewoord goed ontvangen wordt.
c. Bereken de kans dat precies een van de vier enen verkeerd ontvangen wordt.

Een complete foto is opgebouwd uit ongeveer 10.000 vierkantjes.
d. Toon aan dat zo ongeveer 1855 vierkantjes verkeerd ontvangen worden (dat is dus 19%).

Een klein stukje Mars, een foto van de Mariner. De afwijkend getinte puntjes zijn fouten. De grote rots boven in het midden is ongeveer 1,5 km breed.

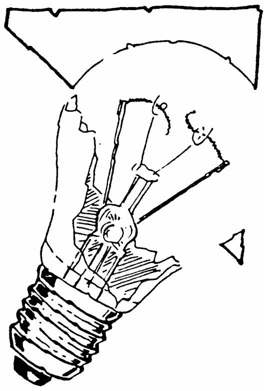
19 We gaan verder met het overzenden van foto's naar de aarde via een binaire code. Omdat het foutpercentage zo groot is, is de foto vrijwel waardeloos. Men probeert dus het foutpercentage te verkleinen. We bekijken daarvoor een methode: elk symbool wordt drie keer achter elkaar overgeseind. Het codewoord 0101 wordt dus verstuurd als 000111000111. Dit kan op aarde bijvoorbeeld ontvangen worden als 100101000110 (er zijn dus drie fouten opgetreden). In elk groepje van drie bepaalt het symbool wat het meest voorkomt, welk symbool is bedoeld. Dus 100 wordt geïnterpreteerd als 0, 101 als 1, 000 als 0 en 110 als 1; het codewoord wordt dus gelezen als 0101, precies wat ook was verstuurd.
a. Laat zien dat de kans dat een symbool goed overkomt op aarde 0,9928 is.
b. Hoe groot is de kans dat een codewoord van lengte 4 (overgeseind als 12 symbolen) goed overkomt op aarde?
c. Waarom wordt een symbool drie keer achter elkaar overgeseind en niet twee of vier keer?

Ais een symbool vijf of meer keer achter elkaar wordt overgeseind, is de kans op een goede ontvangst natuurlijk nog groter. Wat het originele symbool was, wordt aangewezen door de meerderheid van de vijf ontvangen symbolen.
d. Wat is dan de kans dat een symbool goed overkomt?
e. Wat is dan de kans dat een codewoord van lengte 4 helemaal goed overkomt?
f. Wat is het nadeel van “vijf keer herhalen” ten opzichte van "drie keer herhalen"?



Met het computerprogramma *Kop of Munt* kun je zelf een binomiale verdeling simuleren. Je vindt dat op www.wageningse-methode.nl/ Kies software / Kans.
Je kiest het aantal herhalingen n (= aantal munten) en succeskans p (kans op Kop).

4 Met en zonder terugleggen



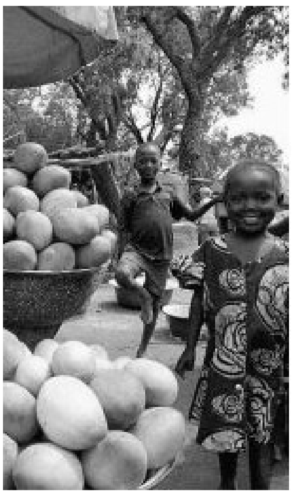
1 Van een doos met tien lampen werken er twee niet. Een monteur controleert er drie van de tien. Het pakken van een defect exemplaar noemen we een succes.
a. De monteur legt elk gecontroleerd exemplaar opzij. Maak een tabel van de kansverdeling van het aantal successen.
b. Veronderstel nu dat de monteur elk gecontroleerd exemplaar weer terug doet in de doos. (Dat is natuurlijk dom, maar dat doet er nu niet toe.)
Maak ook een tabel van de kansverdeling van het aantal successen in dit geval.

2 Dezelfde vragen als in opgave **1**, maar nu voor een doos met 1000 lampen waarvan er 200 defect zijn.

Bij een trekking zonder terugleggen veranderen de kansen elke keer dat er een trekking wordt uitgevoerd. De kansverdeling van het aantal successen is daarom anders dan bij een trekking met terugleggen. Bij opgave **1** is dat goed te zien.

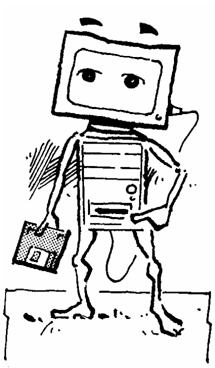
3 Bij opgave **2** zijn de verschillen tussen "met terugleggen" en "zonder terugleggen" veel kleiner.
Kun je dat verklaren?

4 Anneke koopt zes appels op de markt. De marktkoopman pakt zes appels uit een kist met twintig appels. In die kist zitten drie rotte exemplaren. Thuis legt Anneke de appels op de fruitschaal en constateert dan eventuele rotte vruchten.
a. Is hier sprake van met of zonder terugleggen?
b. Maak een histogram van de kansverdeling van het aantal rotte appels.
c. Bereken de verwachtingswaarde van het aantal rotte appels dat Anneke heeft gekocht.



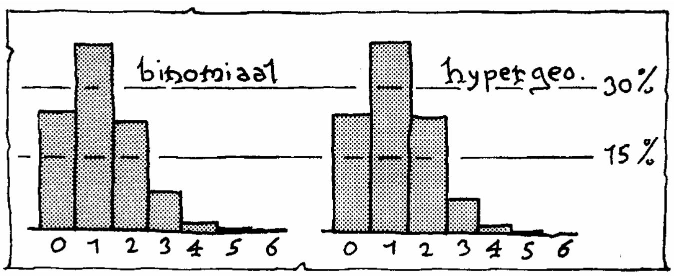
5 Anneke koopt op maandag tot en met zaterdag elke dag een appel op de markt. Elke dag heeft de marktkoopman een kist met twintig appels, waarvan er drie rot zijn. Hij pakt elke dag de appel uit die kist. Anneke eet de appel op in de bus naar huis en constateert dan eventueel dat hij rot is. We letten op het aantal rotte exemplaren dat Anneke in een week koopt.

a. Is hier sprake van met of zonder terugleggen?
b. Maak een histogram van de kansverdeling van het aantal rotte appels.
c. Bereken de verwachtingswaarde van het aantal rotte appels dat Anneke heeft gekocht.



*De opgaven **4** en **5** lijken veel op elkaar, maar er zijn ook duidelijke verschillen. De kansverdeling bij opgave **5** is een binomiale kansverdeling, de kansverdeling van opgave **4** noemt men wel een hypergeometrisch kansverdeling. Deze twee types kansverdelingen worden vergeleken in het computerprogramma Met en Zonder terugleggen.*
Je vindt dat op www.wageningse-methode.nl/
Kies software / Kans.
Hieronder staan de tabellen en histogrammen voor het geval $n = 100$, $p = 20$ en $x = 6$, links met terugleggen, daarnaast zonder terugleggen.

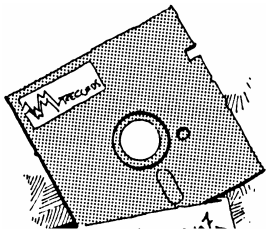
x	binomiaal	hypergeometrisch
0	26,2	25,2
1	39,3	40,3
2	24,6	25,2
3	8,2	7,9
4	1,5	1,3
5	0,2	0,1
6	0,1	0,0



Je ziet dat er maar weinig verschil is tussen met terugleggen en zonder terugleggen. Dan komt door de volgende regel:

Als het aantal trekkingen klein is ten opzichte van de totale populatie (het aantal appels in de kist), dan kun je de kansen zonder terugleggen praktisch berekenen alsof de trekking met terugleggen gebeurt.

Voorbeeld
Een enquête wordt gehouden onder 100 Nederlanders. De vraag luidt: "stemt u bij de komende verkiezingen op een regeringspartij". Eigenlijk is dit een trekking zonder terugleggen. Maar 100 mensen op een totaal van 16 miljoen is zo gering, dat de succeskans (het antwoord is "ja") bij de opvolgende trekkingen nauwelijks verandert. Je kunt de enquête dus wel als een trekking met terugleggen behandelen.



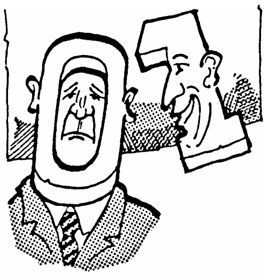
6 Goedkope diskettes zijn vaak nogal slordig gemaakt. Gemiddeld een op de twintig diskettes is ondeugdelijk. Anneke koopt een doosje van tien goedkope diskettes.
a. Hoe groot is de kans dat er hoogstens drie ondeugdelijke diskettes in zitten?

Veronderstel dat er in het doosje inderdaad drie ondeugdelijke exemplaren zitten. Thuis controleert Anneke elk van de diskettes.
b. Bereken de kans dat de eerste vijf diskettes die ze controleert wel allemaal in orde zijn.
c. Maakt het veel verschil of je vraag **b** met of zonder terugleggen beantwoordt?

7 Een leerling heeft zijn boekentas in het lokaal laten staan. Het is nu pauze. De leerling leent de sleutelbos van een docent om zijn boekentas te halen. Een van de vijf sleutels past, maar de leerling kan niet zien welke dat is. Hij moet ze dus net zo lang proberen tot hij de goede heeft.
Bereken de kans dat de derde sleutel die hij probeert past.

8 Een school telt 854 leerlingen. Er zitten ongeveer evenveel jongens als meisjes op de school. Veronderstel dat jongens en meisjes even vaak te laat komen.
Op een ochtend komen er 17 leerlingen te laat.
Bereken de kans dat er 10 of meer jongens bij zijn.

⌘ 5 Keuzeopgaven



1 ASCII-codes

Een computer kan alleen nullen en enen herkennen. Wanneer op het toetsenbord de letter "a" wordt aangeslagen, krijgt de computer de code "01100001" doorgeseind. Zo hebben alle tekens op het toetsenbord hun eigen codering. Op de volgende bladzijde staat de complete lijst van het ASCII-systeem. ASCII is de afkorting van American Standard Code for Information Interchange.

Elk teken heeft ook een nummer. Het nummer van de letter "a" is "97".

32	00100000	SPATIE	65	01000001	A	97	01100001	a
33	00100001	!	66	01000010	B	98	01100010	b
34	00100010	"	67	01000011	C	99	01100011	c
35	00100011	#	68	01000100	D	100	01100100	d
36	00100100	$	69	01000101	E	101	01100101	e
37	00100101	%	70	01000110	F	102	01100110	f
38	00100110	&	71	01000111	G	103	01100111	g
39	00100111	’	72	01001000	H	104	01101000	h
40	00101000	(	73	01001001	I	105	01101001	i
41	00101001	)	74	01001010	J	106	01101010	j
42	00101010	*	75	01001011	K	107	01101011	k
43	00101011	+	76	01001100	L	108	01101100	l
44	00101100	,	77	01001101	M	109	01101101	m
45	00101101	-	78	01001110	N	110	01101110	n
46	00101110	.	79	01001111	O	111	01101111	0
47	00101111	/	80	01010000	P	112	01110000	p
48	00110000	0	81	01010001	Q	113	01110001	q
49	00110001	1	82	01010010	R	114	01110010	r
50	00110010	2	83	01010011	S	115	01110011	s
51	00110011	3	84	01010100	T	116	01110100	t
52	00110100	4	85	01010101	U	117	01110101	u
53	00110101	5	86	01010110	V	118	01110110	v
54	00110110	6	87	01010111	W	119	01110111	w
55	00110111	7	38	01011000	X	120	01111000	x
56	00111000	8	89	01011001	Y	121	01111001	y
57	00111001	9	90	01011010	Z	122	01111010	z
58	00111010	:	91	01011011	[	123	01111011	{
59	00111011	;	92	01011100	\	124	01111100		
60	00111100	<	93	01011101	]	125	01111101	}
61	00111101	=	94	01011110	^	126	01111110	~
62	00111110	>	95	01011111	_	127	01111111	DEL
63	00111111	?	96	01100000	‘			
64	01000000	@						

Codes van schrifttekens volgens het ASCII-systeem. De volgnummers 0 t/m 31 (tweetallig 00000000 t/m 00011111) zijn gereserveerd voor signalen die niet-afdrukbaar zijn (bijvoorbeeld 7 = belsignaal).
De codes vanaf 128 (ofwel 10000000), dat zijn dus alle codes die tweetallig met een 1 beginnen, worden verschillend per computer en per toepassing voor van alles en nog wat gebruikt.

a. Wat is het verschil tussen de codes van een hoofdletter en de bijbehorende kleine letter?
Wat is het verschil tussen de nummers van een hoofdletter en de bijbehorende kleine letter?

De ASCII-code gebruikt rijtjes van acht nullen en enen. Zo'n rijtje noemt men wel een byte (verbastering van "by eight"). In het ASCII-systeem beginnen de bytes allemaal met een 0.

b. Hoeveel bytes zijn er dan nog mogelijk?

c. In het overzicht ontbreken de bytes die beginnen met drie nullen.
Hoeveel bytes zijn dat?
Hoeveel bytes zitten er wel in het overzicht?

d. Er zit een mooi systeem in de bytes die achtereenvolgens aan de hoofdletters zijn toegekend.
Breng dat systeem onder woorden.

2 Het aardige van de nummers in het ASCII-systeem is dat je de computer een geheimschrift kunt laten maken. Bijvoorbeeld als volgt. We werken alleen met hoofdletters. Zoek bij een teken het nummer; vermenigvuldig dat nummer met 2 en trek van de uitkomst 90 af; zoek bij het nummer dat je dan hebt gekregen het bijbehorende teken.

Voorbeeld: de letter "a" heeft nummer 65,
$2 \cdot 65 - 90 = 40$,
bij nummer 40 hoort het teken “(“.

Elk teken wordt zodoende omgezet in een ander teken.

a. Vertaal het woord "CODE" in dit geheimschrift.

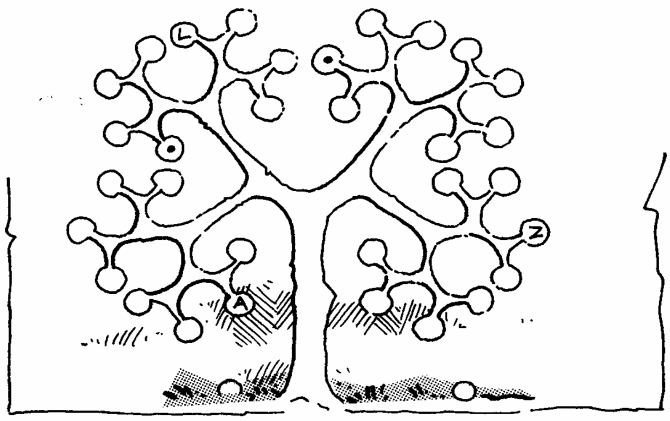
b. Is er een teken dat bij dit geheimschrift zichzelf blijft?

c. Welk woord gaat schuil achter het geheimschriftwoord "T8>"?

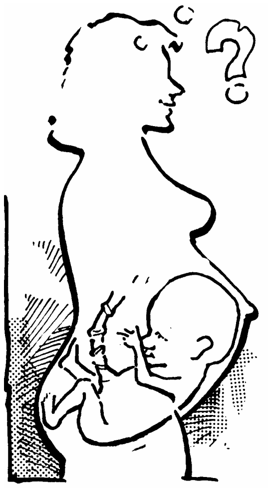
d. Je moet een geheimschriftwoord terug kunnen vertalen naar het originele woord.
Welke rekenstappen moetje daarvoor doen?

3 Een binaire boom: vanuit de stam vertakt hij een aantal keren, telkens naar links en naar rechts.

a. Bereken het aantal uiteinden. Niet tellen.



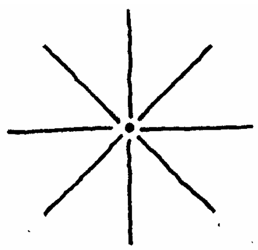
We gaan de ASCII-codes (opgave 1) gebruiken om de hoofdletters van het alfabet in de boom te plaatsen. We vatten een "0" op als een vertakking naar links en een "1" als een vertakking naar rechts.
b. Ga na dat de A (00001), de L (01100) en de Z (11010) op de juiste plaats staan.
c. Waar in de boom komt de letter E?
d. Welke letters horen bij de twee uiteinden waar een stip in staat?

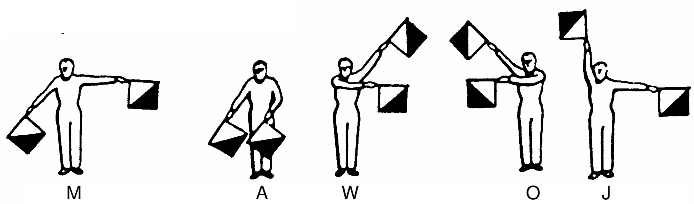


4 In een stad staan twee ziekenhuizen. Per week worden in het grootste ziekenhuis 50 baby's geboren en in het kleinste 20. In 1988 is in beide ziekenhuizen het aantal weken geteld, waarin ten minste 60% van de borelingen een jongen was.
a. Bij welk van de twee ziekenhuizen zal dat aantal het grootst zijn? Waarom?
b. Bereken de verwachtingswaarde van dat aantal weken, voor elk van de ziekenhuizen.

5 Verzin een vraag bij het antwoord $\binom{13}{4} \cdot (0{,}2)^4 \cdot (0{,}8)^9$.

6 De semafoor
Het was vroeger van het grootste belang om snel berichten door te geven. Bij veldslagen was dat zelf doorslaggevend. Een van de methodes was die van de semafoor (seinpaal). Op zee gaven matrozen signalen met geelrode vlaggen. Voor de vlaggen waren acht posities mogelijk, zoals hiernaast schematisch is aangegeven. Maar ze kunnen niet dezelfde positie innemen. Elke letter had zijn eigen vlaggensein.
Een paar voorbeelden:





a. Zijn er genoeg seinen mogelijk voor het hele alfabet?
b. Is hier sprake van een binaire code?
c. Je zou ook nog seinen kunnen toevoegen met een in plaats van twee vlaggen (maar dat is niet gebruikelijk). Hoeveel seinen zouden er dan in totaal mogelijk zijn?

7 Schotpercentage

De waarde van een basketbalspeler in de VS wordt onder andere bepaald door zijn schotpercentage. Dat is het aantal rake schoten als percentage van het aantal pogingen om te scoren.

Van een speler is het gemiddelde schotpercentage 70%. Laten we eens voor die speler aannemen dat elk van zijn schoten met 70% kans doel treft. In een wedstrijd waagt hij 20 schoten.

a. Hoe groot is de kans dat zijn score precies 70% is?

b. Bereken de kans dat zijn score ligt tussen 55% en 75% (bedoeld wordt: $55\% \leq \text{score} \leq 75\%$).

8 Uit een groep van twaalf personen, vier mannen en acht vrouwen, worden er aselect drie aangewezen.

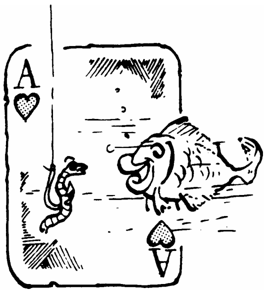
a. Hoeveel drietallen zijn er mogelijk?

b. Bereken: $\binom{4}{0}\cdot\binom{8}{3}+\binom{4}{1}\cdot\binom{8}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{1}+\binom{4}{3}\cdot\binom{8}{0}$.

c. De uitkomsten van **a** en **b** zijn hetzelfde.
Kun je dat verklaren?

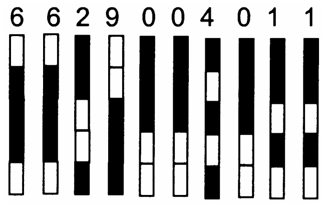
d. Bereken de kans dat twee van de drie aangewezen personen vrouwen zijn.

9 Tijdens het weekend zijn de wachtkamers van de EHBO-afdelingen in elk ziekenhuis goed gevuld. Ongeveer 10% van de bezoekers komt om sportblessures te laten behandelen.
In een ziekenhuis melden zich in een weekend 50 mensen bij de EHBO.
Bereken de kans dat het aantal personen met sportblessures onder het verwachte aantal ligt.



10 Een streepjescode

Op de meeste artikelen zit tegenwoordig een streepjescode; hiernaast staat een voorbeeld. Elk cijfer heeft zijn eigen codering: een serie van smalle en brede streepjes, afgewisseld met smalle of brede witruimtes. Het systeem is nogal ingewikkeld.
Soms maken eigenwijze winkeliers hun eigen cijfercode. De volgende cijfercodering stond op een enveloppe van een fotozaak:



Hoe denk je dat de ontbrekende cijfers zijn gecodeerd?

11 Bridge

Het kaartspel bridge wordt gespeeld door vier spelers; die worden Noord, Oost, Zuid en West genoemd. Noord en Zuid spelen tegen Oost en West. Het kaartspel bestaat uit 52 kaarten: 13 klaveren, 13 ruiten, 13 harten en 13 schoppen. Noord krijgt (net als de andere drie spelers) in het begin van het spel dertien kaarten. Die dertien kaarten noemt men wel een "hand".

a. Hoeveel handen zijn er mogelijk?

b. Een "verdeelde hand" is een hand met van een kleur 4 kaarten en van de andere drie kleuren 3 kaarten.
Hoeveel verdeelde handen zijn er mogelijk?

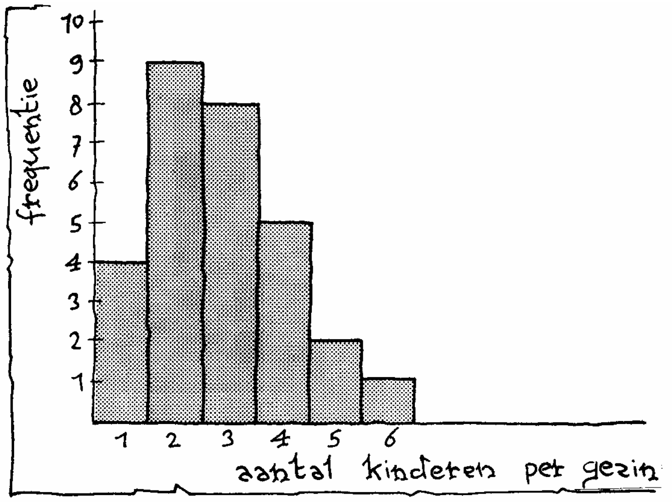
c. Wat is de kans dat Noord een verdeelde hand krijgt?

Noord gaat het spel spelen; zijn partner Zuid legt zijn kaarten open op tafel. Noord ziet dat hij samen met Zuid 9 schoppenkaarten heeft: van schoppen missen ze alleen de Heer, de Tien, de Acht en de Drie. Die vier schoppenkaarten zitten dus bij Oost en/of bij West. Je begrijpt natuurlijk wel dat het voor Noord interessant is om te weten hoe de vier schoppenkaarten over zijn twee tegenstanders verdeeld zijn. Een van de mogelijkheden is: Oost heeft de Heer, de Tien en de Drie, West heeft de Acht.

d. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

e. Hoeveel verdelingen van die vier schoppenkaarten zijn er waarbij Oost er twee heeft (en West dus ook)?

12 Uit de leerlinggegevens van een klas van negenentwintig leerlingen blijkt de gezinssamenstelling als volgt te zijn.



Uit het histogram valt onder andere af te lezen dat vijf van de negenentwintig leerlingen komen uit een gezin met vier kinderen.

a. Er worden twee leerlingen aselect aangewezen.
Hoe groot is de kans dat ze allebei uit een gezin van meer dan twee kinderen komen.

Veronderstel dat deze klas representatief is voor alle Nederlandse gezinnen met kinderen.

b. Op een school zitten 100 havo5-leerlingen.
Bereken de kans dat meer dan de helft van de leerlingen uit een gezin met hoogstens drie kinderen komt.

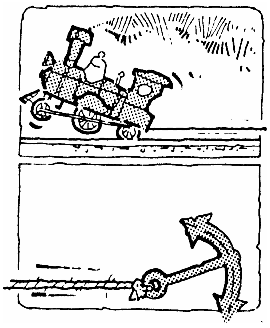
c. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal kinderen per gezin? (We werken alleen met gezinnen met kinderen.)

13 Voor de wedstrijd wordt een groepsfoto gemaakt van het elftal. Zo'n foto heeft een vaste indeling: zes spelers blijven staan, terwijl de andere vijf daarvoor hurken. De spelers kunnen onderling van plaats verwisselen.

a. Hoeveel foto's zijn er mogelijk, gelet op de onderlinge plaats?

b. Hoeveel foto's zijn er mogelijk als de keeper de middelste speler op de hurken moet zijn?

c. Hoeveel foto's zijn mogelijk als de keeper een van de hurkende spelers moet zijn?



14 Peter woont in Bodegraven en geeft les op een school in Utrecht. Dagelijks reist hij met de trein heen en terug. Er zijn twee onafhankelijke redenen om vertraging te krijgen.

1) De trein vertrekt niet op tijd. De kans hierop is 0,2.

2) De reisduur is langer dan gepland. De kans hierop is 0,05.

Er is sprake van vertraging, als er afwijkingen ten opzichte van het spoorboekje zijn.

a. Beschrijf hoe je de gegeven kans van 0,2 (bij 1) in de praktijk zou kunnen controleren.

b. Peter is 's ochtends op tijd op het station.

Laat zien dat de kans dat hij met vertraging in Utrecht arriveert gelijk is aan 0,24.

Peter maakt in een week vier keer de reis Bodegraven-Utrecht.

c. Maak een tabel van de kansverdeling van het aantal dagen dat hij vertraging heeft.

aantal dagen met vertraging	0	1	2	3	4
kans					

d. Bereken hoeveel dagen Peter naar verwachting met vertraging zal reizen.

e. Peter reist in een jaar 40 weken van Bodegraven naar Utrecht. De overige weken heeft hij vakantie.

Wat is naar verwachting het aantal dagen Peter jaarlijks met vertraging zal reizen?

15 Het doen van een bloedtest is kostbaar. Onderzoeken uit het verleden leren ons dat het bloed van 95% van de onderzochte personen in orde is. In plaats van één bloedtest per persoon, is het ziekenhuis overgestapt op een bloedtest van tien personen tegelijk. Men neemt van ieder van de tien personen een beetje van het bloedmonster en doet die beetjes bij elkaar. Daarmee voert men de test uit. Het bloed kan in orde blijken te zijn en het kan niet in orde blijken te zijn.

a. Leg uit wat het voordeel van deze aanpak zou kunnen zijn.

Wat is het nadeel van deze aanpak?

b. Bereken de kans dat het bloed van 10 personen in orde is.

Bij deze aanpak heeft men voor een groep van tien personen of 1 test nodig, of 11 testen.

c. Bereken het gemiddeld aantal testen dat men voor een groep van tien personen nodig heeft.
Iedere test kost € 25. In het oude systeem (één test per persoon) waren de kosten voor een groep van tien dus € 250.
d. Is het nieuwe systeem naar verwachting goedkoper?

16 Een landbouwtoeleveringsbedrijf verkoopt een bepaald soort kunstmest in zakken. Deze zakken worden machinaal gevuld. De vulmachine is zo ingesteld dat gemiddeld 4 op de 100 zakken een te laag gewicht hebben.
De prijs van de soort kunstmest is € 36 per zak. Voor een zak met een te laag gewicht betaalt de klant maar € 32.
Een klant koopt vier zakken.
a. Bereken de kans dat ze alle vier voldoende gewicht hebben.
b. Bereken de kans op twee zakken met voldoende gewicht en (dus) twee zakken met een te laag gewicht.
c. Bereken de verwachte opbrengst van een zak kunstmest.

17 We spelen een spel met vier enveloppen. In twee enveloppen zit een briefje van 10 euro; in één envelop zit een briefje van 50 euro en één envelop is leeg.
Iemand kiest een envelop en maakt die open. Hij mag de inhoud houden. Maar als de envelop leeg blijkt te zijn is het spel afgelopen. Anders neemt hij een volgende envelop. Enzovoort.
a. Maak een kansboom behorend bij dit spel.
b. Bereken de kans dat hij achtereenvolgens 10, 50 en 0 euro pakt.
c. Bereken de kans dat hij na de tweede envelop moet stoppen.
d. Maak een tabel van de kansverdeling van het totale bedrag dat hij pakt:

totale bedrag	0	10	
kans			

e. Welk totale bedrag mag hij verwachten te krijgen?

18 Uit onderzoek is gebleken dat een bepaald medicijn bij 20% van de gebruikers bijverschijnselen veroorzaakt.
a. Bereken de kans dat bij een groepje van vijf patiënten niemand bijverschijnselen krijgt.
b. Bereken de kans dat een groep van vijf minstens één patiënt bijverschijnselen krijgt.

19 Een loterij

In een loterij zijn zes prijzen: 1 hoofdprijs van € 1000, 2 tweede prijzen van elk € 100 en 3 derde prijzen van elk € 25.
Er zijn 1000 loten verkocht. Ik heb een van de loten gekocht.
a. Bereken hoeveel euro aan prijzengeld ik gemiddeld mag verwachten.

Voor één lot zijn de kansen eenvoudig te bepalen. Het wordt een stuk ingewikkelder als iemand twee of meer loten koopt.
b. Mijn broer koopt twee loten.
Bereken de kans dat hij in totaal € 1000 of meer wint.
c. Een vriend koopt vier loten.
Bereken de kans dat hij minstens één prijs wint.

20 De kans op dubbel-zes in 24 worpen.

Als je vier maal met een dobbelsteen werpt, is de kans dat je geen enkele “zes” krijgt iets kleiner dan 50%. Chevalier de Méré, een Franse gokker, wist dat. Hij dacht nu dat ook de kans is op geen dubbel-zes in een serie van 24 worpen met twee dobbelstenen iets kleiner is dan 50%. Hij redeneerde zo: de kans op dubbel-zes (met twee dobbelstenen) is 6 keer zo klein als op een enkele zes (met één dobbelsteen). Om de kans op dubbel-zes weer gelijk te krijgen, moet je 6 keer zo veel worpen doen Met één dobbelsteen moet ik 4 keer werpen om de kans op geen enkele zes net iets onder de 50% te krijgen. Bij twee dobbelstenen moet ik dus $6 \cdot 4 = 24$ keer werpen om de kans op dubbel-zes net iets onder de 50% te krijgen. Maar in de praktijk bleek dat niet te kloppen.
De Méré legde de vraag in het midden van de 17de eeuw voor aan Blaise Pascal. Pascal rekende voor hem de kans uit op geen dubbel-zes in 24 worpen.
a. Reken na dat de kans op geen enkele zes in een serie van vier worpen met een dobbelsteen inderdaad iets kleiner is dan 50%.
b. Reken na dat de kans op geen enkele dubbel-zes in een serie van 24 worpen met twee dobbelstenen iets groter is dan 50%.

De grote geleerden die zich in de 17de eeuw bezig hielden met kansrekening, Pascal, Fermat, Huygens en de Bernoulli's, hadden nog geen kansbegrip zoals wij dat in onze opvoeding meekrijgen. Zij kenden nog geen modellen (zoals stroomdiagrammen), maar moesten alles zelf uitvinden. Als je je in de geschiedenis verdiept, zie je dat zelfs de knapste koppen daar best problemen mee hadden. Anderzijds kwamen ze meestal met bijzonder slimme oplossingen op de proppen.

Combinatiegetallen $\binom{n}{k}$

k \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3	4	*5*	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
3		4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
4			5	15	35	70	126	210	330	495	715
5				6	21	56	126	252	462	792	1287
6					7	28	84	210	462	924	1716

k \ n	14	15	16	17	18	19	20
1	14	15	16	17	18	19	20
2	91	105	120	136	153	171	190
3	364	455	560	680	816	969	1140
4	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845
5	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504
6	3003	*5005*	8008	12376	18564	27132	38760
7	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520
8			12870	24310	43758	75582	125970
9					48620	92378	167960
10							184756

k \ n	21	22	23	24	25
1	21	22	23	24	25
2	210	231	253	276	300
3	1330	1540	1771	2024	2300
4	5985	7315	8855	10626	12650
5	20349	26334	33649	42504	53130
6	54264	74613	100947	134596	177100
7	116280	170544	245157	346104	408700
8	203490	319770	490314	735471	1081575
9	293930	497420	817190	1307504	2042975
10	352716	646646	1144066	1961256	3268760
11		705432	1352078	2496144	4457400
12				2704156	5200300

Antwoorden

Paragraaf 1 Hoeveel mogelijkheden?

1 **a.** $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$
b. Er zijn vijf "rijtjes" van "vier jongens en een meisje": MJJJJ, JMJJJ, JJMJJ, JJJMJ, JJJJM, terwijl er maar één rijtje is van "vijf jongens": JJJJJ. Mogelijkheid 2) kan dus op vijf manieren optreden.
c. 32
f.

1)	2)	3)	4)	5)	6)
0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

g. Zes kansen opgeteld moet 1 geven.

2 **a.** $7 \cdot 6 : 2 = 21$
b. $21 + 7 = 28$

3 1) $3^{10} = 59049$
2) $10^3 = 1000$
Dus 1) levert meer rijtjes.

4 Er zijn 9 rijtjes waarbij de hoogste een 6 is, 12 rijtjes waarbij de hoogste een 5 si en 6 rijtjes waarbij de hoogste een 4 is.
Er zijn $6^3 = 216$ rujtjes in totaal.
De kans is dus $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

5 **a.** Beige
b. 25975; Nee, een getal wordt eerst "geopend" door een cijferteken
c. $2^6 = 64$, maar omdat het lege teken niet meetelt 63.
d. PPLLLL , PLPLLL , PLLPLL , PLLLPL , PLLLLP , LPPLLL , LPLPLL , LPLLPL , LPLLLP , LLPPLL , LLPLPL , LLPLLP , LLLPPL , LLLPLP , LLLLPP .
e. 6 ; 15 ; 6 ; 1
f. Ja, 64 – (1+6+15+15+6+1) = 20

6 **a.** 20
b. 20
c. 20
d. 20

7 **a.** 6 ! = 720
b. $2^6 = 62$
c. $6 \cdot 5 = 30$

d. $\binom{6}{2} = 15$
e. $\binom{6}{3} = 20$
f. 22

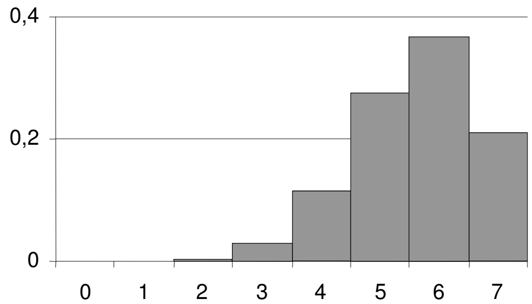
Paragraaf 2 Binomiale kansexperimenten

1 **a.** 300
b. $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$
c. 0,512 ; 0,384 ; 0,096
d. $0{,}512 + 0{,}384 + 0{,}096 + 0{,}008 = 1$

2 **a.** $0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}0033$
Ook 0,0033
35
b. 0,115
c. $\binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}275$

3 **b.** Ja, $0{,}2 \cdot 7 = 1{,}4$
c. $\binom{7}{6} \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8 = 0{,}0003584$
d. $\binom{7}{5} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}275$

e.



4 **a.** zes of geen zes; $\frac{1}{6}$ en $\frac{5}{6}$; 10
b. jongen of meisje; $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$; 15
c. goed of fout; $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$; 7
d. 2 kop of niet 2 kop; $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$; 20
e. rood of niet-rood; $\frac{18}{37}$ en $\frac{19}{37}$; 20
f. werkt wel of werkt niet; 0,9 en 0,1 ; 10

6 **a.** $\binom{10}{3} \cdot (\frac{1}{4})^3 \cdot (\frac{3}{4})^7 \approx 0{,}25$
b. 0,164

7 **a.** $\frac{5}{16}$

b. $\binom{5}{4} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^1 = 0{,}36015$

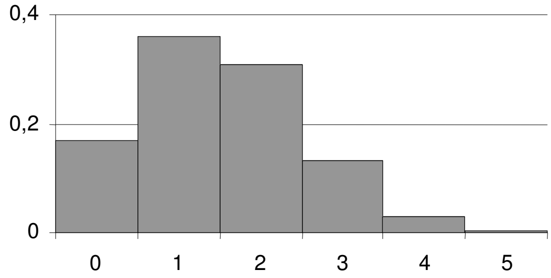
c. D en E ; het kogeltje valt gemiddeld $5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$ keer naar rechts.

8 **a.** $0{,}7^5 = 0{,}1681$; $\binom{5}{1} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 0{,}3602$

b.

k	0	1	2	3	4	5
P(S=k)	0,1681	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

c.



9 **a.** $P(S=3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}45^3 \cdot 0{,}55^2$

b. $P(S=3) = \binom{12}{3} \cdot 0{,}45^3 \cdot 0{,}55^9$

c. $P(S=k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}45^k \cdot 0{,}55^{n-k}$

10 **a.** 0,2757

b. 0,0923

11 **a.** Als je er vanuit gaat dat de kans op een jongen $\frac{1}{2}$ is, dan is de kans op dit gezin $(\frac{1}{2})^{11} = \frac{1}{2048}$.

b. $\binom{11}{5} \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}226$

12 **a.** $\binom{3}{2} \cdot (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}444$

b. $\dfrac{\binom{10}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{45 \cdot 5}{455} = 0{,}495$

c. Met terugleggen

d. Nee ; ja, de kans wordt dan 1.

13 **a.** $1 - 0{,}99^{62} = 0{,}464$

b. $1 - 0{,}999^{62} = 0{,}060$

14 **a.** 0,9

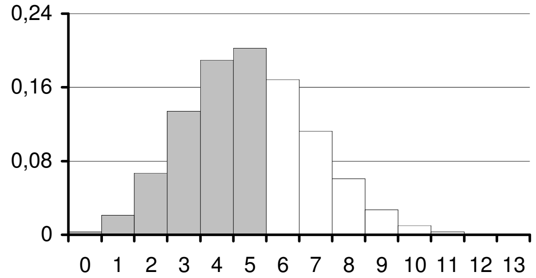
b. $\binom{20}{17} \cdot 0{,}9^{17} \cdot 0{,}1^3 = 0{,}1901$; dit klopt dus aardig.

c. $0{,}28 + 0{,}27 + 0{,}13 = 0{,}68$

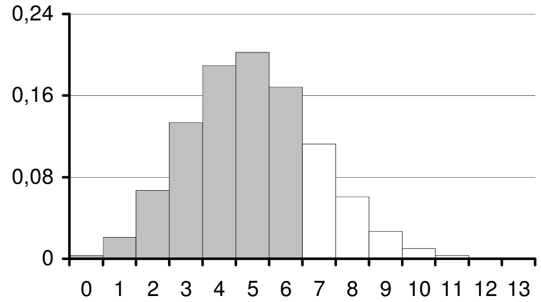
15 **a.** 2 ; 6 ; 4 ; 8
Ja, dit is steeds 10 keer de kans op één succes.
b. 0,2 en 0,8 zijn elkaars spiegelbeeld; 0,4 en 0,6 zijn elkaars spiegelbeeld.
Ballen trekken uit een bak met 2 witte en 8 zwarte ballen, waarbij wit succes is, geeft hetzelfde kanshistogram als ballen trekken uit een bak met 8 witte en 2 zwarte ballen (ook wit succes!), maar dan gespiegeld.
c. $p = 0,5$

Paragraaf 3 Cumulatieve binomiale kansen

1 **a.** $0,0032 + 0,0211 + 0,0670 + 0,1339 + 0,1896 = 0,4148$
c. De kans op x of minder goede antwoorden is de som van de kans op x en alle voorgaande kansen.
d. De linker zes staven.



e. De linker zeven staven.



f. Aftrekken (0,7858 – 0,6172), dan vind je 0,1686.
De linker tabel maak je door steeds van een waarde uit de rechtertabel zijn voorgaande waarde af te trekken.

2 **a.** $0,2024 + 0,1686 + 0,1124 + 0,0609 + 0,0270 = 0,5713$
b. $0,9861 - 0,4148 = 0,5713$

3 **a.** $0,9590 - 0,8208 = 0,1382$
b. $1 - 0,8208 = 0,1792$
c. $0,9959 - 0,2333 = 0,7626$

4 **a.** 0,9978
b. 0,4203
c. 0,9997
d. 0,6133

5 **a.** 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 en 14
0,9067
b. $1-0{,}9067 = 0{,}0933$
c. 0,9525
0,1298
0,0022
0,0000

6 **a.** 0,9790
b. 0,8327
c. $1{,}0000-1{,}0000 = 0{,}0000$
d. $1-0{,}0730 = 0{,}9270$
e. $1-0{,}2061 = 0{,}7939$
f. $0{,}4511-0{,}1057 = 0{,}3454$

7 **a.** $n=10$; het werpen van 6 ogen ; $p=\frac{1}{6}$
b. $P(S\geq 3) = 1-P(S\leq 2) = 1-0{,}7752 = 0{,}2248$

8 **a.** $P(S>13) = 1-P(S\leq 13) = 1-0{,}8761 = 0{,}1239$
b. $P(S\geq 1) = 1-P(S\leq 0) = 1-0{,}3660 = 0{,}6340$

9 **a.** $P(R\geq 8) = 1-P(R\leq 7) = 1-0{,}7869 = 0{,}2131$
b. $\binom{12}{6}\cdot 0{,}6^6\cdot 0{,}4^6 = 0{,}1766$

10 **a.** $P(S\leq 6)-P(S\leq 3) = 0{,}8281-0{,}1719 = 0{,}6562$
b. $P(S\leq 12)-P(S\leq 7) = 0{,}8686-0{,}1316 = 0{,}7368$
$P(S\leq 30)-P(S\leq 19) = 0{,}9405-0{,}0595 = 0{,}8810$
$P(S\leq 60)-P(S\leq 39) = 0{,}9824-0{,}0176 = 0{,}9648$
c. Als je vaker gooit, wordt het experiment nauwkeuriger. Hierdoor zal het aantal keer “kop” gemiddeld dichter bij 50% liggen, waardoor de kans dat het aantal keer “kop” tussen de 40% en de 60% ligt groter wordt.

11 **a.** $P(S>4) = 1-P(S\leq 4) = 1-0{,}8298 = 0{,}1702$
b. Het gaat hier om één klas. Het spijbelen van een leerling beïnvloedt de andere leerlingen. Het spijbelen van de leerlingen is dus niet onafhankelijk.

12 **a.** $P(S>4) = 1-P(S\leq 4) = 1-0{,}8964 = 0{,}1036$
b. $0{,}95^{50}\cdot 50 \approx 4$

13 **a.** $P(S\geq 8) = 1-P(S\leq 7) = 1-0{,}8982 = 0{,}1018$
b. Bij 10 goede antwoorden.

14 a. $\binom{12}{4} \cdot 0{,}15^4 \cdot 0{,}85^6 = 0{,}068$

b. $(40 \cdot 0{,}05 \cdot 50) + (40 \cdot 0{,}10 \cdot 10) =$ € 140

15 Er moeten minstens 15 operaties slagen;
$P(S \geq 15) = 1 - P(S \leq 14) = 1 - 0{,}8354 = 0{,}1646$

16 a. $P(S \geq 18) = 1 - P(S \leq 17) = 1 - 0{,}3231 = 0{,}6769$
b. $P(S \leq 44) = 0{,}3839$

17 a. $P(S \leq 17) = 0{,}0755$
b. $0{,}0755 \cdot 0{,}60 \cdot 1000 = 45$
$0{,}0378 \cdot 0{,}60 \cdot 1500 = 34$

18 a. $0{,}05^2 \cdot 0{,}95^2 = 0{,}00226$
b. $0{,}95^4 = 0{,}814$
c. $\binom{4}{1}\ 0{,}05 \cdot 0{,}95^3 = 0{,}171$
d. Kans op fout in één vierkantje;
$1 - 0{,}95^4 = 0{,}18549$
$10\,000 \cdot 0{,}1855 = 1855$

19 a. $\binom{3}{1} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^2 + 0{,}95^3$ - $0{,}9928$
b. $0{,}9928^4 = 0{,}9715$
c. Met een even getal kunnen er twijfelgevallen
d. $\binom{5}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^3 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^4 + 0{,}95^5 = 0{,}9988$
e. $0{,}9988^4 = 0{,}9954$
f. “Vijf keer herhalen
” duurt langer.

Paragraaf 4 Met en zonder terugleggen

1 a.

Successen	0	1	2
Kans	0,46666	0,466666	0,06666

b.

Successen	0	1	2	3
Kans	0,512	0,384	0,096	0,008

2 a.

Successen	0	1	2
Kans	0,51162	0,38467	0,09580

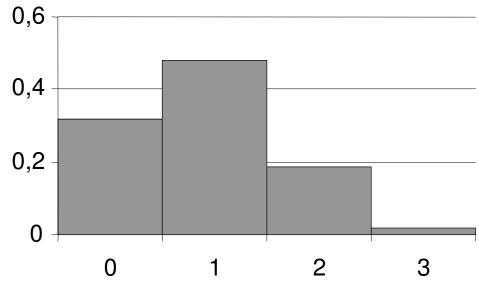
b.

Successen	0	1	2	3
Kans	0,512	0,384	0,096	0,008

3 Naarmate de aantallen groter worden, maakt het niet meer zoveel uit of je de lamp nou wel of niet terug legt, dit beïnvloedt de verhouding kapotte lampen / hele lampen namelijk nauwelijks meer.

4 **a.** Zonder terugleggen.

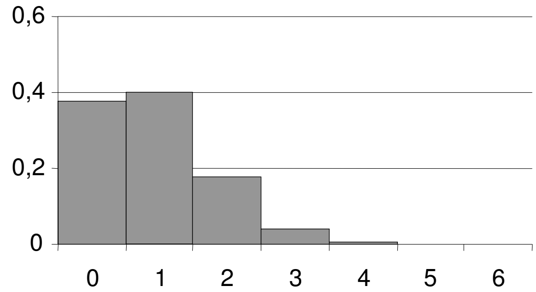
b.



c. $E = 1 \cdot 0{,}47 + 2 \cdot 0{,}18 + 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}89$

5 **a.** Met terugleggen

b.



c. $E = 1 \cdot 0{,}3993 + 2 \cdot 0{,}1762 + 3 \cdot 0{,}0415 + 4 \cdot 0{,}0055 + 5 \cdot 0{,}00038 + 6 \cdot 0{,}0000114 = 0{,}9001684$

6 **a.** $P(S \leq 3) = 0{,}9990$

b. $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

c. Ja, met terugleggen is het $(\frac{7}{10})^5$.

7 $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

8 $n = 17$, $p = 0{,}5$

$P(S \geq 10) = 1 - P(S \leq 9) = 1 - 0{,}6855 = 0{,}3145$

Paragraaf 5 Keuzeopgaven

1 **a.** Hoofdletters hebben op de derde positie een 0, kleine letters hebben daar een 1.
b. $2^7 = 128$
c. $2^5 = 32$
$128 - 32 = 96$
d. De meeste rechte nul wordt één, de eventuele enen die na deze nul komen, worden nullen.

2 **b.** CODE wordt ,D.0
c. Ja, de Z (90)
d. WIL
e. getal → PLUS 90 → DEEL DOOR 2 → nieuw getal

3 **a.** $2^5 = 32$
c. E(00101)
d. H(01000) , Q(10001)

4 **a.** In het kleinste ziekenhuis. Omdat het aantal herhalingen maar klein is, zal de variatie groot zijn.
b. In het grote ziekenhuis: P(minstens 60%) =
1 – binom(50,0.5,29) = 0,1013 → 5,27 weken.
In het kleine ziekenhuis: P(minstens 60%) =
1 – binom(20,0.5,11) = 0,2517 → 13,09 weken.

6 **a.** $8 \cdot 7 = 56$, ja dus
b. Nee. Het is niet zo dat er een aantal plaatsen is die elk onafhankelijk van elkaar in twee toestanden kunnen verkeren; zie opgave **11**, bladzijde 90).
c. $56 + 8 + 8 = 72$

7 **a.** $\binom{20}{14} \cdot 0{,}7^{14} \cdot 0.3^{6} = 0{,}1916$
b. $P(S \leq 16) - P(S \leq 10) = 0{,}7625 - 0{,}0480 = 0{,}7145$

8 **a.** $\binom{12}{3} = 220$
b. $1 \cdot 56 + 4 \cdot 28 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = 220$
c. In **b** staat het aantal met 0 man & 4 vrouw + het aantal met 1 man & 3 vrouw + het aantal met 2 man & 2 vrouw + het aantal met 3 man & 1 vrouw + het aantal met 4 man & 0 vrouw ; dat is precies het totale aantal met 4 mensen.
d. $\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{8}{12}\right)^2 \cdot \frac{4}{12} = 0{,}444$

9 Binomcdf(50,0.1,4) ≈ 0,4312

10 0 = ZZZWW ; 1 = ZZWZW ; 2 = ZZWWZ ; 3 = ZWZZW ; 4 = ZWZWZ ; 5 = ZWWZZ ; 6 = WZZZW ; 7 = WZZWZ ; 8 = WZWZZ ; 9 = WWZZZ

11 a. $\binom{52}{13}$ = 635 miljard

b. $4 \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3}^3 =$ 66,9 miljard

c. 10,5 %

d. 16

e. 6

12 a. $\frac{16}{29} \cdot \frac{15}{28}$ = 0,2956

b. 1,000

c. 2,83

13 a. 11 ! = 39916800

b. 10 ! = 3628800

c. $5 \cdot 10\,!$ = 18144000

14 a. Neem bijvoorbeeld 50 reisdagen = 100 enkele reizen. Daarvan zouden er ongeveer 20 te laat moeten vertrekken.

b. 1 – kans om op tijd vertrekken *en* goede reisduur = $1 - 0{,}8 \cdot 0{,}95 = 0{,}24$

c. 0,3336 , 0,4214 , 0,1996 , 0,0420 , 0,0033

d. $0{,}3336 \cdot 0 + 0{,}4214 \cdot 1 +$ 0,1996h $\cdot 2 + 0{,}0420 \cdot 3 + 0{,}0033 \cdot 4 = 0{,}96$

e. $40 \cdot 0{,}96 = 38{,}4$

15 a. Voordeel: als het bloed in orde is, ben je met 1 test voor 10 personen klaar. Nadeel: als het bloed van 1 persoon niet in orde is, weet je nog niet wie dat is.

b. $(0{,}95)^{10} = 0{,}60$

c. $0{,}60 \cdot 1 + 0{,}40 \cdot 11 = 5$ testen gemiddeld

d. Nieuwe systeem kost per 10 mensen: $5 \cdot$ €25 = €125; het is dus goedkoper.

16 a. $(0{,}96)^4 = 0{,}85$

b. $(0{,}96)^2 \cdot (0{,}04)^2 \cdot 6 = 0{,}0088 \approx 0{,}9\%$

c. € 143,37

17 b. $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

c. $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

0	10	20	50	60	70
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

e. €35

18 a. $(0{,}8)^5 = 0{,}33$

b. 1 – kans op niemand = $1 - 0{,}33 = 0{,}67$

19 a. €1,275

b. $\frac{2}{1000}$

c. $1 - \frac{994}{1000} \cdot \frac{993}{999} \cdot \frac{992}{998} \cdot \frac{991}{997} = 0{,}023820$

20 a. $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}4823$

b. $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}5086$