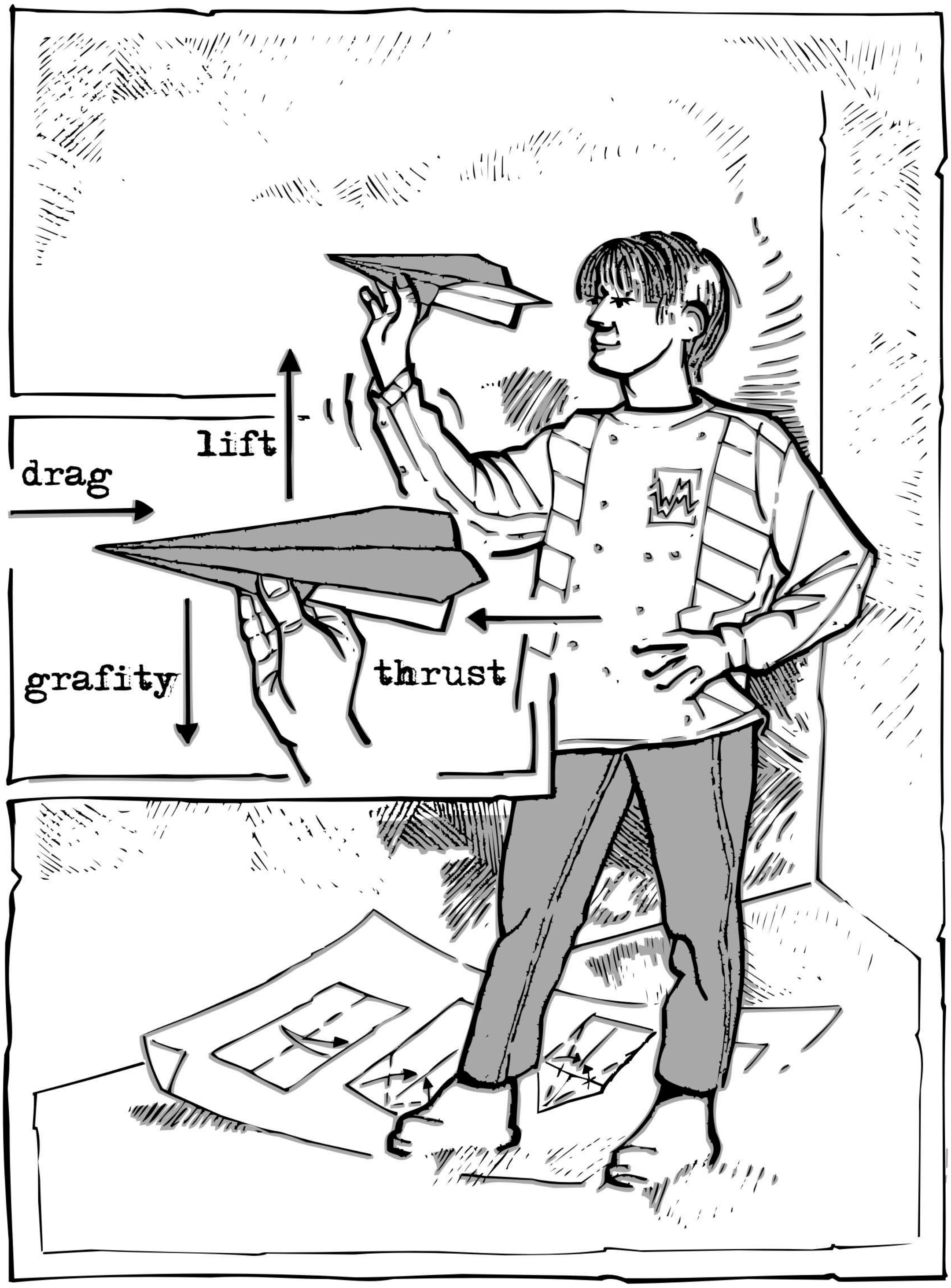
Havo wiskunde D
Vectoren en meetkunde



Inhoudsopgave

Vectoren en meetkunde

verbeterde experimentele uitgave, juli 2008

Colofon

© 2008 Stichting De Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

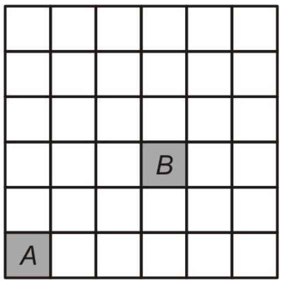
Illustraties Wilson Design, Uden

Distributie Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

ISBN

Homepage www.wageningse-methode.nl

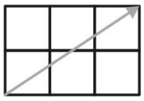
1 Vectoren



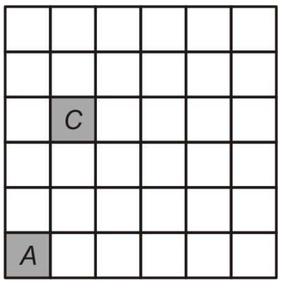
De vierkantjes in het rooster hiernaast zijn 1 bij 1. Als je hokje *A* drie eenheden naar rechts en twee eenheden naar boven verplaatst, krijg je hokje *B*.

Een verplaatsing gaat in een bepaalde *richting* over een bepaalde *afstand*. Een **pijl** is het geschikte middel om zo'n verplaatsing weer te geven. Hierbij is de lengte van de pijl de afstand waarover verplaatst wordt. In het vervolg noemen we een verplaatsing een **vector**.

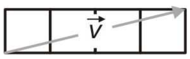
Latijn: *vector* is *drager*, iemand die iets van de ene naar de andere plaats draagt.



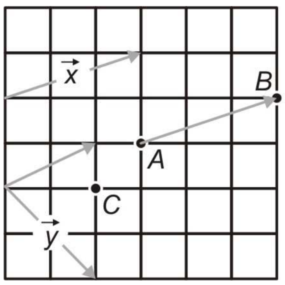
De verplaatsing hierboven geven we met de pijl hiernaast aan.



* **1** **a.** Teken op het werkblad de vector die hokje *A* naar hokje *C* verplaatst.
b. Teken op het werkblad het hokje dat je krijgt door hokje *A* te verplaatsen over de vector $\vec{v}$ die hieronder getekend is.



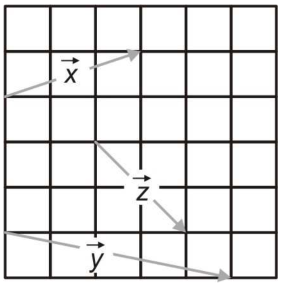
Om vectoren van getallen te onderscheiden, noteren we ze als een letter met een pijl erboven, bijvoorbeeld $\vec{v}$.



In het rooster hiernaast zijn vier vectoren (verplaatsingen) weergegeven door een pijl. De vector die punt *A* naar punt *B* verplaatst, geven we aan met $\overrightarrow{AB}$ Het is dezelfde verplaatsing als $\vec{x}$, dus $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$.

c. Teken het punt *D* in het rooster op het werkblad zó, dat $\overrightarrow{CD}$ dezelfde vector voorstelt als $\vec{y}$.

Met $-\vec{v}$ bedoelen we de verplaatsing over dezelfde afstand als $\vec{v}$, maar dan in tegengestelde richting.



d. Teken op het werkblad een pijl die de vector $-\vec{z}$ voorstelt en ook een pijl die de vector $-\vec{x}$ voorstelt.

> Met $2 \cdot \vec{v}$ bedoelen we de verplaatsing over een twee keer zo grote afstand als $\vec{v}$, in dezelfde richting.
> Met $\vec{x} + \vec{v}$ bedoelen we de verplaatsing die je krijgt door eerst over $\vec{v}$ te verplaatsen, gevolgd door de verplaatsing over $\vec{x}$ (of andersom).

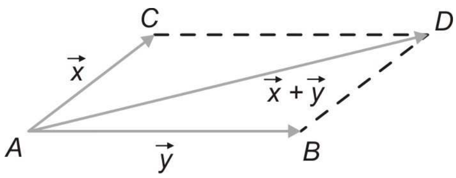
e. Ga na dat $\vec{x} + \vec{z} = \vec{y}$.

f. Teken een pijl die de vector $\vec{x} + \vec{y}$ voorstelt.

Teken ook pijlen bij $\vec{x} + -\vec{y}$, $2\vec{z}$ en $2\vec{x} + \vec{y}$.

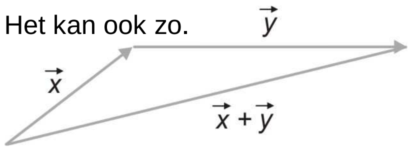
> Meestal schrijven we $\vec{x} - \vec{y}$, in plaats van $\vec{x} + -\vec{y}$.

Er zijn twee manieren om bij twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ de somvector $\vec{x} + \vec{y}$ te tekenen.



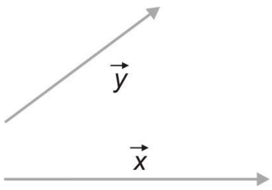
Als je $\vec{x}$ en $\vec{y}$ in hetzelfde punt laat beginnen, dan krijg je $\vec{x} + \vec{y}$ als diagonaal van het parallellogram *ABDC* zoals hierboven. Deze manier noemen we de **parallellogrammethode**.

Het kan ook zo.



Je laat de *staart* van $\vec{y}$ beginnen bij de *kop* van $\vec{x}$. De pijl die wijst van de staart van $\vec{x}$ naar de kop van $\vec{y}$ stelt de verplaatsing voor. Deze manier noemen we **kop-staartmethode**.

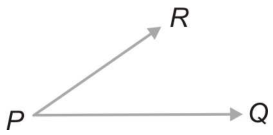
*** 2** De vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ hiernaast staan ook op het werkblad.



a. Teken met de kop-staartmethode de vectoren $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{y}$ en $\vec{x}+2\vec{y}$.

b. Teken met de parallellogrammethode de vectoren $2\vec{x}+\vec{y}$, -($\vec{x}+\vec{y}$) en $\vec{x}-2\vec{y}$.

*** 3** De twee vectoren hiernaast staan ook op het werkblad.



a. Teken de vector $2\cdot\overrightarrow{PQ}+1\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PR}$.

(Hoewel we niet afgesproken hebben wat $k\cdot\overrightarrow{PR}$ betekent als *k* niet geheel is, zal wel duidelijk zijn wat er mee bedoeld wordt.)

b. Teken de vector $2\cdot\overrightarrow{PQ}-1\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PR}$.

In de natuurkunde wordt veel met vectoren gewerkt. Daar kan een vector bijvoorbeeld trekkracht voorstellen, of snelheid.

4 Ollie en Stan duwen een zware kast. Ollie duwt drie keer zo hard als Stan. Ollie duwt tegen de linkerzijkant en Stan duwt tegen de voorkant van de kast.
De krachten van Ollie en Stan kun je voorstellen door vectoren. De richting van de vector geeft de richting van de kracht aan en de lengte van de vector geeft de grootte van de kracht an. De vector die bij het duwen van Ollie hoort, is langer dan de vector die bij het duwen van Stan hoort.

a. Hoeveel keer zo lang?

b. Teken in een bovenaanzicht heel precies de richting waarin de kast verschoven wordt.

De vector die je in **b** getekend hebt, is de **resultante** van de vectoren van de krachten van Ollie en Stan.

5 Jaap dobbert in een roeibootje op de Maas. De Maas heeft daar een stroomsnelheid van 3 km/u.

a. Teken de stroomvector van de Maas, dat is een pijl in de stroomrichting; maak hem 3 cm lang.
Zo wordt het bootje verplaatst als Jaap niet roeit.

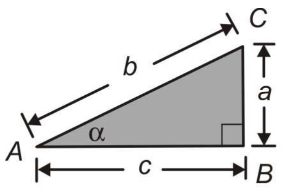
Jaap gaat met een snelheid van 4 km/u roeien (dat wil zeggen: in stilstaand water zou de boot een snelheid van 4 km/u hebben).

b. Teken de ‘netto’-verplaatsingsvector van het bootje als Jaap met de stroom mee roeit.

De verplaatsingsvector die je getekend hebt, is de resultante van de vector bij de stroomsnelheid en de vector bij het roeien.

c. Hoe lang heb je de vector gemaakt?
d. Teken de verplaatsingsvector als Jaap tegen de stroom in roeit. Hoe lang is de vector nu?

Hiernaast zijn (verkleind) de vectoren getekend die de stroomsnelheid en de roeisnelheid weergeven als Jaap loodrecht op de richting van de stroom roeit.
e. Teken de resultante van de twee vectoren, de snelheidsvector van het bootje.
f. Bereken de snelheid van het bootje.
Tip. Pas de stelling van Pythagoras toe.
g. Bereken de hoek tussen de richting die het bootje opgaat en de richting waarin de rivier stroomt in graden nauwkeurig. Als je niet weet hoe dat moet, lees dan eerst het volgende.

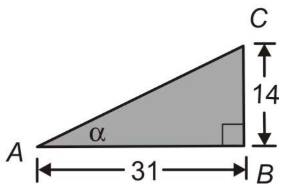


Herhaling uit de derde klas

In de rechthoekige driehoek *ABC*: $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$

$\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$

$\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$

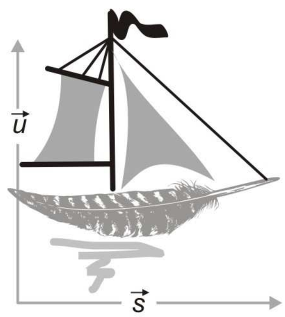


Voorbeeld

In de driehoek hiernaast is $tan(\alpha) = \frac{14}{31}$, met het rekenmachientje vind je dan: $\alpha \approx 24{,}3\,°$.

$\frac{14}{31}$ [shift] [tan] ; zorg wel dat het machientje in de stand DEG staat (MODE DEGREE).

Je kunt ook je GR gebruiken: $tan^{-1}(\frac{14}{31})$.



6 Veerboot op de Maas

Een veerboot vaart loodrecht de rivier over, doordat de veerman de boot schuin tegen de stroom in stuurt. De stroomsnelheid van de rivier is weer 3 km/u en wordt weergegeven met een pijl $\vec{s}$ van 3 cm. De pijl $\vec{u}$ daar loodrecht op is 3,75 cm lang.

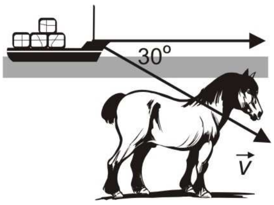
a. Neem de figuur over en teken de vector $\vec{v}$ zó, dat $\vec{s} + \vec{v} = \vec{u}$

b. Bereken de lengte van $\vec{v}$ in één decimaal en de hoek die $\vec{v}$ met $\vec{s}$ maakt in graden nauwkeurig.
Welke snelheid moet de veerboot uit zichzelf maken?

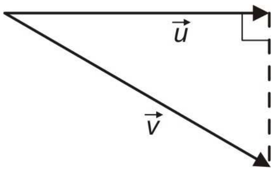
De lengte van een vector $\vec{v}$ noteren we met $|\vec{v}\,|$.

In opgave **6** geldt: $|\vec{s}\,| = 3$.

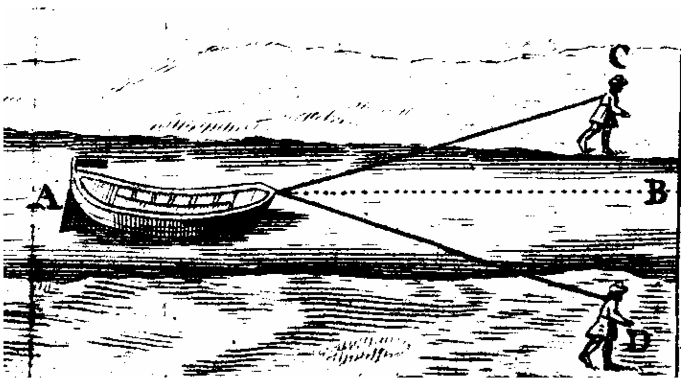
7 Jaagpad



Vroeger werden schuiten vaak voortgetrokken door een paard (of een mens) op een pad langs het water, het zogenaamde jaagpad.
De kracht waarmee een paard op het jaagpad de schuit hiernaast voorttrekt, loopt niet in de richting waarin de schuit zich verplaatst. De trekkracht van het paard geven we weer met de vector $\vec{v}$. Deze maakt een hoek van 30° met de richting waarin de schuit zich verplaatst. Dit is natuurlijk niet zo effectief, maar het gaat niet anders. De trekkracht $\vec{u}$ waarmee de schuit voort getrokken wordt is kleiner.

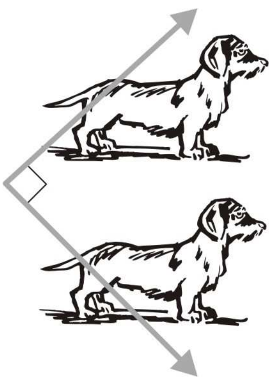


Bepaal $|\vec{u}\,|$ als $|\vec{v}\,| = 2$.



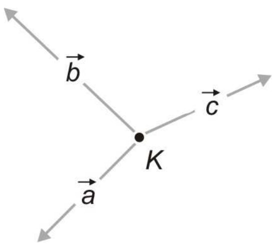
Uit: Nollet, *Leçons de Physique Experimentale,* M.DCC.LIII.

8 Mieke laat haar beide hondjes uit, ieder hondje netjes aan de lijn. De hondjes trekken even hard. De richtingen waarin ze trekken, staan loodrecht op elkaar. Mieke trekt even hard terug.
a. Neem het plaatje over en geef de kracht waarmee Mieke trekt aan met een pijl.
b. Hoeveel keer zo groot is de kracht waarmee Mieke trekt als die waarmee elk van de honden trekt?
Tip. Neem de lengte van de vector waarmee een hond trekt 1.

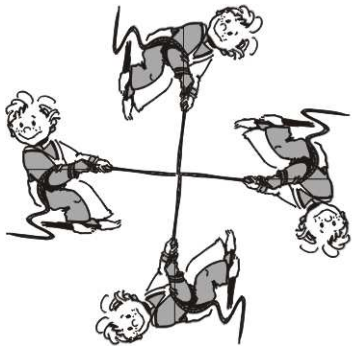


Als je de drie vectoren (die bij de twee honden en die bij Mieke) bij elkaar telt, krijg je een vector met lengte 0. Dit noemen we de nulvector.

De vector met lengte 0 geven we aan met $\vec{0}$.
Er geldt: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ voor elke vector $\vec{v}$.
We noemen $\vec{0}$ wel de **nulvector**.
De nulvector heeft geen richting.



*** 9**



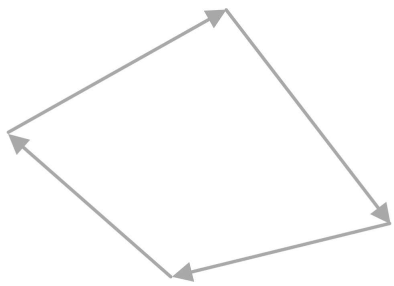
Vier touwen zijn aan elkaar geknoopt. Aan elk van de touwen trekt een krachtpatser. De trekkrachten worden voorgesteld door de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$. Hiervan zijn $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ al getekend.

a. Welke van de drie trekkrachten is het grootst?

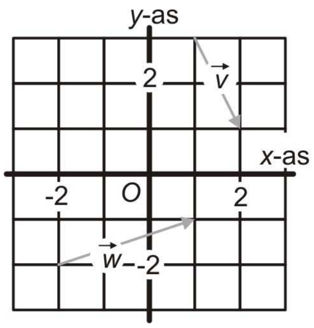
b. Teken de vector $\vec{d}$.

Er geldt: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

10 Hieronder zijn vier vectoren getekend. Wat kun je over de som van deze vier vectoren zeggen?

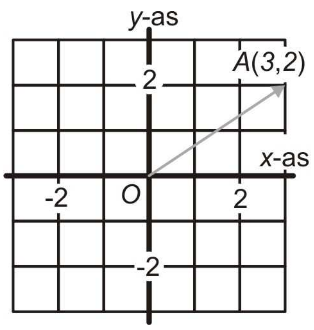


2 Vectoren in een assenstelsel



Vaak is het handig in het platte vlak een assenstelsel te kiezen om met coördinaten te kunnen rekenen.
Vectoren geven we dan aan met hun zogenaamde kentallen. Zo is in het plaatje hiernaast:
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Het is gemakkelijker kentallen in een rij te schrijven in plaats van in een kolom, dus $\vec{v} = (1,-2)$ en $\vec{w} = (3,1)$.
Het heeft ook een nadeel. Als A bijvoorbeeld het punt (3,2) is, dan kun je in de schrijfwijze geen onderscheid zien tussen de vector $\overrightarrow{OA}$ en het punt A, beide noteren we met (3,2).
Uit de tekst er omheen moet dan blijken of we coördinaten van punten of kentallen van vectoren bedoelen.



1 **a.** Teken in een assenstelsel de vectoren $\vec{a} = (2,3)$ en $\vec{b} = (-1,2)$.

b. Teken ook $-2 \cdot \vec{a}$ en $\vec{a} + \vec{b}$.

c. Wat zijn de kentallen van de vectoren die je in **b** getekend hebt?

d. Teken de vector $-\vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$ en geef de kentallen van deze vector.

Het punt $P(2,3)$ wordt verplaatst over de vector (5,-1) naar een punt Q.

e. Wat zijn de coördinaten van Q?

> Als je een vector met een getal vermenigvuldigt, moet je beide kentallen met dat getal vermenigvuldigen.
> Als je twee vectoren optelt, moet je de kentallen plaatsgewijs optellen.
> In formules:
> als $\vec{p} = (p,q)$, dan $k \cdot \vec{p} = (kp,kq)$,
> als $\vec{r} = (r,s)$, dan is $\vec{p} + \vec{r} = (p+r,q+s)$,
> als je het punt $A(a,b)$ verschuift over de vector $\vec{p} = (p,q)$, dan krijg je het punt $(a+p,b+q)$.

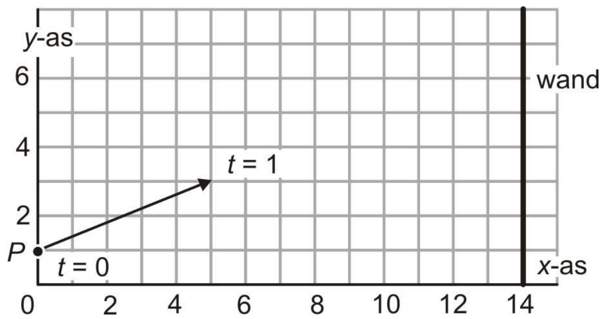
Voorbeeld

Als $\vec{a} = (2,3)$ en $\vec{b} = (-1,2)$ dan

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (2 \cdot 2\,,\, 2 \cdot 3) + (-3 \cdot -1\,,\, -3 \cdot 2)$$
$$= (4,6) + (3,-6) = (4+3\,,\, 6-6) = (7,0)$$

2 Vanuit het punt $P(0,1)$ wordt een kogel afgeschoten in de in de richting $\vec{v} = (5,2)$.
We nemen aan dat de kogel in een rechte lijn beweegt en elke seconde 5 eenheden in de x-richting en 2 eenheden in de y-richting beweegt.
a. Neem de figuur hieronder over en teken daarin ook de punten waar de kogel zich bevindt op de tijdstippen 2, $2\frac{1}{2}$ en 3.

Ergens tussen $t = 2$ en $t = 3$ komt de kogel tegen de wand (de lijn $x = 14$).

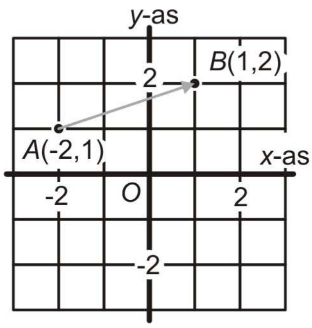


b. Na hoeveel seconden precies? In welk punt?

Het antwoord op **b** kun je ook vinden door met vectoren te rekenen. De coördinaten van het punt waar de steen zich op $t = 2\frac{1}{2}$ bevindt, krijg je door het punt (0,1) over de vector $2\frac{1}{2} \cdot (5,2)$ te verschuiven. Je komt dan in het punt:
$(0,1) + 2\frac{1}{2} \cdot (5,2) = (0 + 2\frac{1}{2} \cdot 5\,,\, 1 + 2\frac{1}{2} \cdot 2) = (12\frac{1}{2},6)$.
In het algemeen: op tijdstip t bevindt de kogel zich in het punt: $(0,1) + t \cdot (5,2) = (5t, 1+2t)$.
De kogel komt op de wand als zijn eerste coördinaat 14 is, dus $5t = 14$, dus $t = 2\frac{4}{5}$. Het punt waar de kogel zich dan bevindt, vind je door $t = 2\frac{4}{5}$ in te vullen in $(5t, 1+2t)$.
Je vindt het punt $(14, 6\frac{3}{5})$.

We noemen $(x,y) = (0,1) + t \cdot (5,2)$ of $(x,y) = (5t, 1+2t)$ een **parametervoorstelling** (pv) van de lijn waarlangs de kogel beweegt. De parameter is t.

3 **a.** Teken in een rooster de punten A(-2,1) en B(1,2). Teken ook de vector $\overrightarrow{AB}$.



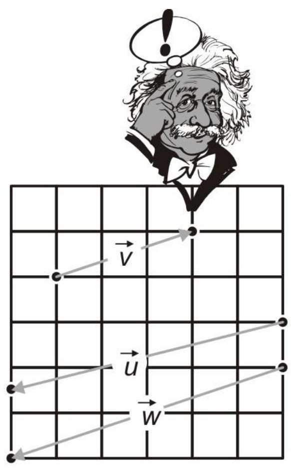
We gaan het punt A verplaatsen over alle mogelijke veelvouden van de vector $\overrightarrow{AB}$. Je krijgt dan de lijn met pv:
$(x,y) = (-2,1) + t(3,1) = (-2 + 3t\,,\,1 + t)$.
b. Teken de punten met coördinaten $(-2 + 3t\,,\,1 + t)$ die je krijgt door voor $t = 0$, 1, -1 en 2 te nemen.

Voor $t = 0$ krijg je natuurlijk A en voor $t = 1$ krijg je B. Voor alle andere waarden van t krijg je punten van lijn AB: je beweegt vanuit A immers steeds in dezelfde richting, namelijk in de richting van vector $\overrightarrow{AB}$ als $t > 0$ en in de tegegestelde richting als $t < 0$.

Het punt (-17,-4) ligt op lijn AB.
c. Welke waarde van t moet je dan nemen om dat punt te krijgen?
d. Voor welke waarde van t is $(-2 + 3t\,,\,1 + t)$ een punt van de x-as? En voor welke waarde van t een punt van de y-as? Wat zijn dus de coördinaten van de snijpunten van lijn AB met de x-as en de y-as?

4 k is de lijn met pv $(x,y) = (2,1) + t(1,-2) = (2 + t\,,\,1 - 2t)$ en m de lijn pv $(x,y) = (2,0) + t(-2,4) = (2 - 2t\,,\,4t)$.
a. Teken de lijnen k en m in een rooster, door eerst wat punten van die lijnen te berekenen.

b. De lijnen k en m zijn evenwijdig. Dit kun je aan de pv van die lijnen zien.
Hoe?
c. Geef een pv van de lijn door (2,3) evenwijdig aan k en m.
d. Teken de lijn met pv $(x,y) = (0,4) + t(-1,2)$.



De lijn die je in **d** getekend hebt is m. Er is dus meer dan één mogelijkheid om een pv van een lijn te geven.

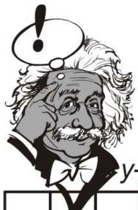
We zeggen dat twee vectoren **in lijn liggen** als ze dezelfde of tegengestelde richting hebben.

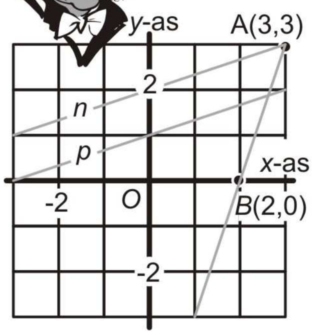
In het plaatje liggen $\vec{v}$ en $\vec{w}$ in lijn, $\vec{u}$ en $\vec{w}$ niet.

5 **a.** Bepaal de getallen a en b zodat de drie vectoren (2,4), (a,2) en (b,-8) in lijn liggen.

b. Bepaal de getallen a en b zodat de drie vectoren (2,5), (a,-2) en (b,7) in lijn liggen.
Twee vectoren (ongelijk aan de nulvector) liggen in lijn als de een een veelvoud van de ander is.
In formule: $\vec{v}$ en $\vec{w}$ liggen in lijn als er een getal k is zó, dat $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.

In opgave **4** hebben we de lijnen k en m bekeken.
De richting van de lijn k met pv $(x,y) = (2,1) + t(1,-2)$ wordt bepaald door de vector (1,-2). De lijn m met pv $(x,y) = (2,0) + t(-2,4)$ is evenwijdig met k omdat de vectoren (1,-2) en (-2,4) in lijn liggen.
In de pv van k: $(x,y) = (2,1) + t(1,-2)$ noemen we de vector (1,-2) **richtingsvector**.





Voorbeeld

- Een pv van de lijn door A(3,3) en B(2,0) vind je zo.

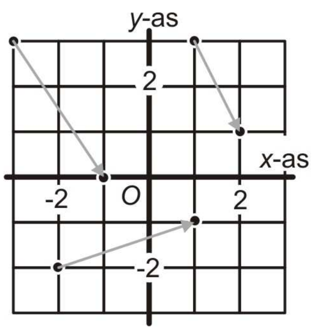
Een richtingsvector is $\overrightarrow{AB} = (3-2, 3-0) = (1,3)$.
Een pv is dan: $(x,y) = (2,0) + t(1,3)$.

- Een pv van de lijn n door A(3,3) evenwijdig met p vind je zo.

Een richtingsvector van p is (3,1), die kun je ook als richtingsvector van n nemen. Een pv van n is dan:
$(x,y) = (3,3) + t(3,1)$.

6 Lijn k snijdt de x-as in (3,0) en de y-as in (0,2).
a. Geef een pv van k.

m gaat door door A(2,2) en is evenwijdig met k.
b. Geef een pv van m.
c. Bereken de coördinaten van de snijpunten van m met de x-as en de y-as.



7 **a.** Bepaal de lengte van elke vector in het plaatje hiernaast. Laat wortels in je antwoord staan.
b. Hoe bereken je de lengte van de vector (a,b)?

De lengte van (a,b) is $\sqrt{a^2 + b^2}$.

8 Gegeven zijn de punten A(1,1), B(6,6) en C(0,-6).
a. Bereken: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ en $|\overrightarrow{CA}|$.
Ter herinnering: met $|\overrightarrow{AB}|$ wordt de lengte van vector $\overrightarrow{AB}$ bedoeld.

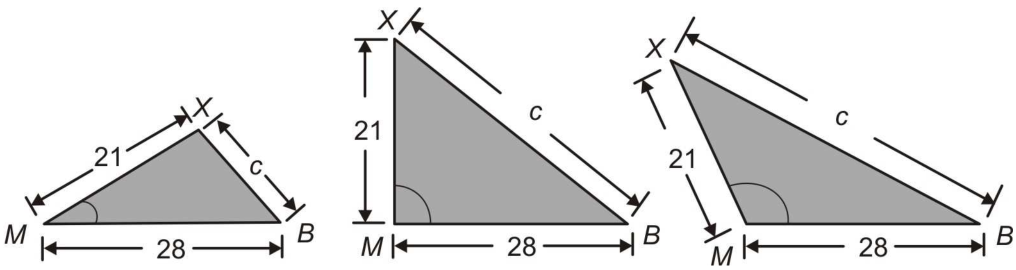
$\angle CAB = 125°$.
b. Hoe kun je nu de andere hoeken van driehoek *ABC* berekenen?

Als $A(a,b)$ en $P(p,q)$, dan is de afstand van A tot P gelijk aan $|\overrightarrow{AP}|$.
Dus $AP = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2}$.

9 **a.** Geef twee vectoren die loodrecht op de vector (1,-3) staan.
b. Geef een vector die loodrecht op de vector (87,100) staat.

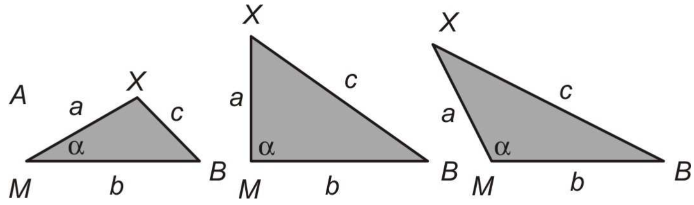
Misschien is opgave **9b** niet gelukt. In het volgende stukje leiden we een regel af, waarmee je kunt bepalen of twee vectoren loodrecht op elkaar staan.

10



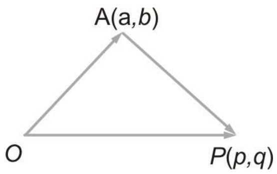
Een elastiekje is vastgemaakt in de punten *X* en *B* aan twee stokjes: *MX* van lengte 21 en *MB* van lengte 28. Stokje *MX* wordt om *M* gedraaid. Hoe groter de hoek tussen de stokjes is, hoe langer het elastiekje wordt. De lengte van het elastiekje noemen we *c*. In het middelste plaatje is de hoek tussen de stokjes recht. In dit geval kun je *c* berekenen.

a. Bereken *c* in het middelste plaatje hierboven.
In de andere gevallen kun je alleen maar zeggen dat het elastiekje langer of korter is dan 35 cm. Het zal duidelijk zijn dat *c* groter is naarmate de hoek tussen de twee stokjes groter is. De hoek tussen de stokjes noemen we α, de lengte van de stokjes *a* en *b* en de lengte van het elastiekje *c*. Bekijk het plaatje op de volgende bladzijde.



b. Vul de juiste tekens in, je kiezen uit: $>$, $<$, $=$.
Als $\alpha <$ 90°, dan a^2+b^2 ___ c^2
Als $\alpha =$ 90°, dan a^2+b^2 ___ c^2
Als $\alpha >$ 90°, dan a^2+b^2 ___ c^2

Wat we hierboven gevonden hebben passen we toe op driehoek *OPA*.

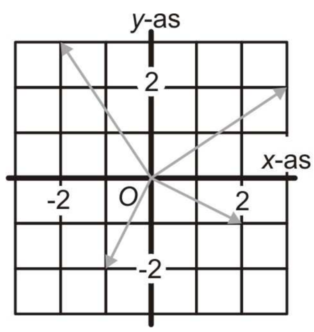


$OA=\sqrt{a^2+b^2}$, $OP=\sqrt{p^2+q^2}$ en

$AP=\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}$

Driehoek *OPA* is rechthoekig in $O \Leftrightarrow OA^2+OP^2=AP^2$
$\Leftrightarrow a^2+b^2+p^2+q^2=(p-a)^2+(q-b)^2$.
$\Leftrightarrow a^2+b^2+p^2+q^2=p^2-2pa+a^2+q^2-2qb+b^2$.
$\Leftrightarrow -2pa+-2qb=0$
$\Leftrightarrow pa+qb=0$.

> De vectoren (a,b) en (p,q), beide $\neq$ (0,0) staan loodrecht op elkaar $\Leftrightarrow ap+b\,q=0$.
> Zo staat de vector (a,b) loodrecht op ($-b$,a) en op (b,$-a$).



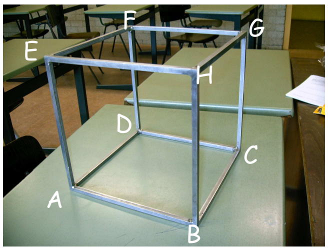
In het plaatje hiernaast zie je dat (3,2) en (-2,3) loodrecht op elkaar staan, evenals (2,-1) en (-1,-2).

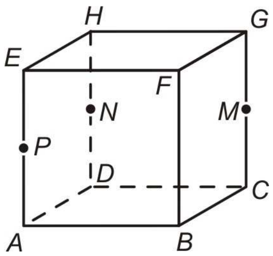
11 Gegeven zijn de punten A(10,2), B(-1,5) en C(1,0). Geef een pv van de lijn k door C loodrecht op lijn AB.
Tip. Een richtingsvector van k is een vector die loodrecht op $\overrightarrow{AB}$ staat.

12 Gegeven zijn de punten A(-2,4) en B(4,2).
a. Ga na dat elk punt van lijn AB van de vorm:
$(4+3t\,,2-t)$ is.

We zoeken het punt $T(4+3t\,,2-t)$ op lijn AB dat het dichtst bij O(0,0) ligt.
Dan moet $\overrightarrow{OT}$ loodrecht op $\overrightarrow{AB}$ staan.
b. Bereken de coördinaten van T.
c. Wat is de afstand van O tot de lijn AB?

3 Vlakken en lijnen in de ruimte





* 1 Onderlinge ligging van vlakken en lijnen

De kubus hiernaast heeft hoekpunten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F, G* en *H*. We schrijven: kubus *ABCD.EFGH*.
Met vlak *ABC* bedoelen we het platte vlak waarin de punten *A*, *B* en *C* liggen. Dat vlak moet je je uitgebreid denken. Daarin ligt niet alleen punt D maar ook alle punten van het tafelblad waar de kubus op staat. En ook dat tafelblad moet je je weer uitgebreid denken.

De vlakken *ABC* en *EFG* zijn evenwijdig: zij hebben geen enkel punt gemeenschappelijk.
a. Geef nog twee vlakken die evenwijdig zijn aan elkaar.

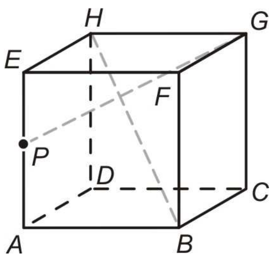
Het punt *M* is het midden van ribbe *CG*. Vlak *ABM* en vlak *CGHD* hebben veel meer dan alleen het punt *M* gemeenschappelijk. (Vlak *ABM* is niet alleen driehoek *ABM*, maar je moet het je naar alle kanten uitgebreid denken.) Het is de lijn door *M* en *N*, het midden van ribbe *HD*.
We noemen *MN* de **snijlijn** van de vlakken *ABM* en *CGHD*.
b. De vlakken *ADM* en *BCGF* snijden elkaar ook volgens een lijn. Teken die lijn op het werkblad.
c. Teken de snijlijn van de vlakken *ACGE* en *DBFH* op het werkblad.

P is het midden van ribbe *EA*.
d. Teken de snijlijn van vlak *HMP* met de voorkant en met de rechter zijkant van de kubus.

Het is soms moeilijk de snijlijn van twee vlakken te tekenen.
e. Teken de snijlijn van vlak *MEB* met de achterkant van de kubus.

Alle lijnen in het bovenvlak van de kubus zijn evenwijdig met het grondvlak van de kubus.
f. Waar ligt het snijpunt van vlak *MNP* met lijn *HB*?
g. Teken het snijpunt van lijn *HM* met vlak *ABCD*. (Dit ligt buiten de kubus.)

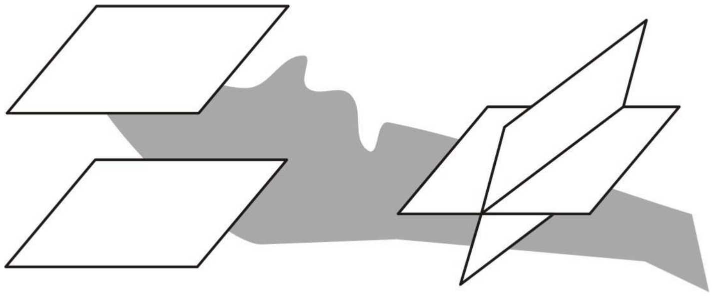
h. Teken het snijpunt van de lijnen *AG* en *BH*.
i. Teken het snijpunt van de lijnen *AG* en *EM*.



Het lijkt wel of de lijnen *PG* en *HB* elkaar snijden. Maar dat is niet zo. Lijn *HB* ligt in het diagonale vlak ABGH van de kubus. Het enige punt dat lijn PG met dit vlak gemeen heeft is het punt G.
De lijnen PG en HB noemen we kruisende lijnen: ze zijn niet evenwijdig en ze snijden elkaar niet.
j. Geef een lijn die lijn *AB* kruist.
k. Hoe weet je zeker dat de lijnen *AG* en *EM* elkaar snijden?

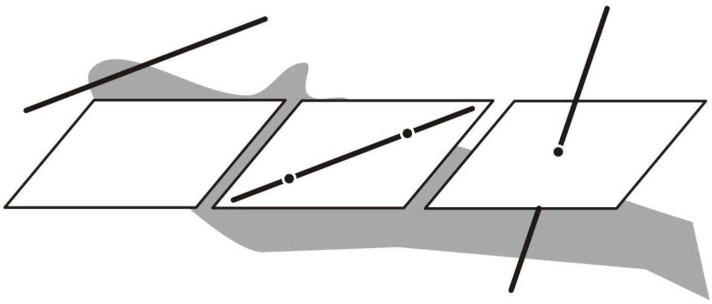
Onderlinge ligging

• Van twee vlakken:



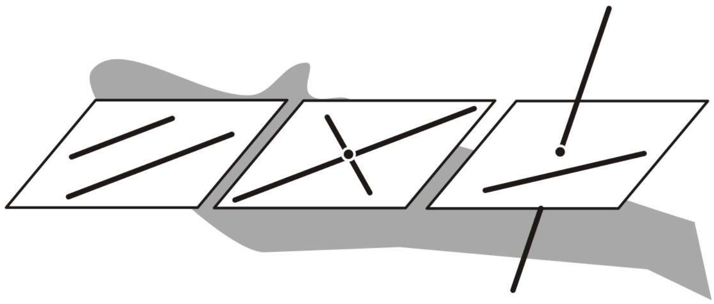
òf de vlakken zijn **evenwijdig**,
òf ze **snijden** elkaar volgens een lijn.

• Van een lijn en een vlak:

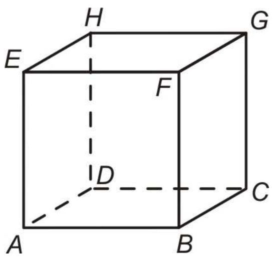


òf de lijn en het vlak zijn **evenwijdig**,
òf de lijn **ligt in het vlak**,
òf de lijn **snijdt** het vlak in één punt.

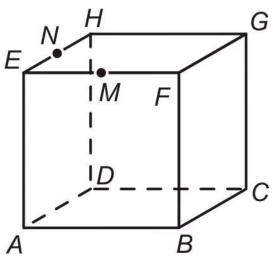
• Van twee lijnen:



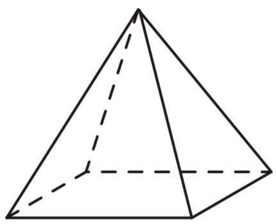
òf de lijnen liggen in één vlak, ze zijn dan **evenwijdig** of ze **snijden** elkaar,
òf de lijnen liggen niet in een vlak; de lijnen **kruisen** elkaar dan.



2 **a.** Hoeveel ribbben van kubus *ABCD.EFGH* snijden ribbe *AB*, hoeveel zijn ermee evenwijdig en hoeveel kruisen ribbe *AB* ?
b. Welke zijvlaksdiagonalen in de kubus zijn evenwijdig met vlak *BED* ?



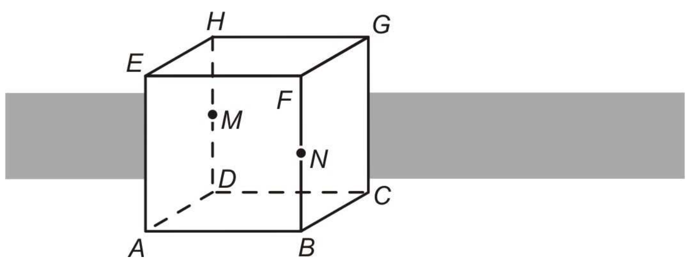
3 Bij kubus *ACBD.EFGH* is *M* het midden van *EF* en *N* van *EH*.
Bepaal de onderlinge ligging van de lijnen:
MN en *BD*,
BM en *DN*,
DM en *BN*,
CM en *DN*.



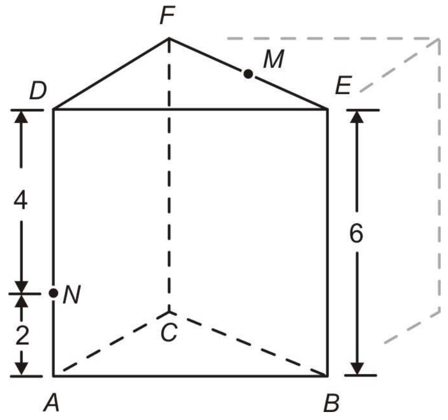
* **4** Hiernaast staat een regelmatige vierzijdige piramide. Het linker en rechter zijvlak van de piramide hebben de top gemeenschappellijk. De twee vlakken snijden elkaar dus volgens een lijn.
Teken die lijn op het werkblad.

* **5** Bij kubus *ABCD.EFGH* zijn *M* en *N* middens van ribben. Omdat *AM* en *NG* evenwijdig zijn, liggen ze in één vlak.
a. Teken de snijlijn van vlak *AMNG* en vlak *AHGB*.
Tip. Zoek twee punten die in beide vlakken liggen.

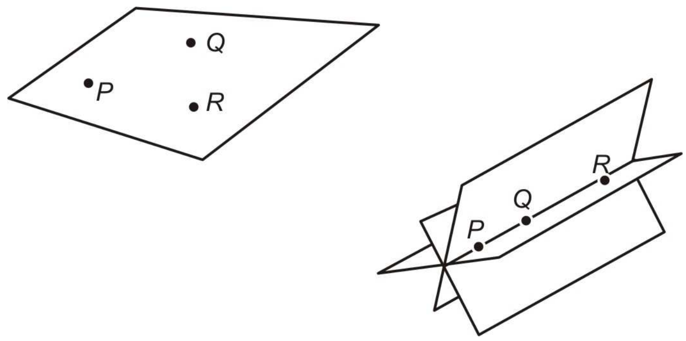
b. Teken in de kubus het vlak door *N* evenwijdig met vlak *AMC*.



* **6** *ABC.DEF* is een recht prisma (de grensvlakken zijn twee driehoeken en drie rechthoeken). *M* is het midden van ribbe *EF* en *N* ligt op hoogte 2 op ribbe *AD*.
a. Teken de lijn door *N* in vlak *ACFD* die lijn *BM* snijdt.
b. Bereken de hoogte waarop het snijpunt uit **a** ligt.



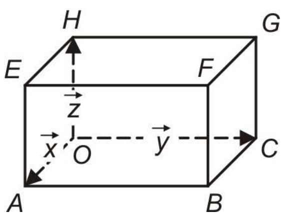
Hieronder zie je hoe drie punten *P*, *Q* en *R* in de ruimte kunnen liggen:



• òf de punten liggen op één lijn, dan gaan er oneindig veel vlakken door *P*, *Q* en *R*,
• òf de punten liggen niet op één lijn, dan gaat er één vlak door *P*, *Q* en *R*.

7 Een kruk met drie poten staat vast op een vlakke vloer, een tafel op vier poten kan ´wiebelen`.
Verklaar dat.

4 Rekenen in de ruimte

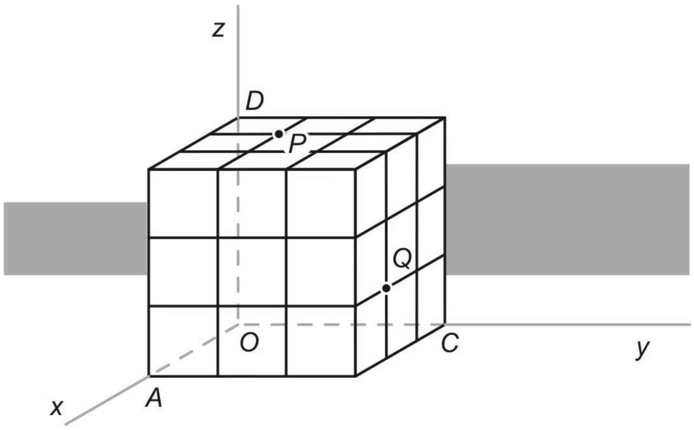


1 Hiernaast is een recht blok getekend. Voor het gemak noemen we de vectoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ en $\overrightarrow{OH}$: $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$.

a. Ga na: $\overrightarrow{AG} = -\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$.

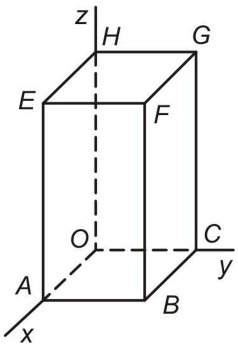
b. Schrijf ook de volgende vectoren met behulp van $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$: $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CH}$ en $\overrightarrow{AC}$.

2 Kubus *OABC.DEFG* met *A*(3,0,0), *C*(0,3,0) en *D*(0,0,3) is opgebouwd uit 27 kubusjes met ribbe 1. Hierop zijn de punten *P*(1,1,3) en *Q*(2,3,1) getekend.



a. Geef de kentallen van vector $\overrightarrow{PQ}$. Hoe kun je die vinden uit de coördinaten van de punten *P* en *Q*?
b. In welk punt kom je als je je vanuit (1,3,1) over vector (1,-1,2) verplaatst?

Het volgende zal duidelijk zijn.
Als je een vector met een getal vermenigvuldigt, moet je alledrie kentallen met dat getal vermenigvuldigen.
Als je twee vectoren optelt, moet je de kentallen plaatsgewijs optellen.
In formules:
als $\vec{p} = (p, q, r)$ dan $k \cdot \vec{p} = (kp, kq, kr)$,
als $\vec{s} = (s, t, u)$, dan is $\vec{p} + \vec{r} = (p+s, q+t, r+u)$,
als je het punt *A*(*a,b,c*) verschuift over de vector $\vec{p} = (p, q, r)$, dan krijg je het punt $(a+p, b+q, c+r)$.



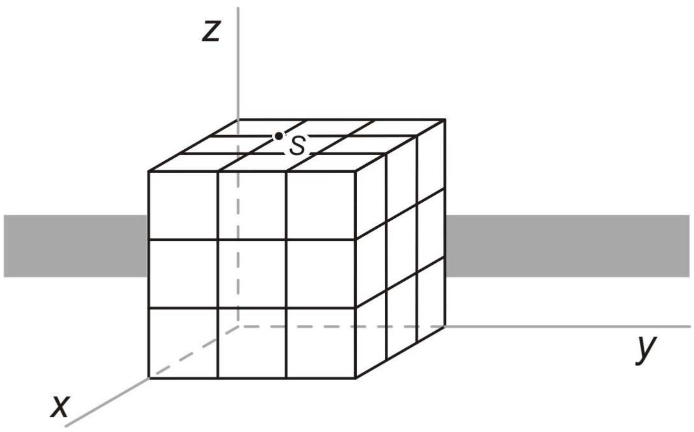
3 Het blok hiernaast is 4 hoog, 2 breed en 3 diep.

a. Geef de kentallen van $\overrightarrow{AG}$.

b. Bereken $|\overrightarrow{AG}|$.

De lengte van de vector (a,b,c) is $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
In formule: $|(a,b,c)| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

*** 4**



Ik start in een punt S voor een wandeling in het assenstelsel. Ik verplaats me eerst volgens de vector (-1,1,-1), dan volgens (1,1,-1), (1,-1,-1), (1,-1,1), (-1,-1,1) en tenslotte volgens (-1,1,1). Mijn wandeling bestaat dus uit zes rechte stukken.

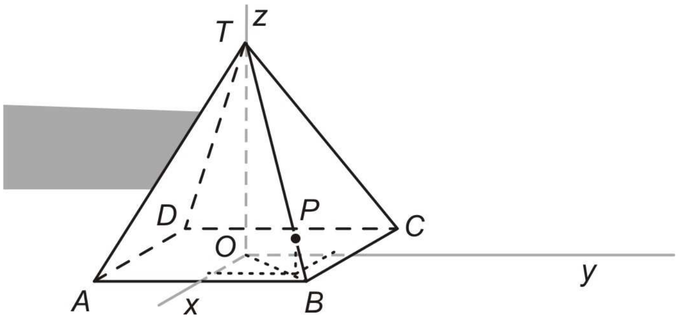
a. Hoe lang is elk van die stukken?

b. Teken de rondwandeling mert startpunt S(1,1,3) in de kubus opgebouwd uit 27 kubusjes met ribbe 1, zoals hierboven.

c. Hoe kun je aan de verplaatsingsvectoren zien dat ik een <u>rond</u>wandeling maak, met andere woorden dat ik weer in S uitkom?

d. Hoe kun je aan de verplaatsingsvectoren zien dat de \`overstaande zijden´ van de wandeling evenwijdig zijn.

5 *T.ABCD* is een regelmatige vierzijdige piramide, met *A*(4,-4,0), *B*(4,4,0) en *T*(0,0,8).



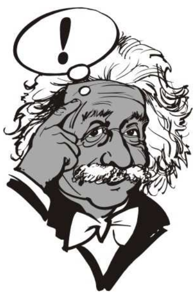
a. Geef de coördinaten van *C* en *D*.
b. Bereken de lengte van de opstaande ribben van de piramide.

P ligt op ribbe *BT* en wel zó dat $BP = \frac{1}{4}BT$.
c. Geef $\overrightarrow{BT}$ en $\overrightarrow{BP}$.

Uit **c** volgt dat je vanuit *B* in *P* komt door je over de vector (-1,-1,2) te verplaatsen.
d. Wat zijn dus de coördinaten van *P*?

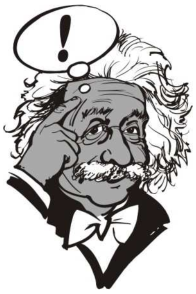
Punt *R* verdeelt de ribbe *BT* zó, dat $BR : RT = 3 : 7$.
e. Bereken de coördinaten van *R*.

Opmerking
Elk punt op lijn *BT* kan vanuit *B* bereikt worden door in de richting van *BT* te lopen of in tegengestelde richting. Elk punt van lijn *BT* heeft dus coördinaten van de vorm: $(4,4,0) + t(-4,-4,8) = (4-4t, 4-4t, 8t)$, voor een of andere waarde van t.

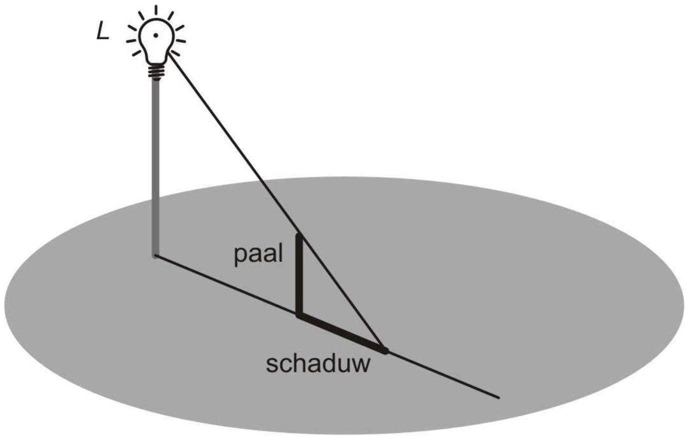


$(x,y,z) = (4,4,0) + t(-4,-4,8)$ of $(x,y,z) = (4-4t\,,\,4-4t\,,\,8t)$ is een parametervoorstelling van lijn *BT*.

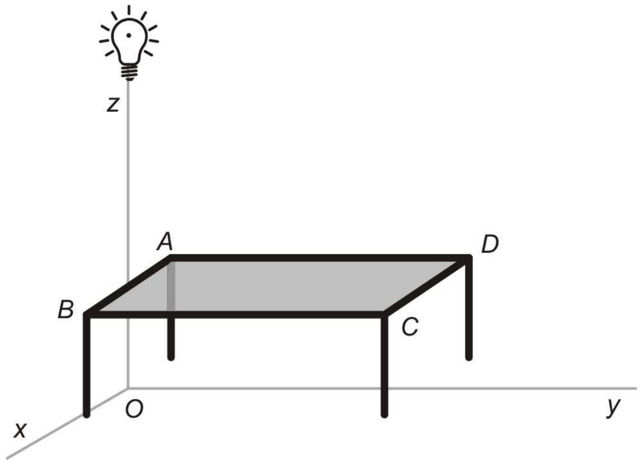
Net zoals in in het platte vlak is het mogelijk meer pv´s van een lijn te geven. Een andere pv van lijn *BT* is bijvoorbeeld: $(x,y,z) = (0,0,8) + t(-1,-1,2)$, want (0,0,8) is een punt van lijn *BT* en de vectoren (-1,-1,2) en (-4,-4,8) liggen in lijn.



Een lamp in *L* werpt een schaduw van een paal op de grond.
Hieronder zie je hoe je die schaduw kunt vinden.



* **6**



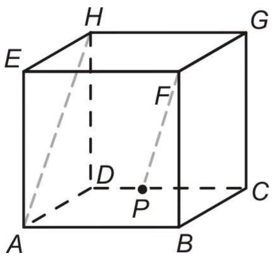
Op het werkblad is een tafel met ijzeren frame en glazen blad getekend. Het blad is 80 bij 120 en heeft hoogte 40 (maten in cm). *A*, *B*, *C* en *D* zijn de hoekpunten van het blad. Midden boven lijnstuk *AB* zit een lamp op hoogte 120 boven de vloer.
a. Teken op het werkblad de schaduw van de punten *A*, *B*, *C* en *D* op de vloer.

We voeren coördinaten in.
De lamp bevindt zich in *L*(0,0,12), *A* is het punt (-4,0,4) en *C* het punt (4,12,4).
b. Geef de coördinaten van *B* en *D*.

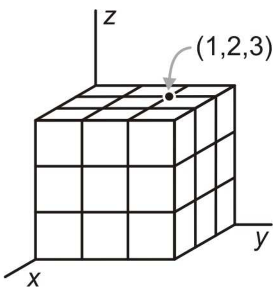
$(x,y,z)=(t\,,3t\,,12-2t)$ is een pv van lijn *LC*.

c. Ga na dat na.
d. Bereken de coördinaten van de schaduw van *C*.
Tip. Eén van de coördinaten van de schaduw is 0.
e. Bereken met behulp van een pv van lijn *LA* de coördinaten van de schaduw van *A*.
f. Geef ook de coördinaten van de schaduwen van *B* en *D*.

Op tafel zit een vlekje in het punt (2,3,4).
g. Bereken met een pv de coördinaten van de schaduw van het vlekje.



7 *ABCD.EFGH* is een kubus. Oppervlakkig gezien lijken de lijnen *FP* en *AH* evenwijdig te lopen. Dit kan natuurlijk niet. Met vectoren kun je dat laten zien. We kiezen een assenstelsel met *D* als oorsprong en *A*(6,0,0), *C*(0,6,0) en *H*(0,0,6). *P* is het punt (0,2,0).
a. Geef de vectoren $\overrightarrow{PF}$ en $\overrightarrow{AH}$.
b. Hoe kun je uit **a** concluderen dat de lijnen *FP* en *AH* niet evenwijdig lopen?



* **8** *Van een punt is de som van de coördinaten = 6*
Bovenstaande kun je in een vergelijking schrijven:
$x + y + z = 6$.
a. Voldoet het punt (1,2,3) aan deze vergelijking?

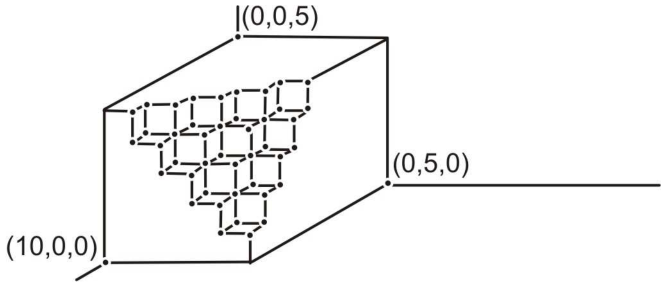
De kubus met ribbe 3 hiernaast heeft drie ribben langs de coördinaat-assen. Op de kubus zijn 37 roosterpunten aangegeven.
b. Kleur op het werkblad alle roosterpunten op de kubus die aan het verband $x + y + z = 6$ voldoen. Dat zijn er 8.
c. Kleur alle roosterpunten op de kubus die aan de vergelijking $x + y + z = 7$ voldoen.

Van een punt zijn eerste en de derde coördinaat zijn gelijk
In een vergelijking geschreven is dit: $x = z$.
d. Kleur alle roosterpunten op de kubus die aan deze vergelijking voldoen.

Alle punten in het rechter zijvlak van de kubus voldoen aan de vergelijking $y = 3$.
e. Aan welke vergelijking voldoen de punten aan de voorkant van de kubus? En aan de bovenkant?

Een vergelijking in x, y en z van de vorm $ax + by + cz = d$ stelt een vlak voor.

* **9** $\boldsymbol{x+y+z=16}$ **en** $\boldsymbol{2x+3y+z=32}$



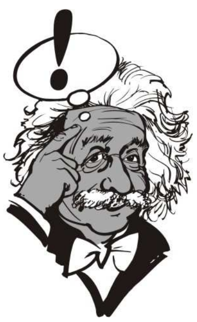
Hierboven is een balk van 10 bij 5 bij 5 getekend met drie ribben langs de assen.
Uit de balk is een hap weggenomen. De 43 roosterpunten die daardoor zichtbaar zijn geworden, zijn dik aangegeven.
a. Kleur op het werkblad alle van deze 43 punten die voldoen aan het verband $x+y+z=16$.

b. Welke van deze punten voldoen ook aan de vergelijking $2x+3y+z=32$?
Geef die punten in het plaatje aan.

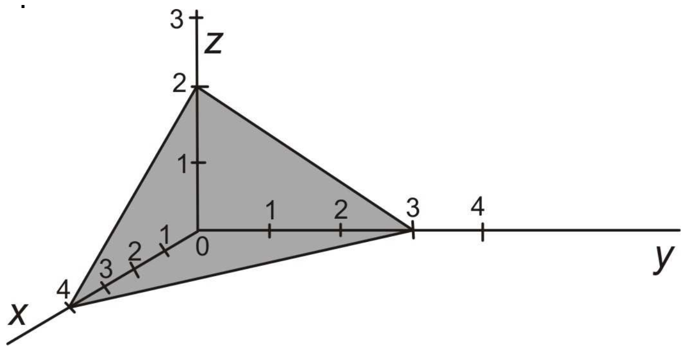
De punten die je in **b** hebt aangegeven liggen op de snijlijn van het vlak met vergelijking $x+y+z=16$ en het vlak met vergelijking $2x+3y+z=32$.

28 van de 43 punten zijn niet gekleurd.
c. Hoe groot is de som van de coördinaten $x+y+z$ van deze punten?

* **10** We bekijken het vlak V met vergelijking $3x+4y+6z=12$.
V snijdt de assen in: (4,0,0), (0,3,0) en (0,0,2).
a. Controleer dat.



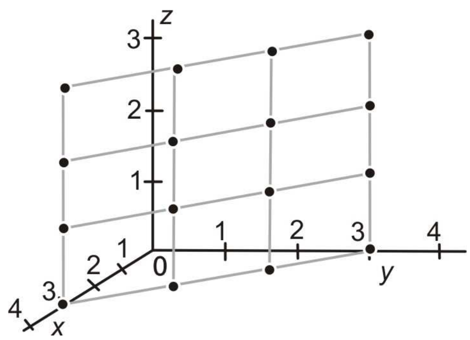
Om een vlak in een assenstelsel te tekenen is het vaak handig om de snijpunten met de coördinaatassen te bepalen en deze te verbinden, zoals hieronder gedaan is.
.



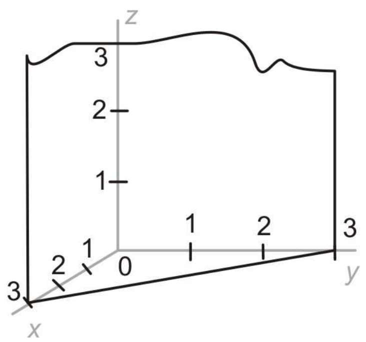
W is het vlak met vergelijking $4x + 3y + 4z = 12$.
b. Bereken de coördinaten van de snijpunten van W met de coördinaatassen.
c. Teken op de manier van hierboven het vlak W in een assenstelsel op het werkblad.

In W ligt een punt waarvan de drie coördinaten gelijk zijn.
d. Bereken de coördinaten van dat punt.

* **11**



Hierboven zijn 12 roosterpunten getekend.
a. Schrijf bij elk roosterpunt zijn coördinaten en ga na dat elk roosterpunt aan de vergelijking $x + y = 3$ voldoet.



Als een punt $(x,y,0)$ aan de vergelijking $x + y = 3$ voldoet dan voldoet ook elk punt dat \`daarboven´ ligt, dus (x,y,1), (x,y,2), (x,y,$1\frac{1}{4}$) ook, want de z-coördinaat komt in de vergelijking niet voor.
Dus de punten die aan de vergelijking $x + y = 3$ voldoen, liggen in een vlak evenwijdig met de z-as.
Meestal tekenen we dat zoals hiernaast is gedaan.

Het vlak met vergelijking $2x + 3z = 6$ noemen we U.
b. Teken vlak U op het werkblad.
c. Welke coördinaatas is evenwijdig met U?

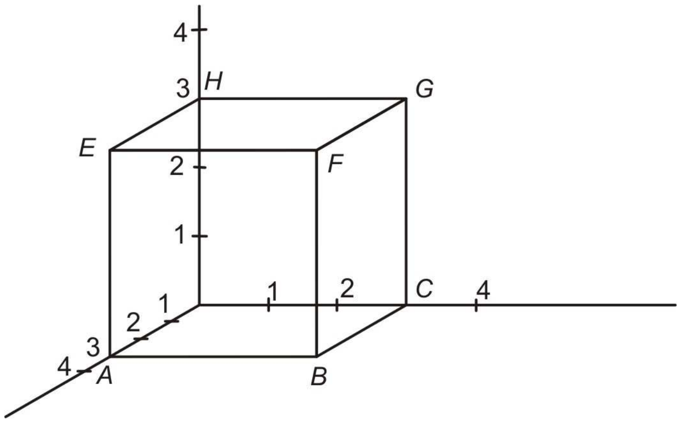
*** 12** Bepaal de snijpunten van de volgende vlakken met de coördinaatassen en maak van elk vlak een plaatje.

$2x + 3y + 12z = 6$	$2x + 3y = 6$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$	$x + 3z = 3$
$x - y = 0$	$2x = 6$

In het volgende zijn a, b en $c \neq 0$.

- Het vlak dat de coördinaatassen snijdt in (a,0,0), (0,b,0) en (0,0,c), heeft vergelijking $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
- Het vlak evenwijdig met de z-as, dat de x-as snijdt in (a,0,0) en de y-as in (0,b,0), heeft vergelijking $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
- Het vlak evenwijdig met het *Oxy*-vlak dat de *z*-as in (0,0,c), snijdt heeft vergelijking: $\frac{z}{c}=1$.

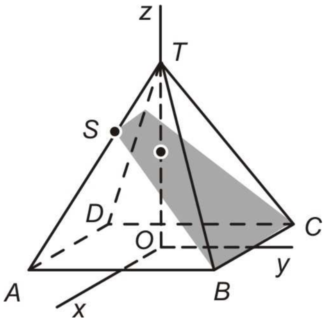
* **13** Kubus *ABCO*.*EFGH* heeft ribbe 3. *A*, *C* en *H* liggen op de coördinaatassen.
V is het vlak met vergelijking $2x+y+z=4$.
a. Bereken de coördinaten van de snijpunten van *V* met de coördinaatassen en teken *V* op het werkblad.



V snijdt ribbe *HG.*
b. Bereken de coördinaten van het snijpunt.
Tip. Het snijpunt heeft coördinaten (0,t,3) voor zekere waarde van t.

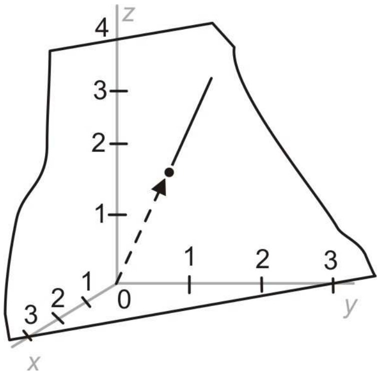
V snijdt de ribben van de kubus nog in andere punten.
c. Bereken de coördinaten van deze punten.

V \`zaagt´ de kubus als het ware in twee stukken.
d. Kleur het zaagvlak.



Voorbeeld
Hoe bereken je de coördinaten van het snijpunt van een lijn met een vlak?
T.ABCD is een regelmatige vierzijdige piramide met: $A(3,-3,0)$, $B(3,3,0)$, $C(-3,3,0)$, $D(-3,-3,0)$ en $T(0,0,6)$.
V is het vlak met vergelijking $y+z=3$.
V snijdt ribbe *AT* van de piramide. Het snijpunt noemen we S.
De coördinaten van *S* kun je als volgt berekenen.
Een pv van lijn *AT* is: $(x,y,z)=(3,-3,0)+t\cdot(-1,1,2)$.
Dus elk punt van lijn AT is van de vorm:
$(x,y,z) = (3-t,-3+t,2t)$.
Het punt $S(3-t,-3+t,2t)$ ligt in *V* als het aan de vergelijking $y+z=3$ voldoet, dus als $(-3+t)+2t=3 \Leftrightarrow t=2$.
Dus $S=(1,-1,4)$.

14 Kogel door de tent



Een dakdeel van een tent ligt in het vlak dat de coördinaatassen snijdt in (3,0,0), (0,3,0) en (0,0,4).
a. Geef een vergelijking van dat vlak.

Vanuit de oorsprong *O*(0,0,0) wordt een kogel afgevuurd in de richting(1,2,2).
b. Bereken de coördinaten van het punt waar de kogel de tent verlaat.

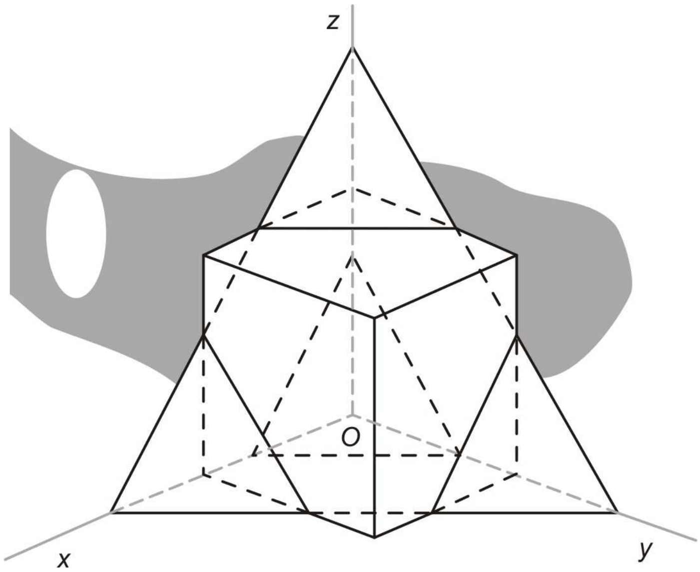
15 Vlak *U* heeft vergelijking $2x+3y+4z=6$, vlak *V* heeft vergelijking $4x+6y+8z=20$.
a. Herschrijf de vergelijking van V tot $2x+3y+4z=$ __.
Welk getal moet er op de streep ingevuld worden?
b. Hoe zie je aan de vergelijkingen van *U* en *V* dat ze geen gemeenschappelijke punten hebben?

Dus zijn *U* en V evenwijdig.

W is het vlak met vergelijking $x+ay+bz=20$ voor zekere getallen *a* en *b*.

Als de vlakken $ax + by + cz = d$ en $px + qy + rz = s$ evenwijdig zijn, zijn de vectoren (a, b, c) en (p, q, r) in lijn.

16 Hieronder zijn twee vlakken getekend.

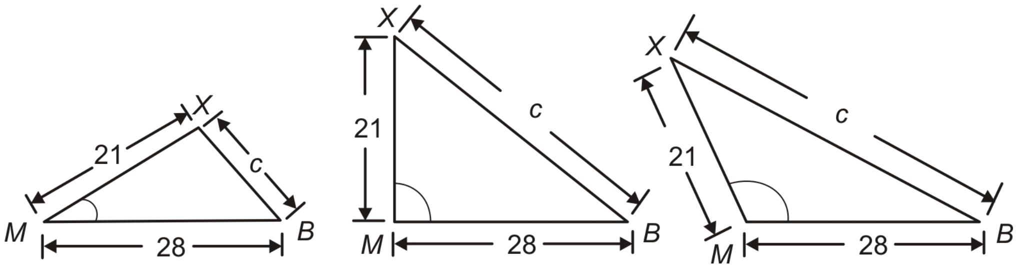


Beide vlakken snijden de kubus in middens van ribben.
De getekende kubus heeft ribben van lengte 6.

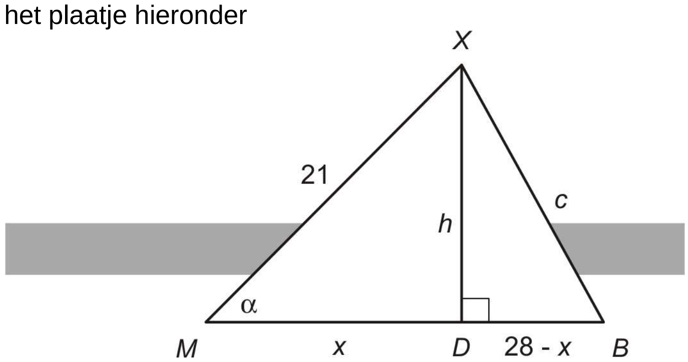
Geef van elk van de twee vlakken een vergelijking.

5 De cosinusregel

1 In opgave **10** van paragraaf 2 hadden we het volgende plaatje.



In het plaatje in het midden kun je de stelling van Pythagoras toepassen om c te vinden. De hoek tussen de stokjes noemen we α. In het volgende zullen we een formule ontwikkelen om c te bepalen als $\alpha \neq 90°$. Bekijk het plaatje hieronder



Uit de stelling van Pythagoras volgt:
$h^2 = 21^2 - x^2$ en ook $h^2 = c^2 - (28 - x)^2$.

a. Laat dat zien.

Dus: $21^2 - x^2 = c^2 - (28 - x)^2$

b. Herleid deze formule tot $c^2 = 1225 - 56x$.

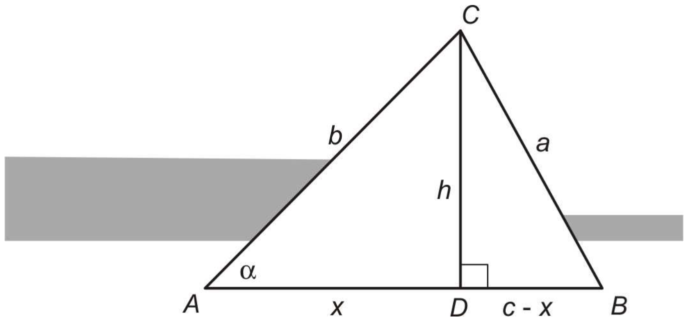
c. Laat zien dat $x = 21 \cdot \cos \alpha$.

Als je voor $x = 21 \cdot \cos \alpha$ in de formule uit **c** invult, krijg je:
$c^2 = 1225 - 1176 \cdot \cos \alpha$.

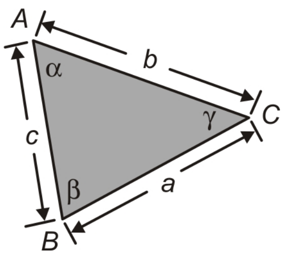
d. Laat dat zien.

e. Bepaal met de formule: $c^2 = 1225 - 1176 \cdot \cos \alpha$
de lengte van het elastiekje als $\alpha = 90°$.

f. Bepaal in twee decimalen de lengte van het elastiekje als $\alpha = 60°$ en als $\alpha = 47°$.



Wat we in oppgave **1** gedaan hebben, kun je algemeen doen.
Als je de stelling van Pythagoras in driehoeken *ACD* en *BCD* toepast, krijg je:
$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$.
Haakjes wegwerken geeft:
$a^2 = b^2 - 2xc + c^2$.
Verder geldt: $x = b \cdot \cos\alpha$.
Als je dat voor x invult in $a^2 = b^2 - 2xc + c^2$, krijg je:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.



Afspraak (herhaling uit **24-Goniometrie**)

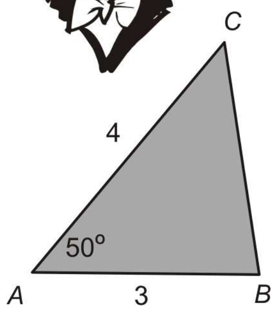
In driehoek *ABC* noemen we:

de grootte	van hoek *A*	α
	van hoek *B*	β
	van hoek *C*	γ
de lengte	van zijde *AB*	*c*
	van zijde *BC*	*a*
	van zijde *AC*	*b* .

Merk op dat de zijde met lengte *a* tegenover hoek *A* ligt, de zijde met lengte *b* tegenover hoek *B* en de zijde met lengte *c* tegenover hoek *C*.

Cosinusregel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$



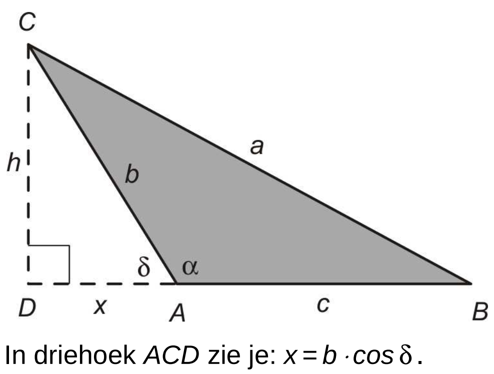
Voorbeeld
Van driehoek ABC is gegeven: $AB = 3$, $AC = 4$ en $\angle BAC = 50°$, zie plaatje.
De vraag is om de derde zijde (BC) en de andere hoeken van de driehoek te berekenen.
Oplossing
Volgens de cosinusregel geldt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
Dus: $a^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 50° = 9{,}57\ldots$, dus $a \approx 3{,}1$.
$\cos\gamma$ kunnen we nu uitrekenen met de formule:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$, want a, b en c zijn bekend.
Invullen geeft:
$9 = 9{,}57\ldots + 16 - 2 \cdot 3{,}1.. \cdot 4 \cdot \cos\gamma =$
$25{,}57\ldots - 24{,}74.. \cdot \cos\beta$, dus $\cos\gamma = 0{,}66..$, dus $\gamma = 48°$.
Dan $\beta = 180 - 48 - 50 = 82°$.

2 Van driehoek ABC is gegeven: $b = 10$, $c = 12$ en $\alpha = 60°$.
Bereken a in één decimaal nauwkeurig en β en γ in graden nauwkeurig.

3 Van een driehoek zijn de zijden 4, 5 en 6.
a. Teken de driehoek zo precies mogelijk, neem de cm als eenheid.
b. Bereken elk van de hoeken van de driehoek in graden nauwkeurig.

4 Het vlak met vergelijking $2x + 3y + 4z = 12$ snijdt de x-as in A, de y-as in B en de z-as in C.
a. Bereken de lengte van de zijden van driehoek ABC.
b. Bereken $\angle ABC$ in graden nauwkeurig.

We hebben de cosinusregel tot nu toe alleen bewezen en gebruikt in scherphoekige driehoeken.
We bekijken nu een stomphoekige driehoek.



In driehoek ACD zie je: $x = b \cdot \cos\delta$.
Twee keer de stelling van Pythagoras toepassen geeft:
$b^2 - x^2 = a^2 - (c + x)^2$.

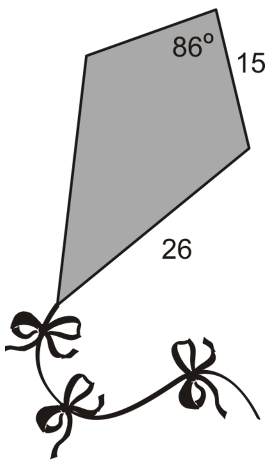
Als je de haakjes wegwerkt, krijg je: $a^2 = b^2 + 2x\,c + c^2$.
Nu vul je voor $x = b \cdot \cos\delta$ in.
Dan krijg je: $a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,c \cdot \cos\delta$.
Nu geldt: $\alpha = 180° - \delta$

Afspraak	$\cos\alpha = -\cos\delta$ voor een stompe hoek α. Hierbij is $\alpha + \delta = 180°$

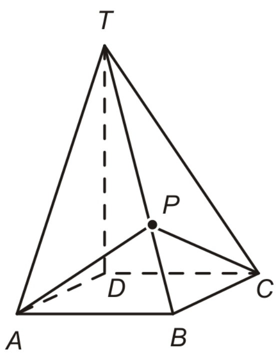
Je krijgt dan $a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,c \cdot \cos\delta$, dus
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c \cdot \cos\alpha$

Met je rekenapparaat kun je controleren dat die ook volgens bovenstaande afspraak werkt.
Dank zij bovenstaande afspraak, krijgen we precies dezelfde formule als in het geval α scherp is.

Voor alle hoeken α geldt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c \cdot \cos\alpha$

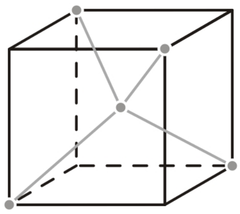


5 Een vlieger heeft twee zijden van 15 en twee van 26. De hoek tussen de zijden van 15 is 86°.
a. Bereken de lengte van de korte diagonaal in één decimaal nauwkeurig. Doe dat op twee manieren: mét en zonder cosinusregel.
b. Bereken de andere hoeken van de vlieger in graden nauwkeurig.
c. Bereken de lengte van de lange diagonaal.



6 De piramide hiernaast heeft een vierkant grondvlak met zijde 1. *T* ligt recht boven *D*; $TD = \sqrt{2}$.
a. Bereken de lengte van de andere ribben van de piramide.

Een mier loopt van *A* via een punt van ribbe *TB* naar *C*.
P is het punt op ribbe *TB* zó, dat weg *A*-*P*-*C* zo kort mogelijk is.
b. Ga met een berekening na dat $TP = 1\frac{1}{2}$.
Tip. Druk de vlakken *TAB* en *TBC* plat.
c. Bereken hoek *APC* in graden nauwkeurig.

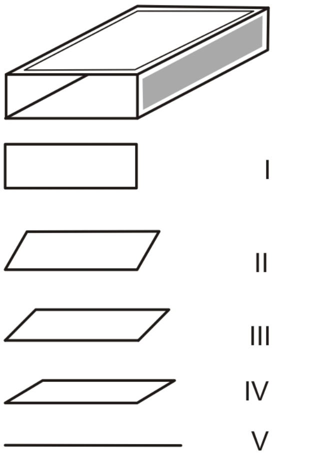


7 De valentiehoek in het CH_4-molecuul

Het molecuulmodel van methaan CH_4 ziet er als volgt uit. In vier hoekpunten van een kubus zit een H-atoom en in het centrum van de kubus een C-atoom.
De H-C-H-hoek heet in de scheikunde de valentiehoek. We gaan die hoek berekenen. Neem de ribbe van de kubus 2.

a. Bereken de zijden van een H-C-H-driehoek.
b. Bereken de valentiehoek in graden nauwkeurig.

6 De sinusregel

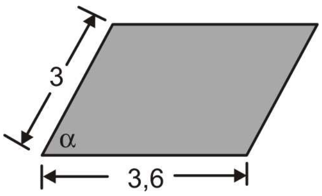


1 De voorkant van een luciferdoosje is 1 bij 3 cm. We duwen het omhulsel scheef. In stand I is de opening nog rechthoekig. In stand II is de opening een parallellogram met een hoek van 60°. In stand III is die hoek 45° en in stand IV 30°. In stand V is het omhulsel helemaal platgedrukt.
We willen de oppervlakte van de opening berekenen en kiezen de zijde van 3 cm als basis.

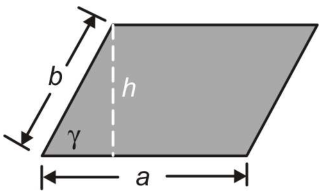
Bereken de hoogte en de oppervlakte in elk van de vijf standen. Benader de hoogte in mm en de oppervlakte in mm^2 nauwkeurig.

Opmerking
Bij de hoek van 54° is de hoogte afgerond 8 mm en de oppervlakte 243 mm^2. Als je met de afgeronde hoogte verder rekent, vind je als oppervlakte 240 mm^2. Je moet dus niet tussentijds afronden.

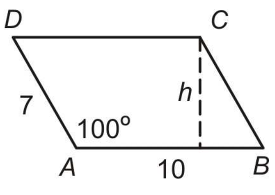
De oppervlakte van een parallellogram waarvan de zijden bekend zijn, hangt af van de hoeken. We onderzoeken de samenhang.



2 De zijden van het parallellogram hiernaast zijn 3 en 3,6. De oppervlakte is 6.
a. Bereken de hoogte van het parallellogram
b. Bereken α in graden nauwkeurig.



3 Van een parallellogram zijn de zijden a en b lang. γ is de grootte van één van de hoeken. Er is een hoogtelijn in het parallellogram getekend. De lengte daarvan is h.
a. $h = b \cdot sin\ \gamma$. Ga dat na.
b. Laat zien dat de oppervlakte van het parallellogram gelijk is aan $a\,b \cdot sin\,\gamma$.



4 De zijden van parallellogram $ABCD$ zijn 10 en 7 en $\angle BAD = 100°$, zie plaatje. de hoogte van het parallellogram noemen we h.
a. Bereken h in twee decimalen.
b. Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$ in één decimaal.

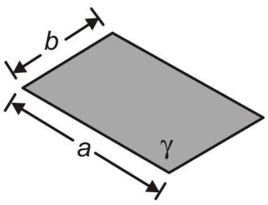
Waarschijnlijk heb je h berekend met $h = 7 \cdot \sin 80°$.

c. Ga met je rekenapparaat na dat $7 \cdot \sin 100°$ hetzelfde resultaat oplevert.

Tot nu toe hebben we $\sin\alpha$ alleen gebruikt als $0 < \alpha < 90°$. De GR geeft ook waarden voor $\sin\alpha$ in andere gevallen. En wel zo dat het volgende geldt.

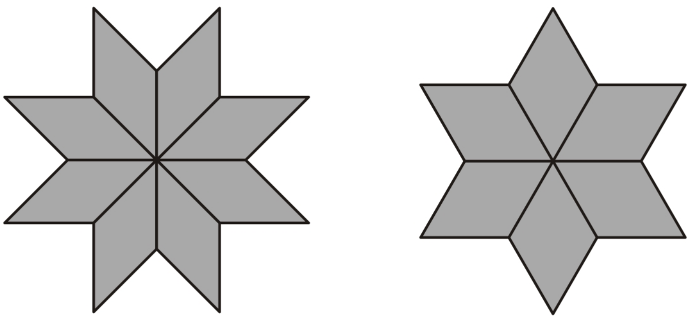
Afspraak $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

In opgave **4** geldt: oppervlakte parallellogram *ABCD* is:
$10 \cdot 7 \cdot \sin 80°$ en dus ook (vanwege bovenstaande):
$10 \cdot 7 \cdot \sin 100°$.

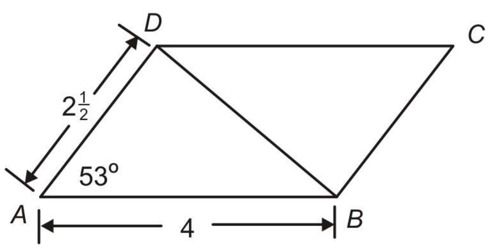


Zowel voor scherpe als stompe hoeken α geldt: de oppervlakte van een parallellogram met zijden a en b en een hoek γ is $a\,b \cdot \sin\gamma$.

5 De getekende sterren hieronder zijn opgebouwd uit gelijke ruiten met zijde 1.
Bereken van elke ster de oppervlakte in twee decimalen.



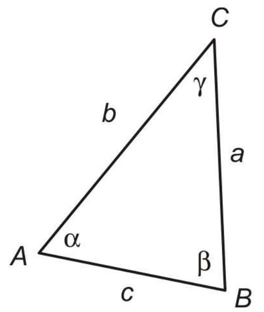
6 De figuur *ABCD* hieronder is een parallellogram.



Bereken de oppervlakte van driehoek *ABD* in twee decimalen nauwkeurig.

De oppervlakte van een driehoek is de helft van het product van twee zijden en de *sinus* van de hoek tussen de twee zijden.

7 **a.** Bereken de oppervlakte van driehoek *ABC* in twee decimalen als $a = 5$, $b = 6$ en $\gamma = 40°$.
b. Bereken de oppervlakte van driehoek *ABC* in twee decimalen als $b = 5$, $c = 7$ en $\alpha = 50°$.



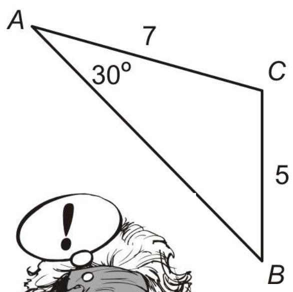
Je kunt de oppervlakte van driehoek *ABC* op drie manieren in twee zijden en een hoek uitdrukken

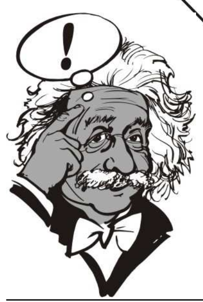
- Oppervlakte driehoek *ABC* = $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$
- Oppervlakte driehoek *ABC* = $\frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin\beta$
- Oppervlakte driehoek *ABC* = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$

Dus: $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$.
Als we vermenigvuldigen met 2 en daarna door $a \cdot b \cdot c$ delen krijgen we het volgende.

Sinusregel $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

Als van een driehoek een zijde en de hoek tegenover die zijde gegeven zijn en bovendien nog een zijde of een hoek, dan kun je met de sinusregel de overige zijden en hoeken van de driehoek berekenen.



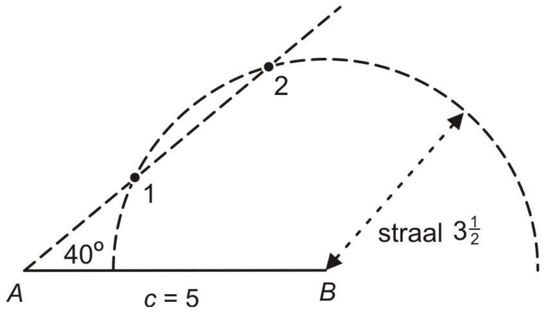


Voorbeeld
In driehoek *ABC* is gegeven: $\alpha = 30°$, $a = 5$ en $b = 7$.
Gevraagd wordt *c*, γ en β uit te rekenen.
Oplossing
Invullen in $\dfrac{\sin\ \alpha}{a} = \dfrac{\sin\ \beta}{b}$ geeft:
$\dfrac{0{,}5}{5} = \dfrac{\sin\beta}{7}$, dus $\sin\beta = 0{,}7$.
Omdat volgens het plaatje β scherp is, geldt dus $\beta \approx 44{,}4°$.
Dus: $\gamma \approx 180 - 30 - 44{,}4 = 105{,}6°$

Invullen in $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$ geeft:

$\frac{0,5}{5} \approx \frac{\sin 105,6^\circ}{c}$, dus $c \approx 10 \cdot \sin 105,6^\circ \approx 9,63$

8 Van driehoek *ABC* is gegeven dat $\alpha = 40^\circ$.
Verder is $a = 3\frac{1}{2}$ en $c = 5$.
Iemand gaat driehoek *ABC* tekenen. Daarvoor heeft hij eerst zijde *AB* van lengte 5 getekend, vervolgens bij *A* een hoek van 40° en tenslotte de cirkel met middelpunt *B* en straal $3\frac{1}{2}$. Nu zijn er twee mogelijke plaatsen voor het punt *C*: 1 en 2.



In het ene geval is hoek *C* stomp, in het andere geval scherp.
a. Laat zien dat dat uit de sinusregel volgt dat $\sin\gamma \approx 0,9182$.

Als je het rekenapparaat gebruikt, vind je $\gamma \approx 66,7^\circ$. Dat is het geval dat *C* op plaats 2 ligt.
b. Vanwege de regel $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ is er nog een stompe hoek γ met $\sin\gamma \approx 0,9182$. In dat geval ligt *C* op plaats 1.
Welke stompe hoek?

9 Bereken de andere zijden en hoeken van driehoek *ABC* in de volgende gevallen.
- $a = 8$, $b = 6$ en $\beta = 40^\circ$ als α scherp is
- $a = 8$, $b = 6$ en $\beta = 40^\circ$ als α stomp is
- $a = 8$, $\alpha = 60^\circ$ en $\beta = 40^\circ$

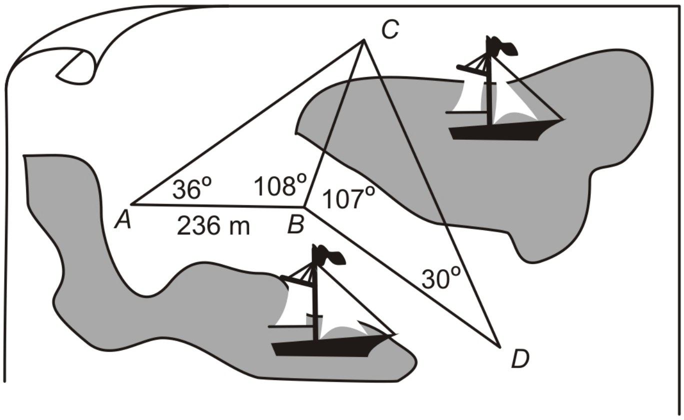
10 Van driehoek *ABC* is gegeven: $a = 4$, $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 51^\circ$.
a. Teken de driehoek zo precies mogelijk; neem de cm als eenheid.
b. Bereken *b* en *c* in mm nauwkeurig.

Landmeten

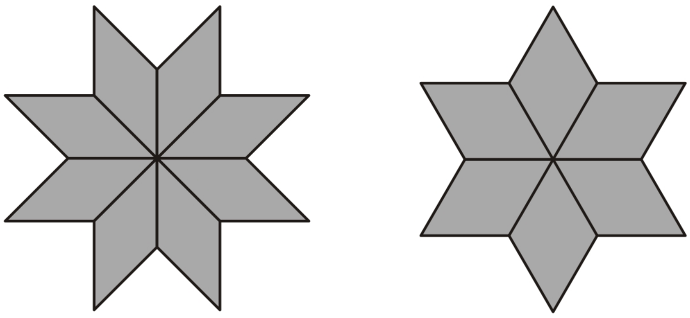
Een landmeter kan met zijn theodoliet eenvoudig en nauwkeurig hoeken meten (op 0,0001° nauwkeurig!).

Het opmeten van afstanden is veel moeilijker. (Hij moet omlopen omdat er een heg of een sloot is.) Hij beperkt zich tot het nauwkeurig meten van één afstand. Om de overige afstanden te bepalen, meet hij hoeken in een driehoeksnet, bijvoorbeeld vanuit kerktorens. De afstanden berekent hij dan met trigonometrie (= driehoeksmeting). Het Griekse woord gonos betekent hoek.

11 Een landmeter weet dat de afstand tussen *A* en *B* 236 m is. Hij wil de afstand van *C* tot *D* weten.
In *A*, *B* en *D* meet hij hoeken. De resultaten zie je in de tekening hierboven.
Bereken met deze gegevens de afstand *CD* door twee keer de sinusregel toe te passen.

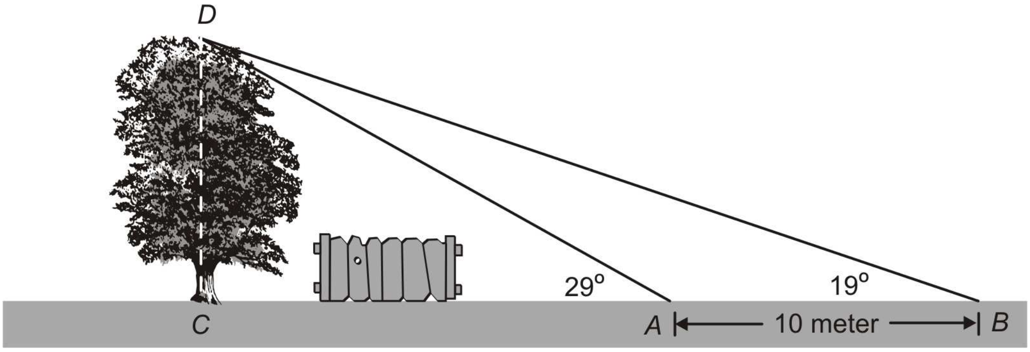


12



De 'buitenste' punten van de sterren uit opgave **4** liggen op een cirkel (de omgeschreven cirkel). De sterren bestonden uit ruiten met zijde 1.
Bereken voor elk van de sterren de straal van de omgeschreven cirkel in twee decimalen nauwkeurig.

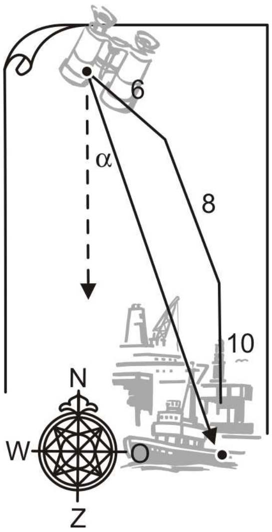
13 Ad wil de hoogte van een boom weten (de afstand *CD* in de tekening hieronder). Hij kan niet bij de boom komen. Hij meet vanuit een punt A de hoek *CAD*. Vervolgens loopt hij 10 meter verder van de boom weg en meet in *B* de hoek *CBD*.



De resultaten van de metingen staan in de tekening.

a. Bereken *AD*.

b. Bereken de hoogte van de boom.

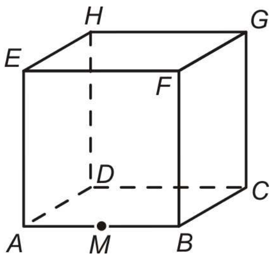


14 Kapitein Rob verlaat met zijn schip de haven van Adam en vaart 10 mijlen in noordelijke richting. Dan wordt de koers gewijzigd in richting Noord-Noord-West (dat is $22\frac{1}{2}°$ ten opzichte van het noorden). In deze richting vaart het schip 8 mijl. Daarna gaat het in richting Noord-West verder. Na 6 mijl varen zoekt kapitein Rob de haven van Adam door zijn verrekijker.

a. In welke richting moet hij kijken? (Met andere woorden bereken α de hoek tussen de richting waarin Adam ligt en de zuidelijke richting.)

b. Hoe ver is hij nu hemelsbreed van Adam verwijderd?

7 Drie vlakken



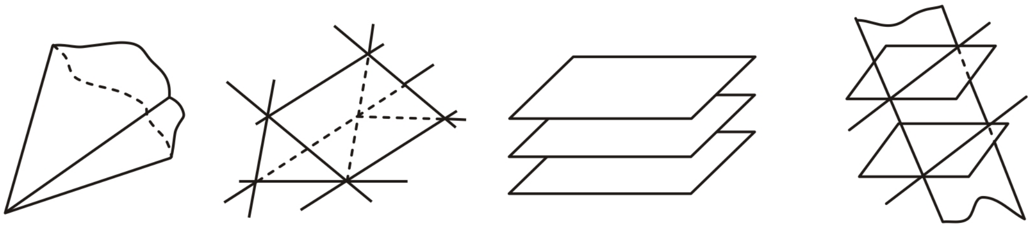
* **1** We bekijken in de kubus hiernaast telkens drie vlakken *U*, *V* en *W*. De snijlijn van *U* en *V* noemen we *k*, de snijlijn van *U* en *W* noemen we *m*. We willen weten hoe de snijlijnen ten opzichte van elkaar liggen.

Geval 1.
U is vlak *EMC*, *V* het vlak waarin de bovenkant van de kubus ligt en *W* het vlak waarin de onderkant van de kubus ligt. *V* en *W* zijn dus evenwijdig.
a. Teken de lijnen *k* en *m*. Wat kun je zeggen over de onderlinge ligging van *k* en *m*?

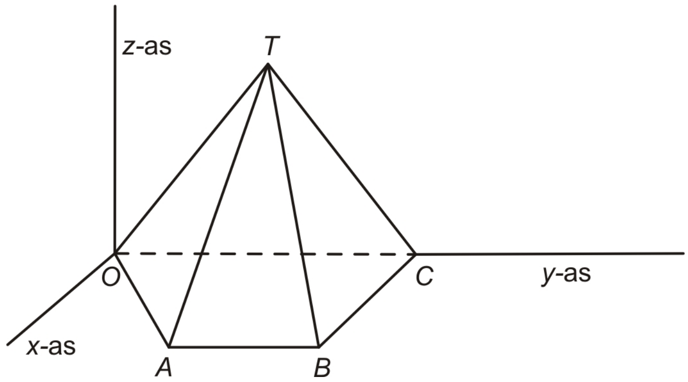
Geval 2
U is vlak *MCG*, *V* het vlak *HBF* en *W* het vlak *AEG*. Nu snijden de vlakken *V* en *W* elkaar wel. De snijlijn van *V* en *W* is *n*.
b. Teken de lijnen *k*, *m* en *n*.
Wat kun je zeggen over de onderlinge ligging van *k*, *m* en *n*?

Geval 3
U is weer vlak *GMC*, *V* het vlak waarin de rechter zijkant van de kubus ligt en *W* het vlak waarin de onderkant van de kubus ligt.
De vlakken *V* en *W* snijden elkaar weer. De snijlijn van *V* en *W* is *n*.
c. Teken de lijnen *k*, *m* en *n*.
Wat kun je zeggen over de onderlinge ligging van *k*, *m* en *n*?

De onderlinge ligging van drie vlakken
Er zijn vier mogelijkheden.
1. Twee vlakken zijn evenwijdig en het derde snijdt de andere twee. De twee snijlijnen zijn dan evenwijdig.
2. De vlakken snijden elkaar twee aan twee en de drie snijlijnen zijn evenwijdig.
3. De vlakken snijden elkaar twee aan twee en de drie snijlijnen gaan door één punt.
4. De drie vlakken zijn evenwijdig.

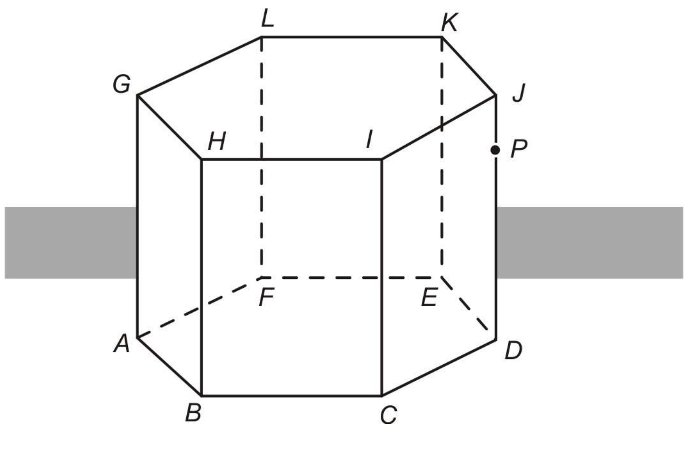


* **2** *ABCOT* is een vierzijdige piramide, met $A(5,4,0)$, $B(5,8,0)$, $C(0,8,0)$ en $T(0,4,5)$.



a. Beschrijf de ligging van de vlakken *OAT*, *BCT* en het *Oxy*-vlak. Teken de snijlijnen.
b. Beschrijf de ligging van de vlakken *ABT*, *OCT* en het *Oxy*-vlak.
c. Geef een pv van de snijlijn van de vlakken *OAT* en *BCT*.
d. Geef een pv van lijn *CT* en bereken hiermee het snijpunt van lijn *CT* met de *z*-as.
e. Geef een vergelijking van vlak *BCT*.
f. Geef een pv van de snijlijn van de vlakken *BAT* en *COT*.

* **3** *ABCDEF.GHIJKL* is een regelmatig zeszijdig prisma, (de grensvlakken onder en boven zijn regelmatige zeshoeken en de opstaande grensvlakken zijn rechthoeken.)

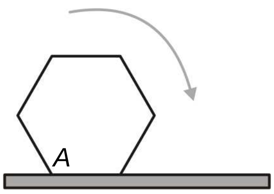


a. Teken de snijlijn van vlak *GKC* met het grondvlak van het prisma.
b. Geef een lijn in het grondvlak die evenwijdig is met de snijlijn in **a**.

Vlak *GKC* snijdt ribbe *BH* in twee stukken.
c. Bereken de verhouding van die twee stukken.

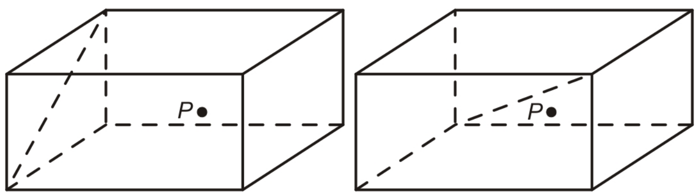
* **4** We gaan verder met het prisma van de vorige opgave.
Op ribbe *JD* ligt een punt *P*.
a. Teken de doorsnede van vlak *BPF* met het prisma.

Het snijpunt van vlak *BPF* met ribbe *CI* noemen we *Q.*
De ribben van de zeshoekige grensvlakken hebben lengte 6 en de opstaande ribben lengte 8. Verder is $DP = 6$.
b. Toon aan dat $CQ = 4$.
c. Bereken de oppervlakte van het deel van vlak *BPF* dat binnen het prisma ligt.



Het prisma wordt met grensvlak *ABHG* op het *Oxy*-vlak gelegd zó, dat de opstaande ribben evenwijdig met de *x*-as zijn.
d. Bereken de lengte van de weg die het punt *A* aflegt totdat het een hoogte van $6\sqrt{3}$ bereikt.

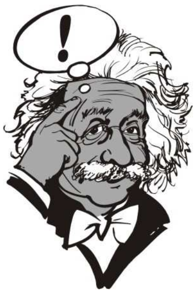
* **5** **In een balk boren**
Charlotte boort in een rechte balk. Ze begint aan de voorkant bij punt P en boort evenwijdig met de gestippelde zijvlaksdiagonaal.



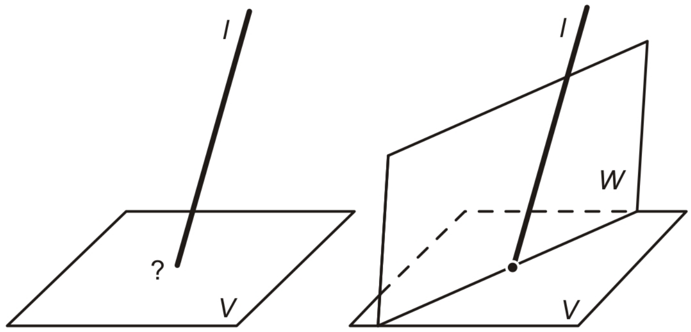
a. Waar komt de boor uit de balk? Teken dat punt zo precies mogelijk.

Lisanne begint ook in P maar boort evenwijdig met de gestippelde lichaamsdiagonaal.

b. Waar komt de boor uit de balk? Teken dat punt zo precies mogelijk.
Als dit niet lukt, lees dan het volgende en probeer het daarna nog eens.

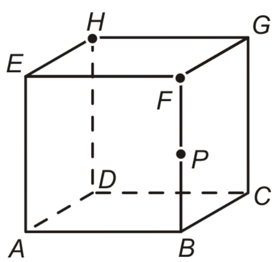


Om het snijpunt van een lijn *l* en een vlak *V* te tekenen, breng je een hulpvlak *W* aan waarin *l* ligt. Dat hulpvlak moet een `bekende´ snijlijn met *V* hebben.
l snijdt *V* in een punt van de snijlijn.



Waarschijnlijk ben je in opgave **5a** ook zo te werk gegaan: je hebt als hulpvlak het vlak door *P* evenwijdig met een zijkant van de balk genomen.
In opgave **5b** kun je als hulpvlak het vlak door *P* en de lichaamsdiagonaal nemen.

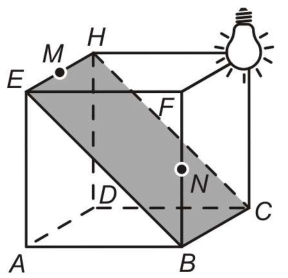
We plaatsen de balk in een assenstelsel. Het punt achter linksonder is *O*(0,0,0), het punt achter rechtsonder is (0,6,0), het punt voor linksonder is (6,0,0) en het punt achter linksboven is (0,0,3).
P is (6,5,2).
c. Bereken de coördinaten van het punt waar de boor uit de balk komt bij Charlotte en bij Lisanne.



*** 6** *ABCD.EFGH* is een kubus die op tafel staat. *P* is het midden van ribbe *BF*.
a. Teken het snijpunt van lijn *HP* met het vlak van de tafel.
b. Teken het snijpunt van lijn *FD* en vlak *BEG.*

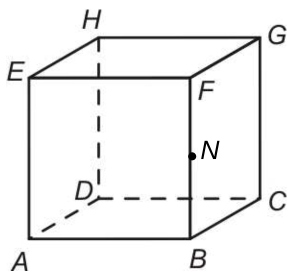
We brengen een assenstelsel aan. Daarin is *D* de oorsprong, *A*(6,0,0), *C*(0,6,0) en *H*(0,0,6).
c. Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn *HP* met het *Oxy*-vlak.

d. Bepaal de snijpunten van vlak *BEG* met de coördinaat-assen en geef een vergelijking van vlak *BEG*.
e. Bereken de coördinaten van het snijpunt dat je in **b** hebt getekend.



* **7** In de kubus *ABCD EFGH* hiernaast is een kartonnen diagonaalvlak (*BCHE*) geplaatst. *M* en *N* zijn middens van ribben. In *G* zit een lampje.
a. Teken de schaduw van lijnstuk *MN* op het karton.

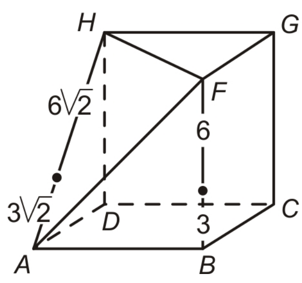
Het eindpunt van de schaduw op lijnstuk EB noemen we S.
b. Bereken de verhouding *ES* : *SB*.
c. Bereken de lengte van *MS*. Neem aan dat de ribben van de kubus lengte 6 hebben.



* **8** *ABCD.EFGH* is een kubus *N* is het midden van ribbe *BF*. In *G* zit een lampje. Dat werpt schaduwen van lijnstuk *HN* op de grensvlakken van de kubus.
a. Teken die schaduwen.

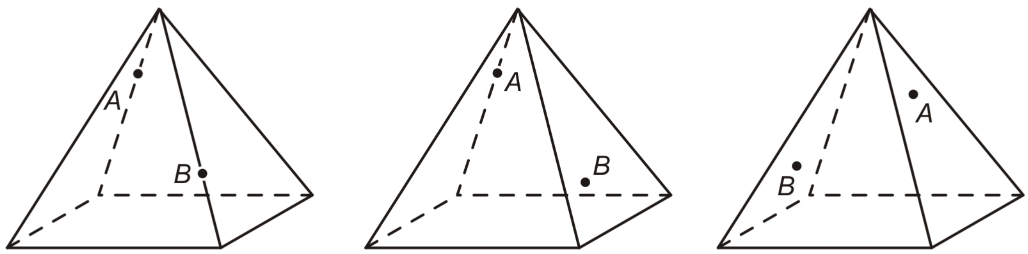
Het lijkt wel of een deel van de schaduw evenwijdig is met ribbe *AB*.
b. Leg uit dat dit inderdaad het geval is.

De kubus staat op tafel. Het lampje geeft ook een schaduw van lijnstuk *HN* op tafel.
c. Teken die schaduw.
d. Leg uit dat die schaduw evenwijdig met ribbe *AB* is.

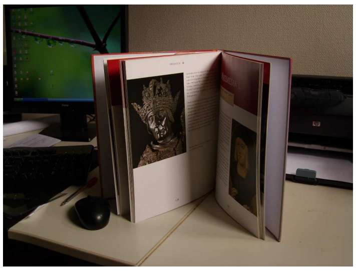


* **9** *ABCD.FGH* is een deel van kubus *ABCD.EFGH* met *A*(9,0,0), *C*(0,9,0) en *H*(0,0,9). *P* ligt op ribbe *AH* en *Q* op ribbe *BF*, beide op hoogte 3 boven het *Oxy*-vlak.
a. Teken de doorsnede van vlak *PQG* met het lichaam *ABCD.FGH*.
Tip. Projecteer *PG* loodrecht op het vlak waarop de kubus staat.
b. Geef de coördinaten van het snijpunt van vlak *PQG* met ribbe *HD*.

* **10** Teken in elk van de situaties het snijpunt van lijn *AB* met het vlak waarop de piramide staat. In de eerste figuur liggen *A* en *B* op ribben; in de tweede figuur ligt A op een ribbe en *B* in het rechter zijvlak; in de derde figuur ligt *A* op het achtervlak en *B* op het linker zijvlak.

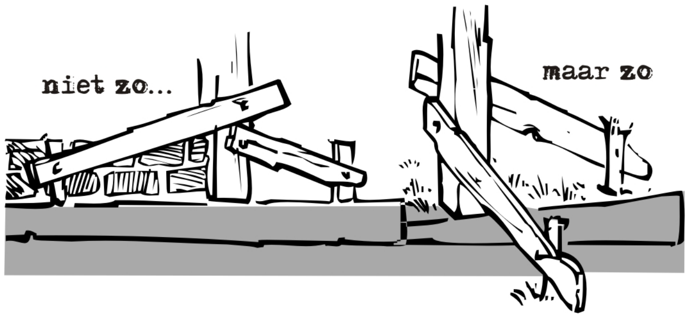


8 Meer vergelijkingen van vlakken



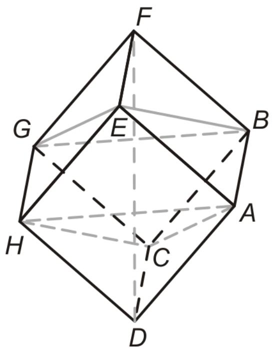
Loodrechte stand in de ruimte
Een boek met harde kaft wordt open gemaakt en op tafel gezet, zie plaatje. De rug van het boek staat loodrecht op het tafelblad: *de rug staat in het lood*.

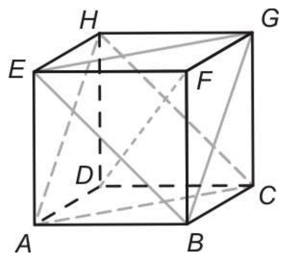
Als een metselaar een muur gaat metselen, zet hij wat palen recht omhoog: hij stelt profielen.
Zo'n profiel staat pas recht als het vanuit *twee* verschillende richtingen gezien, recht staat. Dan staat het vanuit *elke* richting gezien recht.



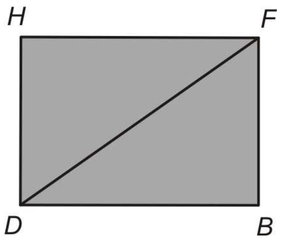
Een lijn staat loodrecht op een vlak (maakt met elke lijn uit dat vlak een hoek van 90°) als hij loodrecht op twee niet evenwijdige lijnen van dat vlak staat. Zo'n lijn heet **normaal** van het vlak.

* **1** Kubus *ABCD.EFGH* wordt met hoekpunt *D* op tafel gezet zó, dat lichaamsdiagonaal *DF* loodrecht op tafel staat. De punten *A*, *C* en *H* liggen op gelijke hoogte boven de tafel evenals de punten *B*, *E* en *G*.
Daarom staat lijn *DF* loodrecht op de vlakken *BEG* en *ACH*. Dus lijn *DF* is een normaal van de vlakken *BEG* en *ACH*.





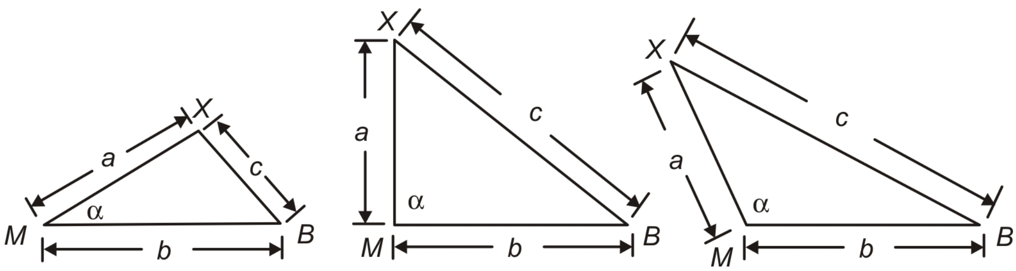
a. Teken op het werkblad heel precies de snijpunten van lijn *OF* met de vlakken *BEG* en *ACH*.
b. Teken de snijpunten uit **a** ook in een vlakke tekening (zoals hiernaast) van het diagonaalvlak:



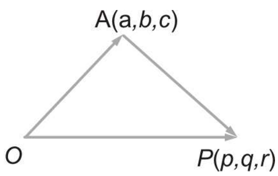
De ribben van de kubus zijn 6.
c. Bereken de afstand van *D* tot vlak *ACH*.

We brengen een assenstelsel, met *D* als oorsprong, *A* op de positieve *x*-as, *C* op de postieve *y*-as en *H* op de positieve *z*-as.
d. Bereken de coördinaten van de snijpunten uit **a** en controleer hiermee je antwoord op **c**.

In paragraaf 2 van *Vectoren en Meetkunde* hebben we gezien hoe je aan de kentallen van twee vectoren in twee dimensies kunt zien of ze loodrecht op elkaar staan.
(a,b) staat loodrecht op (p,q) alleen als $ap+bq=0$. Dit volgt uit de stelling van Pythagoras en zijn omgekeerde. We 'vertalen' wat we daar gedaan hebben naar drie dimensies.
In de onderbouw heb je in het hoofdstuk **De stelling van Pythagoras** gezien dat: $\alpha = 90° \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$



We passen dit toe op driehoek *OPA*.

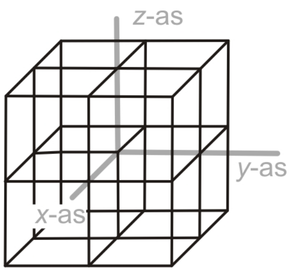


$OA=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $OP=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ en

$AP=\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2+(c-r)^2}$

Driehoek *OPA* is rechthoekig in *O* $\Leftrightarrow OA^2+OP^2=AP^2$
$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+p^2+q^2+r^2=(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2$
$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+p^2+q^2+r^2=$
$p^2-2pa+a^2+q^2-2qb+b^2+r^2-2rc+c^2$
$\Leftrightarrow -2pa+-2qb+-2rc=0$
$\Leftrightarrow pa+qb+rc=0.$

Rekenregel voor loodrechte stand
De vectoren (a,b,c) en (p,q,r) staan loodrecht op elkaar alleen als $ap+bq+cr=0$.



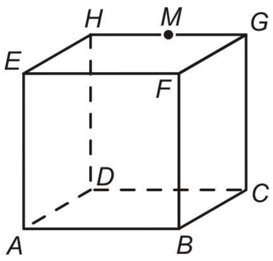
* **2** Hiernaast staat een bouwwerk van acht kubussen met ribben van lengte 2. De oorsprong zit in het hart van het bouwwerk en de *x*-as, *y*-as en *z*-as zijn in de gebruikelijke richtingen gekozen.
We bekijken de vlakken *U*: $2y+z=0$, *V*: $x+y+z=0$ en W: $2x+y+z=0$ en. Die gaan alle door de oorsprong *O*(0,0,0).
a. Waarom?
b. Teken de doorsnede van *U*, *V* en *W* met het bouwwerk, (neem voor elk vlak een nieuwe figuur).
c. Kun je bij elk vlak een normaalvector tekenen?

In de ruimte is het soms moeilijk te zien, wanneer twee richtingen loodrecht op elkaar staan. Om dat te controleren, kunnen we de regel op de vorige bladzijde gebruiken.
Een normaalvector van *U* is $\vec{n}=(0,2,1)$.
In *U* liggen de punten *A*(0,1,-2), *B*(1,1,-2) en *C*(2,0,0).
d. Controleer met de rekenregel dat $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OC}$ loodrecht op $\vec{n}$ staan.
e. Kies drie punten *P*, *Q* en *R* in *V.* Controleer met de rekenregel dat $\vec{m}=(1,1,1)$ loodrecht op $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{OR}$ staan.
f. Controleer op de manier van vraag **d** en **e** dat $\vec{p}=(2,1,1)$ een normaalvector van *W* is.

Uit het bovenstaande kun je concluderen dat $\vec{n}=(a,b,c)$ normaalvector is van vlak *V* met vergelijking $ax+by+cz=0$. Want bij het controleren dat een punt *X* in *V* ligt, moet je precies dezelfde berekening uitvoeren als bij het controleren dat $\vec{n}$ loodrecht op $\overrightarrow{OX}$ staat.
Omdat de vlakken $ax+by+cz=d$ evenwijdig zijn met het vlak $ax+by+cz=0$, kunnen we het volgende concluderen.

De vector(a,b,c) is normaalvector van het vlak met vergelijking $ax+by+cz=d$.

In opgave **1** hebben we gezien dat (1,1,1) normaalvector van vlak *ACH* is. Dit vlak heeft vergelijking $x+y+z=6$.



3 We bekijken V, het vlak door B, E en M, het midden van ribbe GH van de kubus ABCD.EFGH. We plaatsen de kubus in een assenstelsel, zó dat $D=(0,0,0)$, $A=(6,0,0)$ $C=(0,6,0)$ en $H=(0,0,6)$.

a. Bepaal de coördinaten van de snijpunten van V met de coördinaat-assen.

b. Geef een vergelijking van V en ook een normaalvector van V.

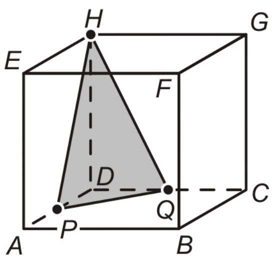
c. Geef een pv van de lijn door D loodrecht op V en bereken de coördinaten van het snijpunt van deze lijn met V.

d. Bepaal de afstand van D tot V.

4 We gaan door met de kubus van opgave **3**.
Vlak *AFM* snijdt niet alle coördinaat-assen in het positieve stuk. Daarom is het bepalen van de snijpunten met die assen wat minder eenvoudig.

a. Bepaal de coördinaten van de snijpunten van vlak *AFM* met de coördinaat-assen.

b. Geef een normaalvector van vlak *AFM*.



5 Dezelfde kubus in hetzelfde assenstelsel als in de vorige opgave. P en Q zijn middens van ribben.

a. Bereken de inhoud van piramide *PQDH*.

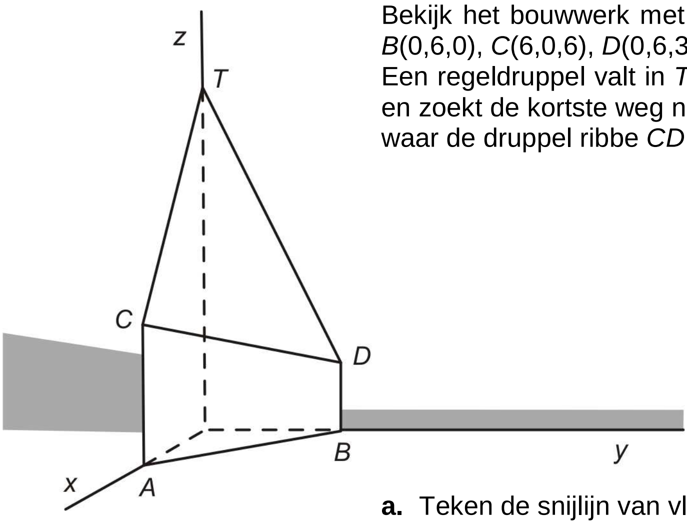
b. Geef een vergelijking van vlak *PQH*.

c. Bereken de afstand van D tot vlak *PQH*.

d. Bereken de oppervlakte van driehoek *PQH*.

e. Wat is het verband tussen de antwoorden op **a**, **c** en **d**?

* **6** Tegenwoordig zie je steeds meer onconventionele bouwwerken, vaak uitgevoerd in glas.
Bekijk het bouwwerk met hoekpunten $O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(6,0,6)$, $D(0,6,3)$ en $T(0,0,15)$.
Een regeldruppel valt in T op het op het glazen dak TCD en zoekt de kortste weg naar beneden. We vragen ons af waar de druppel ribbe CD passeert.



a. Teken de snijlijn van vlak TCD met het grondvlak.

De druppel beschrijft een baan loodrecht op deze snijlijn, dus de druppel beweegt in het vlak door T loodrecht op de snijlijn.

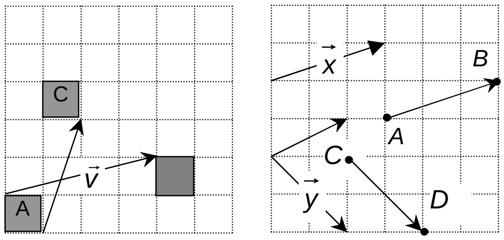
b. Geef een vergelijking van dit vlak.

c. Bereken het snijpunt van dit vlak met lijn CD.

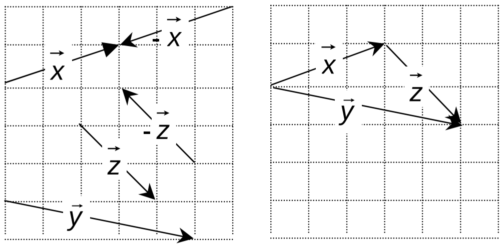
Antwoorden

Paragraaf 1 Vectoren

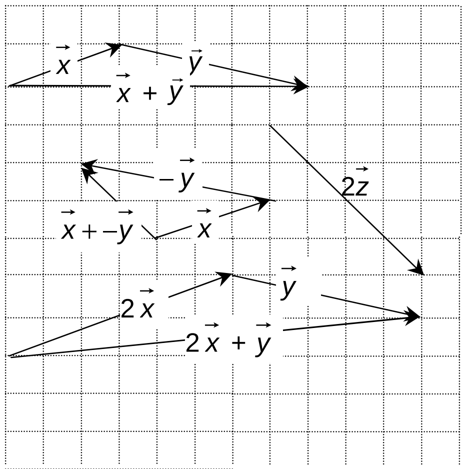
1 a
b
c



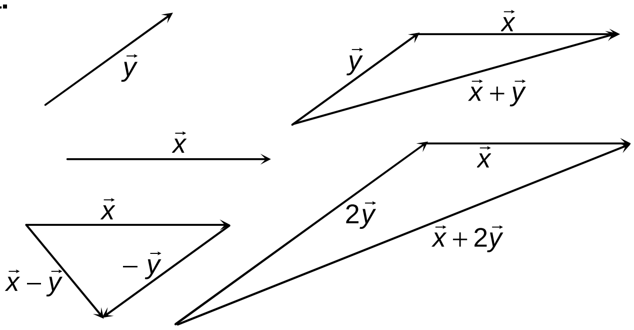
d
e



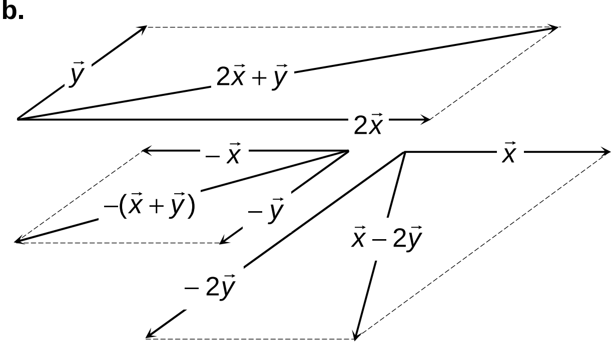
f



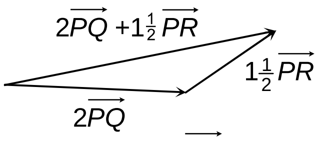
2 a.



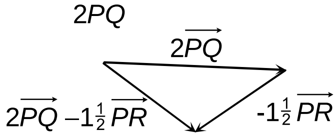
b.



3 **a.**

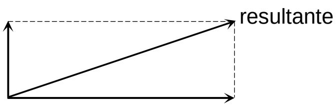


b.



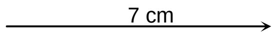
4 **a.** 3 keer

b.



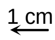
5 **a.**

b.

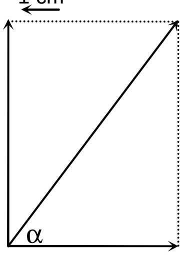


c. 7 cm

d.



e.

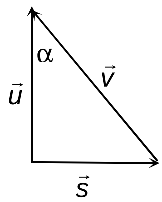


f. $\sqrt{3^2+4^2}=5$ km/h

g. $\tan(\alpha)=1\frac{1}{3}$

$\alpha \approx 53°$

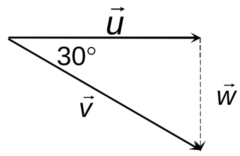
6 **a.**



b. $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 3{,}75^2} \approx 4{,}8$

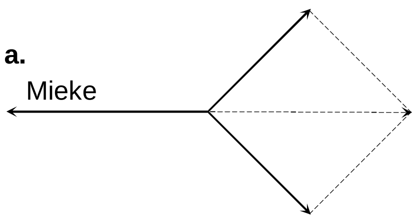
$\tan(\alpha) = \dfrac{3}{3{,}75}$, dus $\alpha \approx 39°$ en de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{s}$ is dus $39° + 90° = 129°$.
De veerboot moet zelf 4,8 km/h varen.

7 **a.**



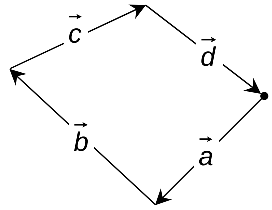
b. $|\vec{u}| \approx 1{,}73$, $|\vec{w}| = 1$

8 **a.**



b. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ keer zo groot

9 **a.** Die bij $\vec{b}$.
b.

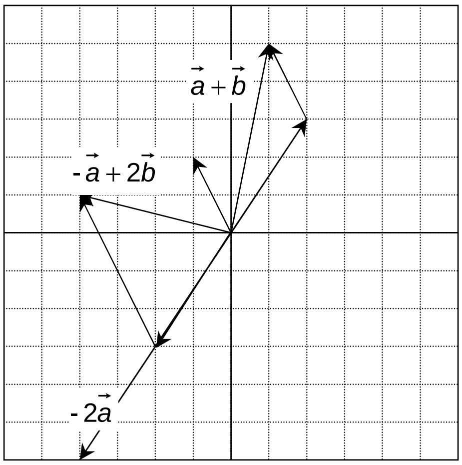


(De parallellogrammethode is hier het simpelst.)

10 De nulvector.

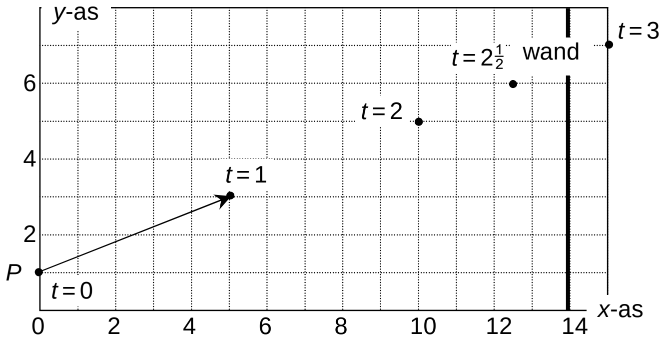
Paragraaf 2 Vectoren in een assenstelsel

1 **a.**
b.



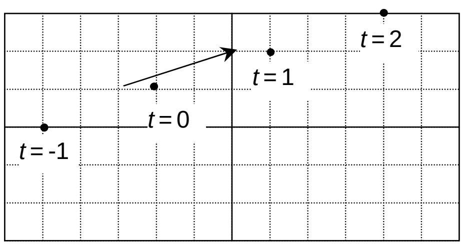
c. $-2\vec{a} = (-4,-6)$, $\vec{a}+\vec{b} = (1,4)$
d. $-\vec{a}+2\vec{b} = (-4,1)$
e. (7,2)

2 **a.**



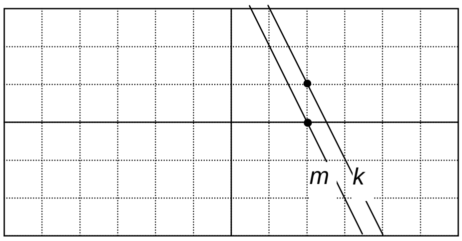
b. Vanaf $t=0$ moet hij horizontaal 14 eenheden afleggen, daar zijn $14/5=2{,}8$ seconden nodig. In verticale richting heeft hij dan afgelegd : $2{,}8 \cdot 2 = 5{,}6$ eenheden. De hoogte is dan : $5{,}6+1=6{,}6$.

3 **a.**
b.



c. $t=-5$
d. $t=-1$, $t=\frac{2}{3}$. Met de x-as : (-5,0), met de y-as : $(0,1\frac{2}{3})$.

4 a.



b. Omdat de vectoren (1,-2) en (-2,4) tegengesteld gericht zijn.
c. $(x,y) = (2,3) + t \cdot (1,\text{-}2)$ of $(x,y) = (2,3) + t \cdot (\text{-}1,2)$ of…
d. Dezelfde lijn als m.

5 a. $a = 1$, $b = \text{-}4$
b. $a = \text{-}\frac{4}{5}$, $b = 2\frac{4}{5}$

6 a. $(x,y) = (3,0) + t(3,\text{-}2)$ of $(x,y) = (0,2) + t(3,\text{-}2)$ of…
b. $(x,y) = (2,2) + t(3,\text{-}2)$ of…
c. $(x,y) = (2,2) + t(3,\text{-}2) = (2 + 3t\ ,\ 2 - 2t)$ is pv van m.
Snijpunt met de x-as : dan $y = 0 \Leftrightarrow 2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Dit geeft het punt (5,0)
Snijpunt met de y-as : dan $x = 0 \Leftrightarrow 2 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = \text{-}\frac{2}{3}$.
Dit geeft het punt $(0,3\frac{1}{3})$.

7 a. $|(2,\text{-}3)| = \sqrt{13}$, $|(2,\text{-}1)| = \sqrt{5}$, $|(3,1)| = \sqrt{10}$
b. Zie grijze hok daaronder.

8 a. $|\overrightarrow{AB}| = |(5,5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 5\sqrt{}2$, $|\overrightarrow{BC}| = |(\text{-}6,\text{-}12)| = \sqrt{180} == 6\sqrt{5}$ en $|\overrightarrow{CA}| = |(1,7)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
b. Driehoek ABC is gelijkbenig, want $AB = AC$ zie **a**.
Dus $\angle ABC = \angle ACB = (180 - 125)/2 = 27\frac{1}{2}°$.

9 a. Bijvoorbeeld (-3,1) of (9,-3) of..
b. Bijvoorbeeld (100,-87)

10 a. 35
b. Als $\alpha > 90°$, dan $a^2 + b^2 < c^2$
Als $\alpha < 90°$, dan $a^2 + b^2 > c^2$
Als $\alpha = 90°$, dan $a^2 + b^2 = c^2$

11 Een richtingsvector van lijn AB is (11,-3). Een vector hier loodrecht op is bijvoorbeeld : (3,11). Deze kunnen we als richtingsvector van de lijn door C nemen:
$(x,y) = (1,0) + t(3,11)$.

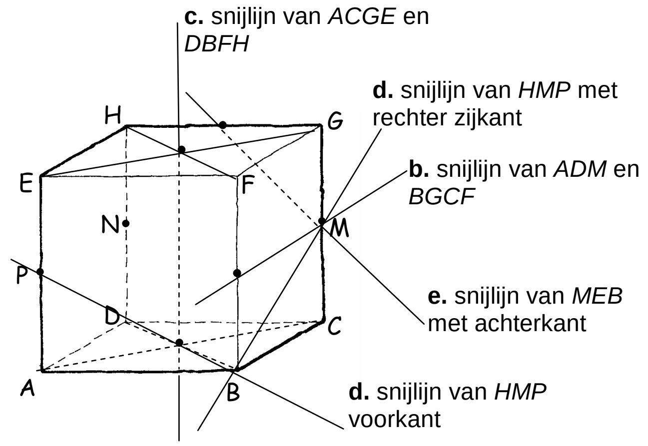
12 a. Als je in de pv voor $t = 0$ neemt, krijg je het punt B en als je voor $t = \text{-}2$ neemt, krijg je A. Omdat de punten $(4 + 3t\ , 2 - t)$ op één lijn liggen, krijg je lijn AB.

b. $\overrightarrow{AB} = (6,\text{-}2)$. Dus moet $6 \cdot (4+3t) + \text{-}2 \cdot (2-t) = 0 \Leftrightarrow$ $24 + 18t - 4 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = \text{-}1$, dit geeft: $T = (1,3)$.

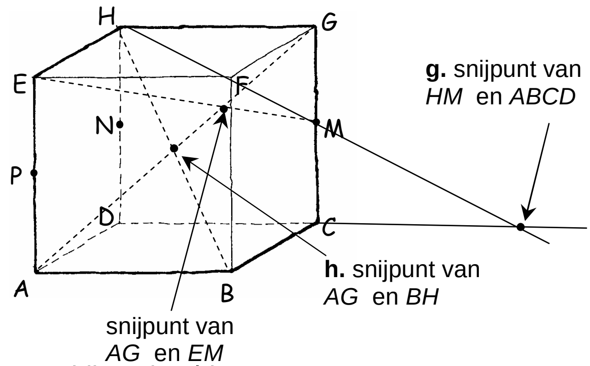
c. Dat is $|\overrightarrow{OT}| = \sqrt{10}$

Paragraaf 3 Vlakken en lijnen in de ruimte

1 **a.** Bijvoorbeeld *ABFE* en *DCGH*
b.
c.
d.



e. Dat is het middelpunt van de kubus.
f.
g.
h.
i.

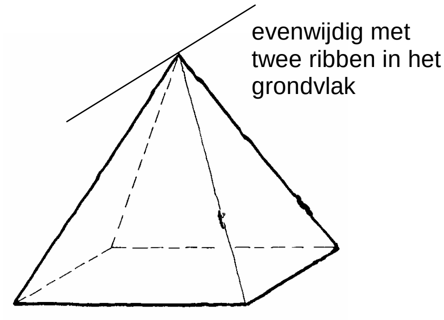


j. lijn *CG* bijvoorbeeld…
k. Omdat beide lijnen in vlak *ACGE* liggen.

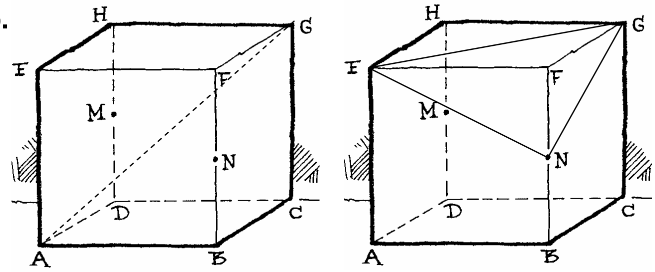
2 **a.** 4, 3, 4
b. *HC*, *HF* en *CF*

3 *MN* en *BD* zijn evenwijdig,
BM en *DN* snijden elkaar,
DM en *BN* snijden elkaar,
CM en *DN* kruisen elkaar.

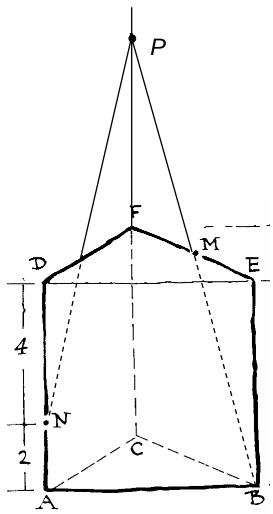
4



5 **a.**
b.



6 **a.** Teken de lijn door *B* en *M*. Die snijdt het verlengde van *CF* in *P*. Lijn *NP* is de gevraagde lijn.
b. Omdat M het midden van EF is, is $FC = PF$. het snijpunt ligt dus op hoogte 12.



7 Een vlak is door drie punten bepaald. Het vierde punt ligt misschien niet in dat vlak.

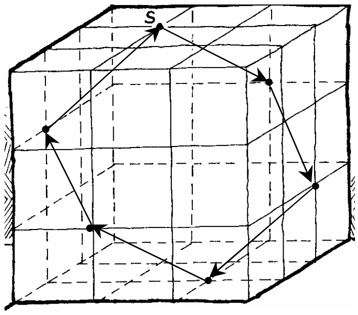
Paragraaf 4 Rekenen in de ruimte

1 **a.** $-\vec{x}$ schuift *A* naar *O*, $\vec{y}$ schuift *O* naar *C* en $\vec{z}$ schuift *C* naar *G*.
b. $\overrightarrow{OF} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$, $\overrightarrow{HB} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$, $\overrightarrow{BG} = -\vec{x} + \vec{z}$, $\overrightarrow{CH} = -\vec{y} + \vec{z}$, $\overrightarrow{AC} = -\vec{x} + \vec{y}$

2 **a.** (1,2,-2). Door de coördinaten van P met die van Q plaatsgewijs te verminderen.
b. In (2,2,3)

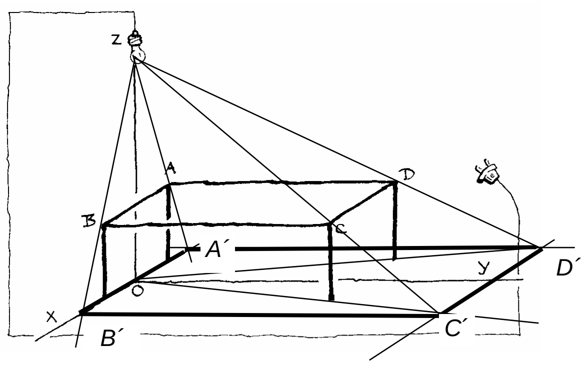
3 **a.** $\overrightarrow{AG} = (-3,2,4)$
b. $|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{3^2+2^2+4^2} = \sqrt{29}$

4 **a.** $\sqrt{3}$
b.
c. De som van de zes vectoren is de nulvector
d. De bijbehorende vectoren zijn elkaars tegengestelde



5 **a.** $C = (4,-4,0)$ en $D = (-4,-4,0)$
b. $\sqrt{4^2+4^2+8^2} = 4\sqrt{6}$
c. $\overrightarrow{BT} = (-4,-4,8)$ en $\overrightarrow{BP} = (-1,-1,2)$
d. (3,3,2)
e. $\overrightarrow{BR} = (-1\frac{1}{5},-1\frac{1}{5},2\frac{2}{5})$; $R = (2\frac{4}{5},2\frac{4}{5},2\frac{2}{5})$

6 **a.**



De schaduwen zijn $A´$, $B´$, $C´$en $D´$.
Toelichting. De schaduw $C´$ van C bijvoorbeeld vind je als volgt. Teken de lijn door O en de voet van de tafelpoot bij C. Teken de lijn door het lichtpunt en C. Het snijpunt van deze twee lijnen is $C´$.
b. $B = (4,0,4)$ en $D = (-4,12,4)$
c. Als je in $(x,y,z) = (t, 3t, 12-2t)$ voor $t = 0$ neemt, krijg je L en als je voor $t = 4$ neemt, krijg je C.
d. De derde coördinaat van $C´ = 0$, dus je moet voor $t = 6$ nemen om $C´$ te krijgen, dus $C´ = (6,18,0)$.
e. Een richtingsvector van LA is: (4,0,8) en een pv is:
$(x,y,z) = (-4,0,4) + t \cdot (4,0,8) = (-4+4t, 0, 4+8t)$. Het punt $A´$ krijg je voor $t = -\frac{1}{2}$, dit geeft: $A´ = (-6,0,0)$.

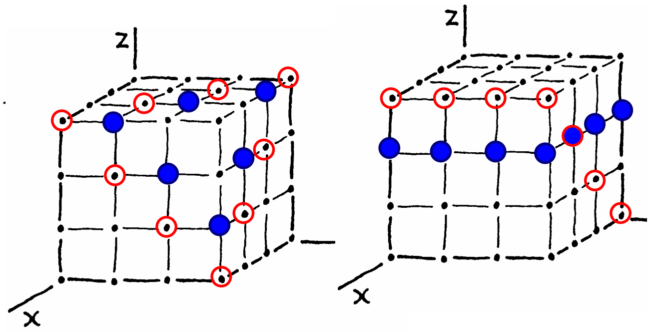
f. $B' = (6,0,0)$ en $D' = (-6,18,0)$

g. Een pv van de lijn door L en het vlekje is:
$(x,y,z) = (2t\,,3t\,,12 - 8t)$. De schaduw krijg je voor $t = 1\frac{1}{2}$.
Dit geeft het punt: $(3,4\frac{1}{2},0)$.

7 **a.** $\overrightarrow{PF} = (6,4,6)$ en $\overrightarrow{AH} = (-6,0,6)$

b. De vectoren uit **a** liggen niet in lijn.

8 **a.**
b.
c.



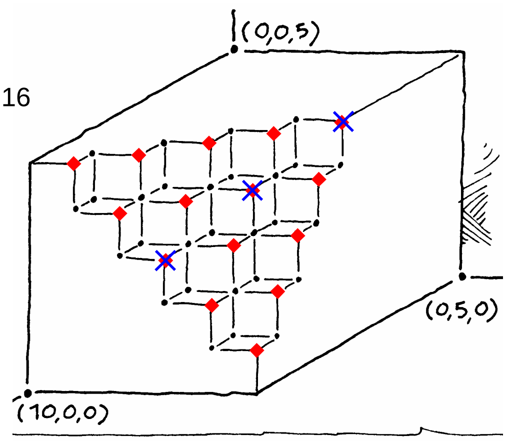
○ $x+y+z=6$ ○ $x=z$

● $x+y+z=7$ ● $y=3$

d. $x=3$; $z=3$

9 **a**

◆ $x+y+z=16$

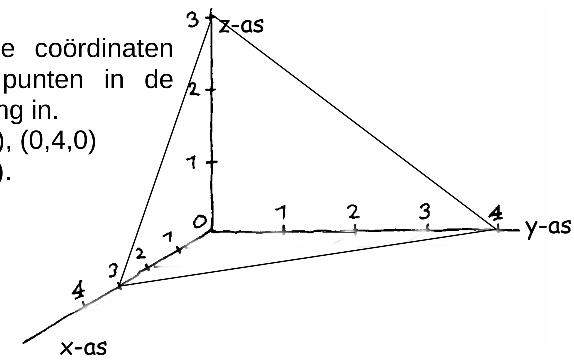


b. × (10,3,3), (8,4,4), (6,5,5)

c. 14 of 15

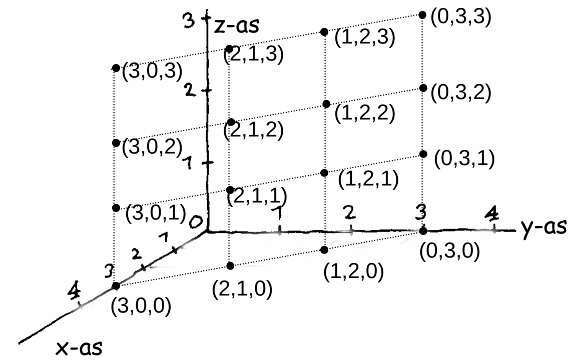
10 **a.** Vul de coördinaten van de punten in de vergelijking in.

b. (3,0,0), (0,4,0) en (0,0,3).

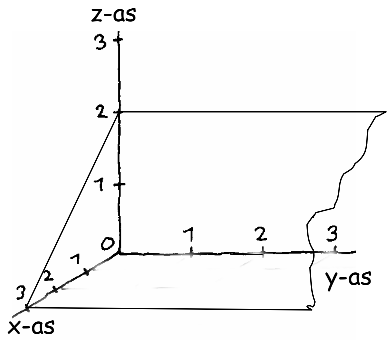


c. Dat punt is van de vorm: (t,t,t). Het voldoet aan de vergelijking van W, dus $4t+3t+4t=12$, dus $t=1\frac{1}{11}$. Dit geeft het punt: $(1\frac{1}{11},1\frac{1}{11},1\frac{1}{11})$.

11 a.



b.

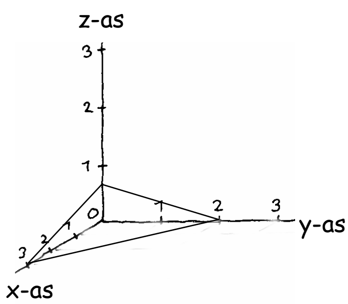


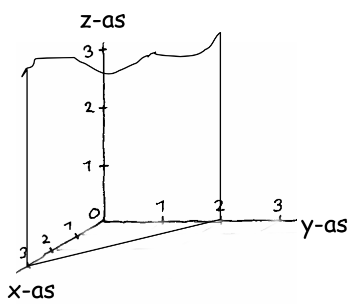
c. De y-as

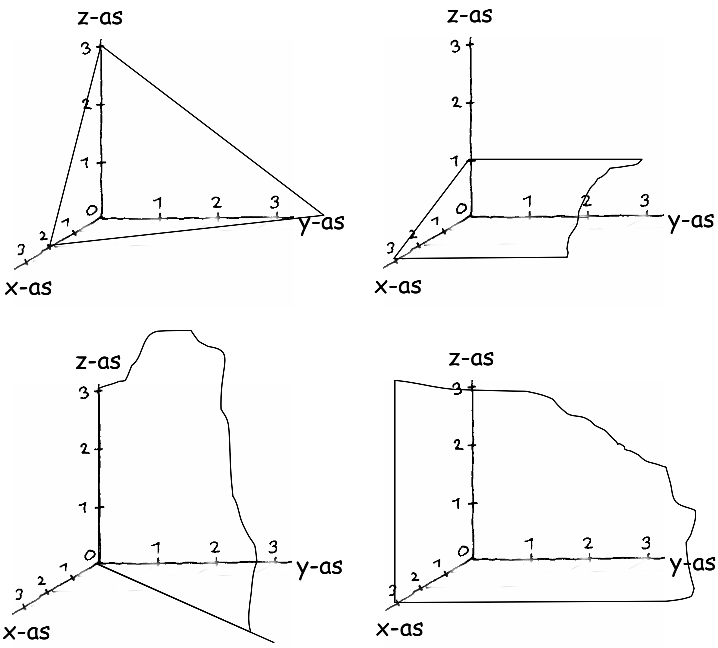
12 (3,0,0), (0,2,0), $(0,0,\frac{1}{2})$ — (3,0,0), (0,2,0)

(2,0,0), (0,4,0), (0,0,3) — (3,0,0), (0,0,1)

(0,0,0) — (3,0,0)

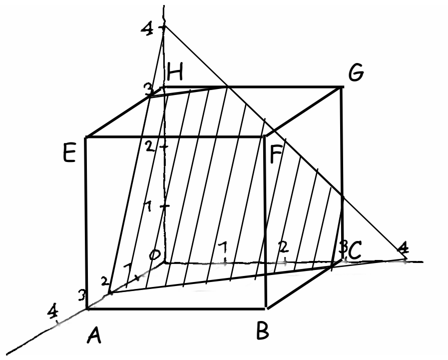






de lijn $y = x$ in
het grondvlak

13 a. De coördinaten van de snijpunten zijn: (2,0,0), (0,4,0) en (0,0,4).



b. $(0,t,3)$ voldoet aan de vergelijking van V als $2 \cdot 0 + t + 3 = 4 \Leftrightarrow t = 1$, dus het snijpunt is: (0,1,3).
c. Het snijpunt met ribbe OA: (2,0,0), met ribbe GC: (0,3,1), met ribbe EH: $(\frac{1}{2},0,3)$ en met ribbe BC: $(\frac{1}{2},3,0)$.

14 a. $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$
b. Een pv van de lijn die de kogel volgt is: $(x,y,z) = (t,2t,2t)$. Het punt $(t,2t,2t)$ voldoet aan de vergelij-

king van ´het dak´ als $\frac{t}{3}+\frac{2t}{3}+\frac{2t}{4}=1 \Leftrightarrow 4t+8t+6t=12 \Leftrightarrow$ $t=\frac{2}{3}$. Het gevraagde punt is dus:$(\frac{2}{3},1\frac{1}{3},1\frac{1}{3})$.

15 **a.** 10
b. $2x+3y+4z$ kan niet tegelijkertijd 6 en 10 zijn.
c. $a=1\frac{1}{2}$ en $b=2$

16 $x+y+z=3$ en $x+y+z=9$

Paragraaf 5 De cosinusregel

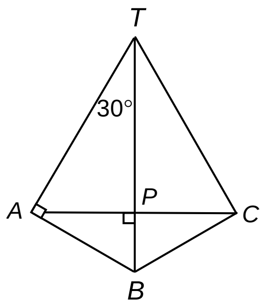
1 **a.**
b. Haakjes wegwerken geeft:
$441-x^2=c^2-(784-56x+x^2)=c^2-784+56x-x^2$
c. $x = 21\cdot\cos(\alpha)$ (Kijk in driehoek *MDX*.)
d. $c^2 = 1225 - 56\cdot 21\cdot \cos\alpha$
e. Als $\alpha=90°$, dan $\cos\alpha$-0, dus $c^2 = 1225$, dus $c = 35$
f. Als $\alpha=60°$, dan $c^2 = 1225 - 56\cdot 21\cdot \frac{1}{2}=637$ en $c=25{,}24$
Als $\alpha=47°$, dan $c^2 = 1225 - 56\cdot 21\cdot 0{,}68199.. \approx 422{,}9699$ en $c=20{,}57$.

2 $a^2 = 100 + 144 - 240\cdot\cos(60°)$, dus $a = 2\sqrt{31} \approx 11{,}1$.
Met $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cdot\cos\beta$, kun je $\cos\beta$ uitrekenen en dan β, dit geeft: $\beta = 51°$.
$\gamma = 69°$

3 **b.** 83°, 56°, 41°

4 **a.** $A=(6,0,0)$, $B=(0,4,0)$ en $C=(0,0,3)$, dus $AB=\sqrt{52}$, $BC=5$ en $AC=\sqrt{45}$.
b. $\sqrt{45}^2=5^2+\sqrt{52}^2-2\cdot 5\cdot\sqrt{52}\cdot\cos\angle ABC$, dus $\angle ABC=64°$.

5 **a.** $2\cdot 15\cdot\sin(43°) = 20{,}5$
b. 86° ; 46° ; 114° ; 114°
c. $\sqrt{26^2-(15\sin(43°))^2}+\sqrt{15^2-(15\sin(43°))^2} = 34{,}87$



6 **a.** $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 2
b. De grensvlakken *ABT* en *BCT* hiernaast zijn plat gedrukt. De kortste weg is *A-P-C*. Omdat $AT = \sqrt{3}\,AB$, is driehoek *ABT* en dus ook driehoek *ABP* een 30-60-90°-driehoek, dus $BP = \frac{1}{2}\cdot AB = \frac{1}{2}$ en $TP = 1\frac{1}{2}$.
c. De cos-regel in driehoek *APC* geeft: 109°.

(De zijden van driehoek *APC* zijn $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.)

7 **a.** Twee zijden van $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{3}$ en één zijde van $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

b. 109°

Paragraaf 6 De sinusregel

1 **a.**

I	hoogte = 1	opp = 3 = 300 mm^2
II	hoogte = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$	opp $=1\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}598 \approx 260$ mm^2
III	hoogte = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	opp $=1\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 2{,}121 \approx 212$ mm^2
IV	hoogte = $\frac{1}{2}$	opp = $1\frac{1}{2}$ = 150 mm^2
V	hoogte = 0	opp = 0

2 **a.** $h = 6/3{,}6 = 1{,}667$

b. $\alpha \approx 34°$

3 **a.** $\sin\gamma = \dfrac{h}{b}$

b. Oppervlakte $= ah = a \cdot b \sin\gamma$

4 **a.** $h = 7 \cdot \sin 80° = 6{,}89$

b. Oppervlakte $= 68{,}9$

5 De linker ster heeft acht ruiten met hoeken van 45°. De oppervlakte is $8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 45° = 5{,}66$.
De rechter ster heeft zes ruiten met hoeken van 60°. De oppervlakte is $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30° = 5{,}20$.

6 $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}5 \cdot \sin(53°) \approx 3{,}99$

7 **a.** $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 40° = 9{,}64$

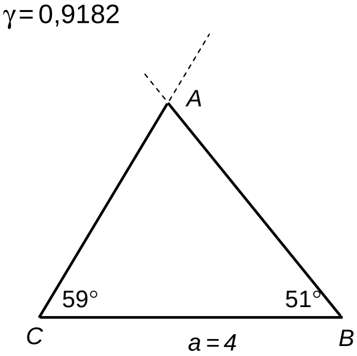
b. $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 50° = 13{,}41$

8 **a.** $\dfrac{\sin 40°}{3{,}5} = \dfrac{\sin\gamma}{5}$ geeft: $\sin\gamma = 0{,}9182$

b. $180 - 66{,}7 = 113{,}3°$

9
- $\alpha = 59°$, $\gamma = 81°$, $c = 9{,}22$
- $\alpha = 121°$, $\gamma = 19°$, $c = 3{,}04$
- $\gamma = 80°$, $b = 5{,}94$, $c = 9{,}10$

10 **a.** $\gamma = 59°$



b. $b = 33$ mm , $c = 36$ mm

11 $BC = 236$, $CD = 451$

12 De straal van de omgeschreven cirkel is de lengte van de lange diagonaal in een ruit. Bij de achtpuntige ster $r \approx 1{,}85$ en bij de zespuntige ster $r = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

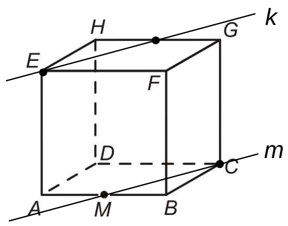
13 $AD = \dfrac{\sin 19°}{\frac{1}{10}\sin 10°} \approx 18{,}75$

$\sin 29° = \dfrac{CD}{AD}$, dus $CD = \sin 29° \cdot AD \approx 9{,}1$

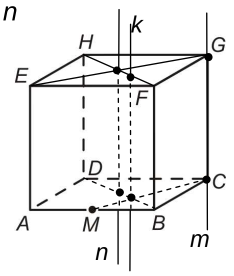
14 $\alpha = 18{,}65°$; 22,8

Paragraaf 7 Drie vlakken

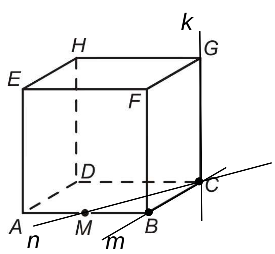
1 **a.** $k \,//\, m$



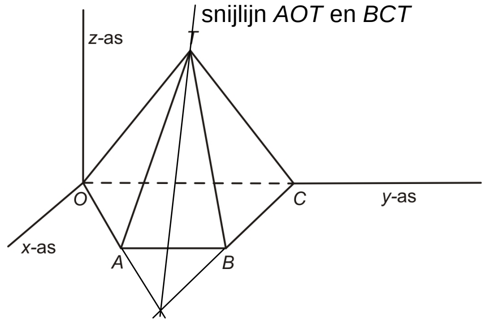
b. $k \,//\, m \,//\, n$



c. k, m en n gaan door één punt, namelijk C.

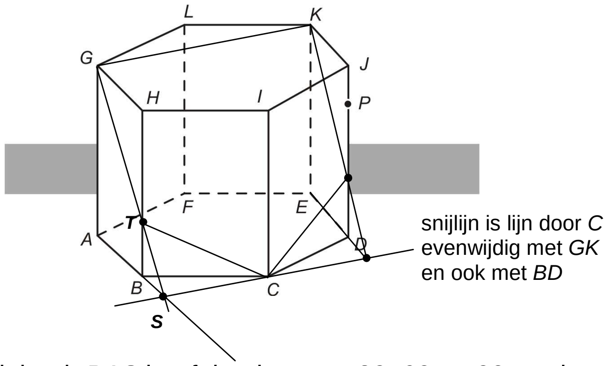


2 a. Ze gaan door één punt.

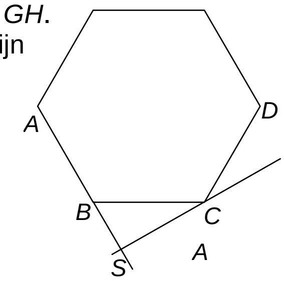


b. Ze snijden elkaar twee aan twee en de snijlijnen zijn evenwijdig.
c. *OA*: $(x,y,z) = (5t,4t,0)$; het snijpunt met *BC* voor $t = 2$, geeft: (10,8,0). De lijn door *T* en (10,8,0) heeft pv:
$(x,y,z) = (10,8,0) + t\,(-10,-4,5)$
d. *CT*: $(x,y,z) = (0,8-4t,5t)$, $y = 0$ geeft $t = 2$, dus (0,0,010)
e. $5x + 4y = 40$
f. Dat is de lijn door *O* evenwijdig met *OC* en *AB*, dus $(x,y,z) = (0,4,5) + t\,(0,1,0)$

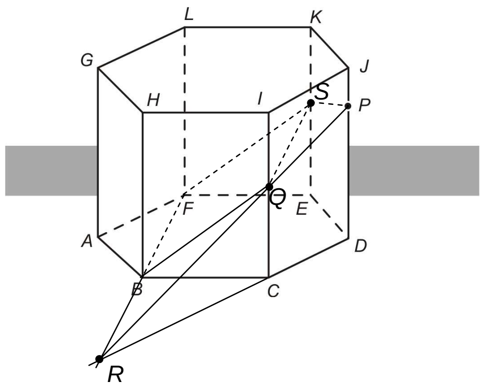
3 a,b.



c. Driehoek *BAS* heeft hoeken van 30, 60 en 90 graden. Dus $BS = \frac{1}{2} \cdot BC$. Dus ook: $BS = \frac{1}{2} \cdot GH$.
De driehoeken *GST* en *TBS* zijn gelijkvormig, dus
$TB : HT = SB : GH = 1 : 2$



4 a.



Toelichting. Teken het snijpunt van *BF* en *CD,* het snijpunt is *R*. Teken *PR*, het snijpunt met *IC* is *Q*. Teken de lijn door *Q* evenwijdig met *BF*, snijpunt met *KE* is *S*. De doorsnede is vijfhoek *BQPSF*.

b. Driehoek *BCR* heeft hoeken van 30, 60 en 90 graden, dus $RC = 2 \cdot BC$, dus $RC = 2 \cdot DC$. De driehoeken *RCQ* en *RDP* zijn gelijkvormig, dus: $PD : QC = RD : RC = 3 : 2$, dus $QC = \frac{2}{3} \cdot PD = 4$.

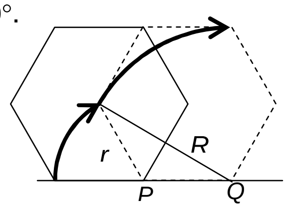
c. $BQ = 2\sqrt{13}$ met de stelling van Pythagoras. Het midden van *BF* noemen we *M*. $MP = \sqrt{9^2 + 6^2} = 3\sqrt{13}$.

Oppervlakte $= \frac{1}{2} \cdot BF \cdot (2\sqrt{13} + 3\sqrt{13}) = 15\sqrt{39}$.

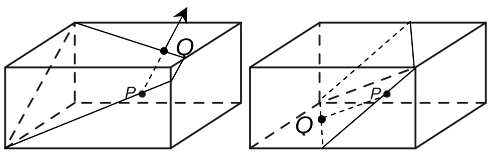
d. *A* draait eerst over de cirkel mat straal *r* en middelpunt *P* een boog van 60° en dan over de cirkel met middelpunt *Q* en straal *R* een boog van 60°.

Afgelegd: $\frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot (6 + 6\sqrt{3})$

$= 2\pi + 2\pi\sqrt{3}$



5 a,b



Het punt waar de boor het blok verlaat, noemen we *Q*. De boorlijn ligt in het vlak door de gestippelde lijn en *P*. Van dit vlak is in beide gevallen de doorsnede met de balk getekend.

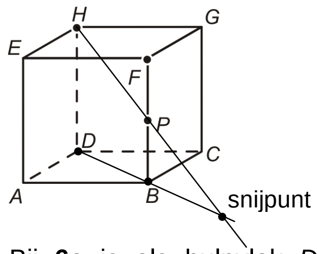
c. Bij Charlotte: pv van de boorlijn:

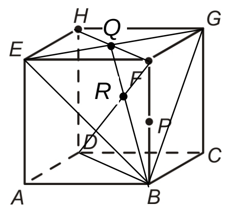
$(x,y,z) = (6,5,2) + t\,(2,0,\text{-}1) = (6 + 2t,\ 5,\ 2 - t)$. Voor *Q* geldt: $z = 3$, dus $t = \text{-}1$, dus $Q = (4,5,3)$.

Bij Lisanne: pv van de boorlijn:

$(x,y,z) = (6,5,2) + t\,(2,2,1) = (6+2t,\ \ 5+2t,\ \ 2+t)$. Voor Q geldt: $z = 0$, dus $t = -2$, dus $Q = (2,1,0)$.

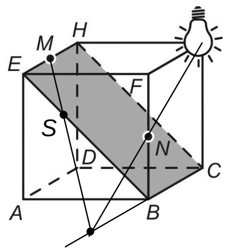
6 **a, b.**



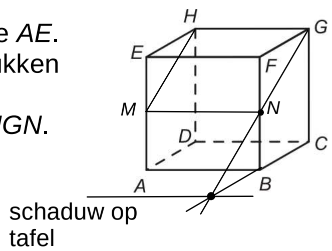


Bij **6a** is als hulpvlak *DBFH* genomen, dat snijdt het grondvlak volgens lijn *BD*.
Bij **6b** is als hulpvlak *DBFH* genomen, dat snijdt vlak *BEG* volgens lijn *BQ*, hierbij is *Q* het midden van de bovenkant van de kubus.
c. (12,12,0)
d. vergelijking *BEG* is: $x + y + z = 12$, snijpunt (4,4,4).

7 **a.**
b. 1 : 2
c. $\sqrt{17}$

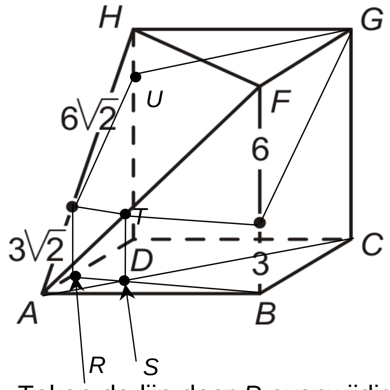


8 **a.** *M* is het midden van ribbe *AE*. De schaduwen zijn de lijnstukken *MN* en *MH*.
b. De schaduw ligt in vlak *HGN*.



Dit vlak snijdt de voorkant van de kubus volgens een lijn evenwijdig met de lijn waarmee de achterkant van de kubus gesneden wordt.
c. Zie boven.
d. Bekijk de drie vlakken: *ABCD*, *HGN* en *DCGH*. Deze drie vlakken hebben de snijlijnen *GH*, *DC* en de schaduw op tafel. Omdat *GH* en *DC* evenwijdig zijn is de schaduw dat ook.

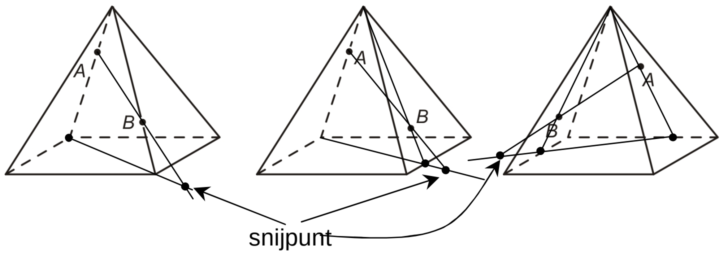
9 **a.**



Toelichting. Teken de lijn door *P* evenwijdig met *GC*. Die snijdt *AD* in *R*. Het snijpunt van *RB* en *AC* is *S*. Teken de lijn door *S* evenwijdig met *GC*. Het snijpunt met *AG* is *T*. Teken de lijn door *P* evenwijdig met *QG*. Het snijpunt met *HD* is *U*. De doorsnede is: *PTQGU*.

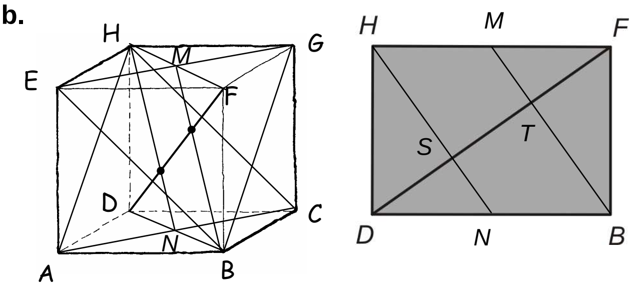
b. (0,0,7)

10



Paragraaf 8 Meer vergelijkingen van vlakken

1 **a, b.**



M is het midden van *HF* en *N* het midden van *BD*.

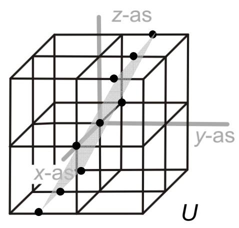
c. *S* is het snijpunt van *HN* en *DF*. Dan is de afstand de lengte van *DS*. Driehoek *DSN* is gelijkvormig met driehoek *FSH*, dus $DS : SF = 1 : 2$. Dus $DS = \frac{1}{3} \cdot DF$.

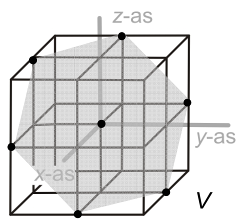
De afstand is dus $2\sqrt{3}$.

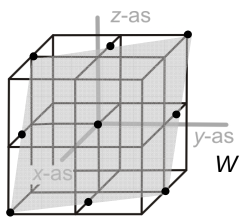
d. Vlak *ACH* heeft vergelijking $x+y+z=6$, vlak *BEG* heeft vergelijking $x+y+z=12$, dus $S=(2,2,2)$ en $T=(4,4,4)$

2 **a.** Omdat (0,0,0) aan de vergelijkingen voldoet.

b.







3 **a.** (0,0,9), (0,9,0) en (18,0,0)

b. $x+2y+2z=18$

c. $(x,y,z)=(t,\ 2t,\ 2t)$, snijpunt is (2,4,4)

d. 6

4 **a.** (6,0,0), (0,-3,0) en (0,0,3)

b. Vergelijking $\frac{x}{6}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow x-2y+2z=6$, dus een normaalvector is (1,-2,2).

5 **a.** $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot 6=9$

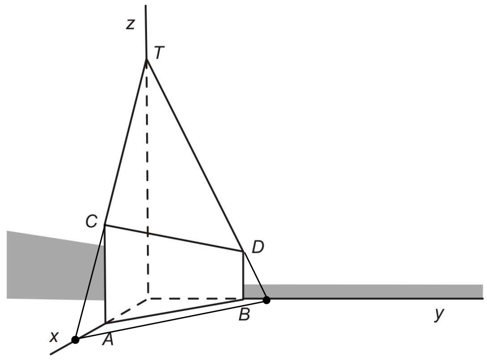
b. $2x+2y+z=6$

c. 2

d. $13\frac{1}{2}$

e. Oppervlakte $PQH\cdot$ afstand van D tot vlak $PQH=$ oppervlakte $PQD\cdot HD$.

6 **a.**



b. $4x - 3y = 0$

c. $(2\frac{4}{7}, 3\frac{3}{7}, 4\frac{2}{7})$