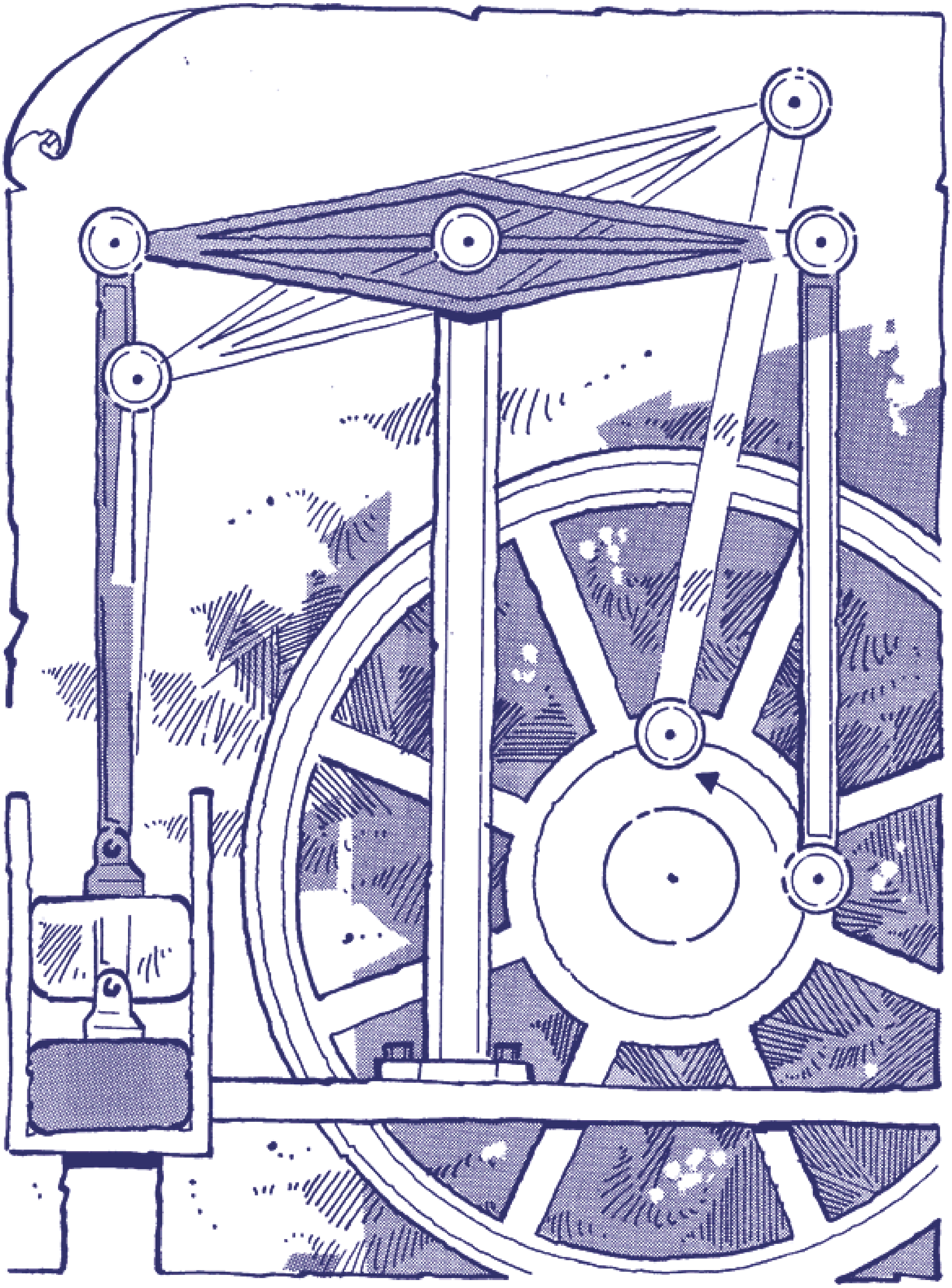
havo 5 wiskunde B deel 2
Hoofdstuk 11 (voorlopig)

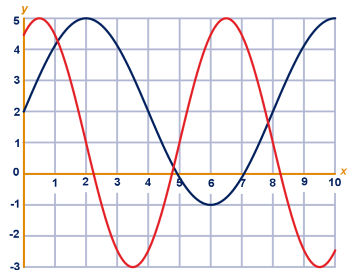
de Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN 978-90-5225-040-3
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave



1 Hiernaast staan de grafieken van twee sinusoïden getekend.



a Bepaal van beide grafieken de evenwichtswaarde, de amplitude en de periode.

b Stel (met toelichting) van beide grafieken een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$.

De grafiek van de cosinus krijg je door de grafiek van de sinus een kwart periode naar links te schuiven.

c Stel (met toelichting) van beide grafieken een formule op van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$.

De blauwe grafiek kun je uit de grafiek van $y = \sin(x)$ krijgen door achtereenvolgens een aantal transformaties toe te passen.

d Neem onderstaande over en vul daarbij in wat er op de plaats van de puntjes komt te staan.

$y = \sin(x)$

Vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor ...

$y = \ldots\sin(x)$

... omhoog schuiven

$y = \ldots + \ldots\sin(x)$

Vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor ...

$y = \ldots + \ldots\sin(\ldots x)$

e Beschrijf op dezelfde manier als hierboven, met alle tussenstappen, hoe je de rode grafiek uit de grafiek van $y = \sin(x)$ kunt krijgen.
Let op: je hebt nu vier transformaties nodig.

2 Het verloop van de temperatuur kan gedurende de 24 uren van een dag nogal grillig zijn. In vereenvoudigde vorm is het temperatuurverloop gedurende een dag redelijk te benaderen door een sinusoïde met een periode van 24 uur.
Het KNMI hanteert voor De Bilt voor de dagen in de maand juni de volgende waarden: de maximumtemperatuur is 21,0 °C, deze wordt bereikt om 3 uur 's middags; de minimumtemperatuur is 12,2 °C.
T is de temperatuur in graden Celsius op een dag in juni en u het aantal uren na middernacht.

a Teken een grafiek van het verloop van de temperatuur T als functie van u.

b Stel een formule op voor het verband tussen T en u.

Voor een dag in april geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen T en u:
$T = 7{,}6 + 4{,}3\sin(\frac{\pi}{12}(u - 10))$.

c Bereken hoe lang het volgens deze formule op een dag in april warmer is dan 10 °C. Rond je antwoord af op een geheel aantal minuten.

Op een bepaald moment op de dag is de temperatuurstijging het sterkst.

d Bereken hoe groot volgens de bovenstaande formule die sterkste stijging van de temperatuur is. Geef je antwoord in °C per minuut.

Hint 1.

De vergelijking $7{,}6 + 4{,}3\sin(\frac{\pi}{12}(u - 10)) = 10$ uit de vorige opgave mocht je oplossen met de GR, bijvoorbeeld met de optie *intersect* of de *solver*. Dat mag vaak, maar in havo 4 heb je ook gezien hoe je zo'n vergelijking *algebraïsch* kunt oplossen. Hieronder herhalen wij deze algebraïsche aanpak met twee uitgewerkte voorbeelden naast elkaar.
Let op het subtiele verschil: alleen de symmetrie is anders.

Voorbeeld

$3 + 5\sin(4(x - 1)) = 2$
Noem $t = 4(x - 1)$,
dus $3 + 5\sin(t) = 2$
$\sin(t) = -\frac{1}{5}$
Met $\sin^{-1}$: $t = -0{,}2013...$
De andere oplossing met symmetrie van de sinusgrafiek:
$t = \pi - -0{,}2013... = 3{,}3429...$
$4(x - 1) = -0{,}2013...$ of $4(x - 1) = 3{,}3429...$
$x = 0{,}9496...$ of $x = 1{,}7357...$
De periode is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$
Dus *alle* oplossingen:
$x = 0{,}9469... + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1{,}7357... + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$3 + 5\cos(4(x - 1)) = 2$
Noem $t = 4(x - 1)$,
dus $3 + 5\cos(t) = 2$
$\cos(t) = -\frac{1}{5}$
Met $\cos^{-1}$: $t = 1{,}7721...$
De andere oplossing met symmetrie van de cosinusgrafiek:
$t = 2\pi - 1{,}7721... = 4{,}5110...$
$4(x - 1) = 1{,}7721...$ of $4(x - 1) = 4{,}5110...$
$x = 1{,}4430...$ of $x = 2{,}1277...$
De periode is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$
Dus *alle* oplossingen:
$x = 1{,}4430... + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ of $x = 2{,}1277... + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

3 Bereken langs algebraïsche weg voor $0 \le x \le 5$ de oplossingen van de volgende twee vergelijkingen. Rond je antwoorden af op 2 decimalen.

a $5 - 8\sin(2x + 2) = 10$
b $12 + 5\cos(\frac{1}{2}\pi(x - 1)) = 10$

Bereken langs algebraïsche weg *alle* oplossingen van de volgende twee vergelijkingen. Gebruik de variabele k voor een willekeurig geheel getal.

c $12 - 5\sin(\pi(x - 1)) = 10$
d $7{,}6 + 4{,}3\cos(\frac{\pi}{12}(x - 10)) = 10$

Bereken exact voor $0 \le x \le 10$ de oplossingen van de volgende twee vergelijkingen.

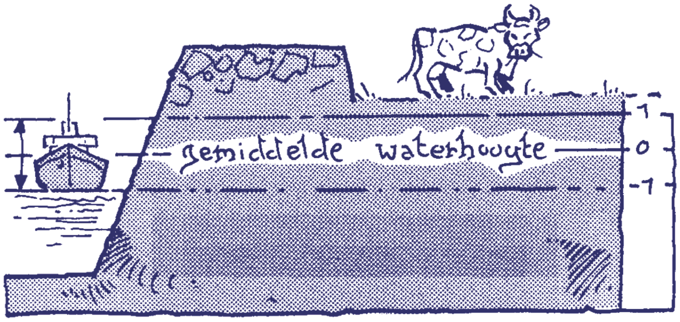
e $2 + \frac{1}{4}\sin(2x) = 2\frac{1}{8}$

f $1 - \sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 2$

g Controleer je antwoorden op de bovenstaande zes vergelijkingen door ze ook met de GR op te lossen.

4

Waterhoogte achter de dijk



Veranderingen van de waterhoogte in de rivier hebben gevolgen voor de hoogte van het grondwater in het weiland achter de dijk. Het doorgeven van de schommelingen van de waterdruk in de rivier via grondwater naar het weiland en het opzuigen en weer afstaan van water door het dijklichaam zelf, spelen daarbij een rol. Het grondwater volgt de veranderingen met enige vertraging. Van dit verschijnsel wordt in deze opgave een sterk vereenvoudigd wiskundig model gemaakt.

Stel $H_R = \sin(\frac{\pi}{6}t)$ en $H_W = \sin(\frac{\pi}{6}(t-1))$, waarbij

$H_R =$ de waterhoogte in de rivier in m;

$H_W =$ de hoogte grondwater in het weiland in m en

$t =$ de tijd in maanden.

a Bepaal met de formules de periode van beide grafieken.

b Hoe groot is volgens dit model de vertraging waarover in de tekst hierboven sprake is? Hoe krijg je (dus) de grafiek van H_W uit die van H_R?

c Teken in één window de grafieken van H_R en H_W als functie van t voor $0 \leq t \leq 12$.

d In welk tijdsinterval tussen $t = 0$ en $t = 12$ stijgt het water in de rivier, terwijl het grondwater in het weiland dan juist aan het dalen is?

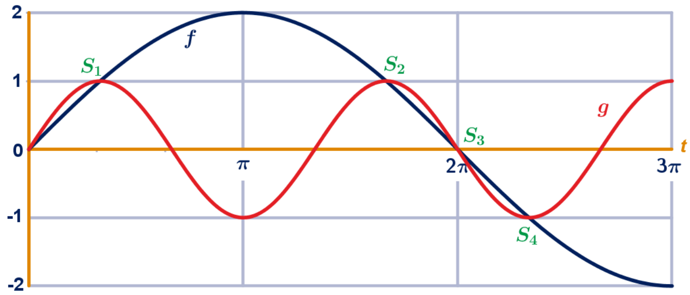
e Op welk moment tussen $t = 0$ en $t = 12$ is het water in de rivier op z'n hoogst?
Op welk moment tussen $t = 0$ en $t = 12$ is het grondwater in het weiland op zijn hoogst?

f Hoe volgt uit vraag **e** wanneer tussen $t = 0$ en $t = 12$ het water in de rivier en het grondwater in het weiland even hoog zijn?

5

Twee sinusoïden

Hieronder zijn de grafieken van de functies $f(t) = 2\sin(\frac{1}{2}t)$ en $g(t) = \sin(1\frac{1}{2}t)$ voor een deel getekend.



a Leid uit de formules af wat de amplitudes en de periodes zijn van f en g.

De snijpunten van f en g met positieve t-coördinaat worden achtereenvolgens S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, ... genoemd.

b Bewijs dat het punt $S_1 = (\frac{1}{3}\pi, 1)$ zowel op de grafiek van f als op de grafiek van g ligt en leid hieruit de coördinaten af van S_2, S_4 en S_{11}.

c Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $\sin(t)$?
Hoe ontstaat de grafiek van g uit de grafiek van $\sin(t)$?

Uit **c** volgt dat de grafiek van g in $(0,0)$ steiler loopt dan de grafiek van f. De helling van de grafiek van g in $(0,0)$ is $1\frac{1}{2}$ keer zo groot als de helling van de grafiek van f in $(0,0)$.

d Leg dat uit.

e Hoe moet je de amplitude van g veranderen, zo dat de grafiek van de nieuwe g zal raken aan de grafiek van f?

6

Molenwieken

Een windmolen wordt af en toe nog in werking gesteld. De wieken draaien dan in een vlak dat dezelfde hoek met de grond maakt als de muren van de molen; de tangens van die hoek is 7. Het midden van het wiekenkruis bevindt zich op 15 meter hoogte. De totale lengte van twee wieken die in elkaars verlengde liggen (de "vlucht") is $24{,}6$ meter.

Bij een bepaalde windsnelheid draaien de wieken met constante snelheid in 10 seconden één maal rond.

a Bereken in cm nauwkeurig de hoogte ten opzichte van de grond van het uiteinde van een wiek als het op z’n laagste punt is.

Hint 2.

b Met welke snelheid raast het uiteinde van een wiek door de lucht (in km/u)?

De hoogte (in meters) ten opzichte van de grond van het uiteinde van een wiek kan worden uitgedrukt in de tijd t (in sec) met een formule van de vorm: $h = a + b \cdot \sin(c \cdot t)$.

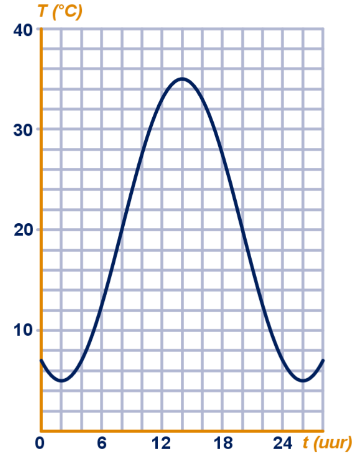
c Bereken a, b en c in twee decimalen nauwkeurig.

examen havo wiskunde B 1992-I

7

Temperatuurverloop

Het gemiddelde dagelijkse temperatuurverloop van een zekere plaats in een tropisch gebied wordt bij benadering gegeven door de sinusoïde hiernaast. T is de temperatuur in graden Celsius en t is de tijd in uren na middernacht.



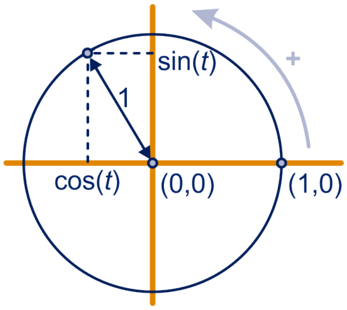
a Bepaal met behulp van de grafiek op de uitwerkbijlage het tijdstip waarop de temperatuur het snelst stijgt en bepaal die maximale stijging in graden Celsius per uur. Licht je werkwijze toe.

b Stel met toelichting een formule op van de sinusoïde.

c Bereken algebraïsch hoeveel procent van de dag de temperatuur boven de 30 °C is. Rond af op een heel percentage.

Op de eenheidscirkel

We herhalen kort:



In een assenstelsel maakt een punt de **standaard cirkelbeweging**:

- de baan is de **eenheidscirkel**: de straal is 1 en het middelpunt is $(0{,}0)$;
- de draairichting is positief (de ’tegenklokrichting’, ofwel linksom);
- de snelheid is 1: het kogeltje legt elke tijdseenheid een afstand van 1 lengte-eenheid af langs de cirkel;
- het startpunt (dat is de positie op tijdstip 0) is $(1{,}0)$.

Op tijdstip t is het punt op een zekere plek op de eenheidscirkel. Dan is per definitie:
$\sin(t) =$ de tweede coördinaat van deze plek;
$\cos(t) =$ de eerste coördinaat van deze plek.

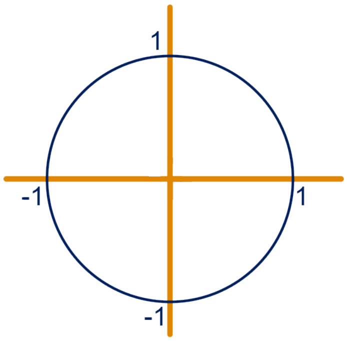
8

Punt P beweegt volgens de standaard cirkelbeweging.

a Ga met een berekening na dat punt $(0{,}6; 0{,}8)$ op de eenheidscirkel ligt.
Op welk tijdstip, afgerond op 2 decimalen, passeert P voor het eerst dit punt?
En voor welke kleinste $t > 10$?

b Bereken exact het eerste tijdstip $t > 100$ waarvoor P zich op hoogte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ bevindt.

Als je de y-coördinaat van P kent, bijvoorbeeld $y_P = -\frac{1}{5}$, zijn er nog twee plekken op de eenheidscirkel mogelijk.



c Teken een eenheidscirkel en geef hierin beide plekken aan.
Bereken exact de x-coördinaat van beide plekken.
Let op: je mag hierbij *niet* de bijbehorende waarde van t benaderen met je GR, want dan is het *niet* meer exact!

Hint 3.

Als je de x-coördinaat van P kent, bijvoorbeeld $x_P = \frac{3}{10}$, zijn er nog twee plekken op de eenheidscirkel mogelijk.

d Teken een eenheidscirkel en geef hierin beide plekken aan.
Bereken exact de y-coördinaat van beide plekken.

Als je $x = \cos(t)$ kent, zijn er (meestal) twee mogelijkheden voor de bijbehorende waarde van $y = \sin(t)$. En andersom.
Om de plek op de eenheidscirkel helemaal vast te leggen, moet je dus zowel de sinus als de cosinus kennen.
Maar pas op: die twee hangen wel samen!

9 Er zijn twee plaatsen op de eenheidscirkel waarvoor de plaats wél vast ligt als je de cosinus kent.

a Welke twee plaatsen zijn dat? Welke waarden van de cosinus horen hierbij?

Er zijn ook twee plaatsen op de eenheidscirkel waarvoor de plaats vast ligt als je de sinus kent.

b Welke twee plaatsen zijn dat? Welke waarden van de sinus horen hierbij?

Anneke zoekt een plek op de eenheidscirkel, waarvoor $\sin(t) = 0{,}9$ en $\cos(t) = 0{,}3$.

c Toon aan die plek niet bestaat.

d Verander de waarde van $\cos(t)$ zo dat de plek wel op de eenheidscirkel ligt.

Het punt met coördinaten $(\cos(t), \sin(t))$ beweegt volgens de standaardcirkelbeweging: het ligt dus voor elke waarde van t op de cirkel met middelpunt $(0{,}0)$ en straal 1.
Ofwel:
$(\cos(t), \sin(t))$ ligt op de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.
Invullen geeft:

$(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$.
Deze formule heet de **Pythagoras-formule voor sinus en cosinus**.

Opmerking
Om haakjes te sparen schrijven we in het vervolg voor $(\sin(t))^2$ meestal $\sin^2(t)$. Evenzo voor de cosinus.
We krijgen dan:
$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ voor elke waarde van t.

10 **a** Ga met een exacte berekening (zónder GR!) na dat geldt: $\sin^2(\frac{1}{6}\pi) + \cos^2(\frac{1}{6}\pi) = 1$.

b Controleer op je rekenmachine dat geldt: $\sin^2(1) + \cos^2(1) = 1$.

11 Voor een zekere t, met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ geldt $\sin(t) = 0{,}6$.

a Bereken exact de waarde van $\cos(t)$.

b En als $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$?

Gegeven: $\sin(t) = \frac{1}{3}$.

c Bereken zonder rekenmachine de exacte waarde van $\cos(t)$ als $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.

d Doe hetzelfde voor het geval $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$.

12 Als $\cos(t) = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ zijn er twee waarden mogelijk voor $\sin(t)$.
Bereken zonder rekenmachine exact deze waarden.

13 Hoe ziet de grafiek van de functie $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ eruit?
Controleer je antwoord op de GR.

Symmetrie en transformaties

14 Gegeven is de grafiek van $Y_1 = \sin(x)$. Teken de grafiek ook op je GR.
Neem voor p een willekeurig getal.

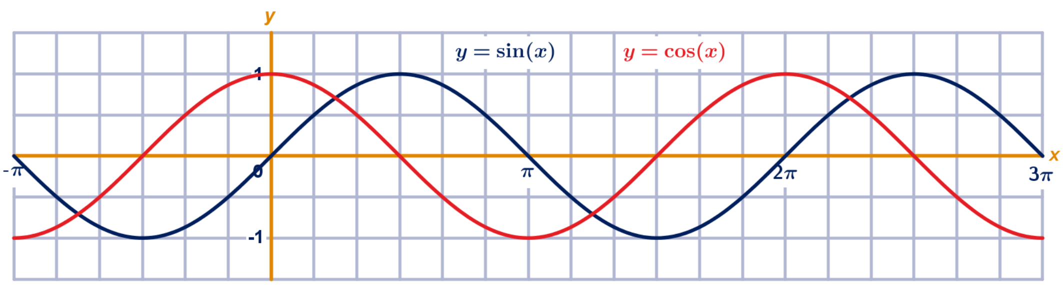
a Hoe ontstaat de grafiek van $Y_2 = p \cdot \sin(x)$ uit de grafiek van Y_1?
Controleer je antwoord door voor enkele waarden van p de grafiek van Y_2 op je GR te tekenen.

b Dezelfde opdracht voor de grafiek van $Y_3 = \sin(p \cdot x)$.

c Dezelfde opdracht voor de grafiek van $Y_4 = p + \sin(x)$.

d Dezelfde opdracht voor de grafiek van $Y_5 = \sin(x + p)$.

15 Hieronder staan de grafieken getekend van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$.

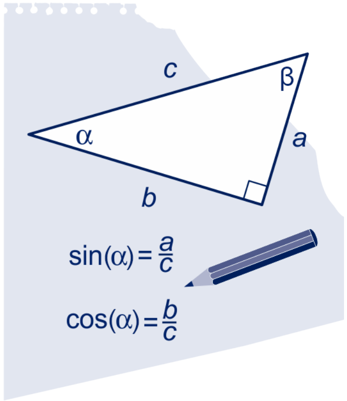


Omdat beide functies ontstaan uit dezelfde draaibeweging langs de eenheidscirkel, waarbij de ene de eerste coördinaat en de andere de tweede coördinaat van het bewegende punt is, is te begrijpen dat de vorm van beide grafieken hetzelfde is.
Je kunt ze uit elkaar krijgen door horizontale verschuivingen.

a Door welke verschuiving naar links krijg je de grafiek van $y = \cos(x)$ uit de grafiek van $y = \sin(x)$?
En hoeveel naar rechts?
Vul in: $\cos(x) = \sin(x + ...) = \sin(x - ...)$.

b Door welke verschuiving naar links krijg je de grafiek van $y = \sin(x)$ uit de grafiek van $y = \cos(x)$?
En naar rechts?
Vul in: $\sin(x) = \cos(x + ...) = \cos(x - ...)$.

16 We kijken in de rechthoekige driehoek (zie figuur) naar de sinus en cosinus van hoek α. We meten de hoeken nu in graden.



- **a** Hoe groot is hoek β?
- **b** Druk de grootte van $\sin(\beta)$ en $\cos(\beta)$ uit in a, b en c.
- **c** Vergelijk de uitkomsten van $\sin(\beta)$ en $\cos(\beta)$ met de uitkomsten van $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$. Wat valt je op?

Blijkbaar geldt in een rechthoekige driehoek:
$\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$ en $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$.
Hierbij is $0 < \alpha < 90°$, want anders heb je geen rechthoekige driehoek.

- **d** Ga met je rekenmachine na of deze gelijkheden ook kloppen voor $\alpha = 120°$ en $\alpha = 135°$.

Met de hoek t in radialen krijg je:
$\sin(t) = \cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ en $\cos(t) = \sin(\frac{1}{2}\pi - t)$.

- **e** Teken op de GR (denk aan radialen!) in een figuur de grafieken van $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$.
  Evenzo van $y_3 = \cos(x)$ en $y_4 = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$.
  Kloppen bovenstaande gelijkheden?

We hebben nu vier formules om een sinusformule te veranderen in een cosinusformule, en omgekeerd:

- $\sin(t) = \cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ (denk aan 'rechthoekige driehoek')
- $\cos(t) = \sin(\frac{1}{2}\pi - t)$ (denk aan 'rechthoekige driehoek')
- $\sin(t) = \cos(t - \frac{1}{2}\pi)$ (denk aan 'verschuiving')
- $\cos(t) = \sin(t + \frac{1}{2}\pi)$ (denk aan 'verschuiving')

Voorbeeld:
$y = 2 + 3\cos(2x - \pi)$.
Schrijf deze formule in de vorm $y = a + b\sin(cx + d)$.
Oplossing:
Noem $t = 2x - \pi$ en gebruik bijvoorbeeld $\cos(t) = \sin(t + \frac{1}{2}\pi)$, dat geeft $\cos(2x - \pi) = \sin((2x - \pi) + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x - \frac{1}{2}\pi)$, dus de hele formule wordt $y = 2 + 3\sin(2x - \frac{1}{2}\pi)$.
(Dus $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$ en $d = -\frac{1}{2}\pi$.)

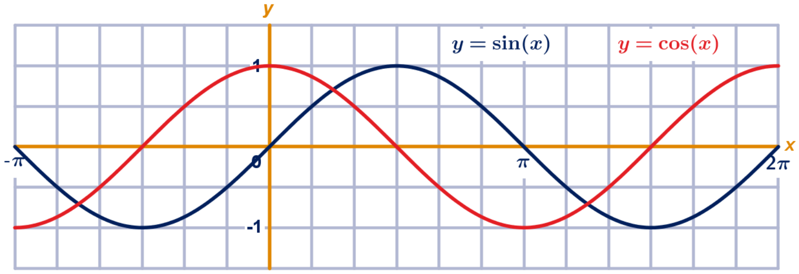
17 Schrijf de onderstaande formules om: een cosinus naar een sinus en omgekeerd. Controleer je antwoorden door de grafieken op je GR te tekenen.

- **a** $y = 1 + \cos(\pi - \frac{1}{2}x)$
- **b** $y = 3 - \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi)$
- **c** $y = 2 - 4\cos(\frac{\pi}{3}(x - 1))$
- **d** $y = 1 + 3\sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$

18

Tegengestelde

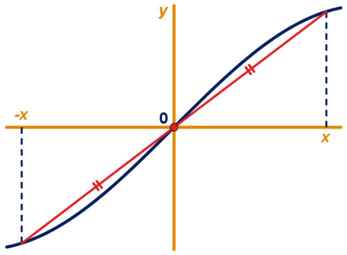
Hieronder staan nogmaals de grafieken van sinus en cosinus.



De grafiek van $y = \cos(x)$ is symmetrisch ten opzichte van de y-as.

a Wat zegt deze symmetrie over het verband tussen $\cos(\text{-}x)$ en $\cos(x)$?

De grafiek van $y = \sin(x)$ is puntsymmetrisch met de oorsprong als spiegelpunt. Zie figuur.



b Wat zegt deze puntsymmetrie over het verband tussen $\sin(\text{-}x)$ en $\sin(x)$?

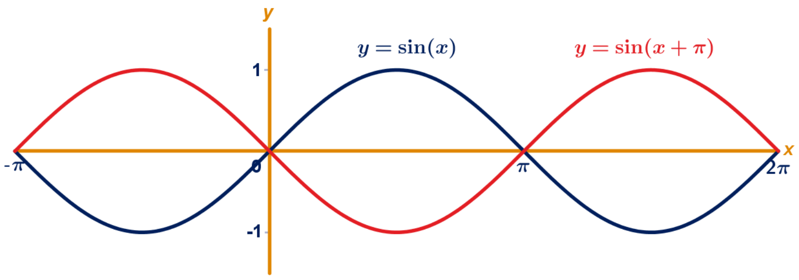
c Probeer zonder de grafiek te tekenen te zeggen hoe de grafiek van de functie $y = \cos(x) + \cos(\text{-}x)$ eruit ziet. Geef een eenvoudigere formule voor deze functie. Controleer je antwoord door de grafiek op de GR te tekenen.

d Doe hetzelfde voor de functie $y = \sin(x) + \sin(\text{-}x)$.

19

Halve periode

Hieronder staan de grafieken getekend van
$y = \sin(x)$ en $y = \sin(x + \pi)$.
De tweede (rode) grafiek krijg je door de eerste (blauwe) grafiek een halve periode naar links te verschuiven.



Je kunt de rode grafiek ook krijgen uit de blauwe grafiek door een verticale vermenigvuldiging t.o.v. de x-as.

a Met welke factor?
Neem over en vul in: $\sin(x + \pi) = \ldots \cdot \sin(x)$.

b En als de grafiek van $y = \sin(x)$ een halve periode naar rechts wordt verschoven, welke formule krijg je dan?

c Teken op je GR de grafieken van $y_1 = \cos(x)$ en $y_2 = \cos(x + \pi)$.
Welk verband geldt er voor $\cos(x)$ en $\cos(x + \pi)$?
En voor $\cos(x)$ en $\cos(x - \pi)$?

d Hoeveel moet je de grafiek van $y = 3 + 2\sin(\frac{\pi}{3}(x - 3))$ verschuiven om de grafiek van $y = 3 - 2\sin(\frac{\pi}{3}(x - 3))$ te krijgen?

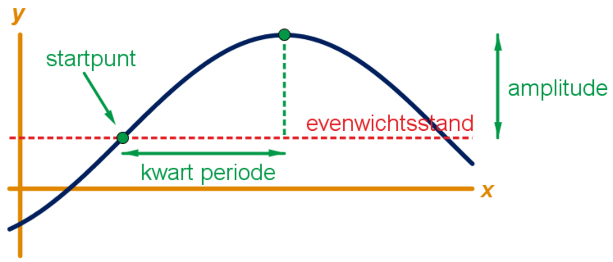
20

Toppen

We bekijken de grafiek van de functie $f(x) = 1 + 3\sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$.

a Wat is de evenwichtswaarde en de amplitude?
Wat is de periode en voor welke waarde van x gaat de grafiek van f voor het eerst stijgend door de evenwichtsstand?

Bij de grafiek van $y = \sin(x)$ zit de eerste top (maximale waarde) rechts van de y-as bij $x = \frac{1}{2}\pi$, dus een kwart periode vanaf het 'startpunt' en heeft dus coördinaten $(\frac{1}{2}\pi, 1)$.
Dat is bij elke sinusfunctie zo: de top zit een kwart periode rechts van het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Zie figuur.



Met behulp van het antwoord van vraag **a** kun je direct zeggen waar de eerste top van de grafiek van f zich bevindt.

b Bij welke waarde van x is dat? Wat zijn de coördinaten van de eerste top?
En wat zijn de coördinaten van de volgende maximale waarde?

c Geef ook de coördinaten van de eerste twee minimale waarden van de grafiek van f rechts van de y-as.
Controleer je antwoorden met de grafiek van f op de GR.

De grafiek van een cosinusfunctie ziet er iets anders uit: de grafiek van $y = \cos(x)$ start juist in een top.

d Bepaal de coördinaten van de eerste twee toppen en dalen van de grafiek van $g(x) = 2 - \cos(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$.
Controleer je antwoorden met de grafiek van g op je GR.

Hint 4.

Bij de sinusfunctie $y = a + b\sin(c(x - d))$, met $b > 0$, zit een maximale waarde bij $x = d + \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{c} = d + \frac{\pi}{2c}$ en dan telkens een periode $\frac{2\pi}{c}$ naar links of rechts.
Een minimale waarde zit altijd een halve periode rechts of links van een maximale waarde.

Bij een cosinusfunctie is dat anders:
de grafiek van $y = a + b\cos(c(x - d))$, met $b > 0$, start juist in een maximale waarde, dus bij $x = d$ zit een maximum.
Ook hier geldt dat een minimale waarde altijd een halve periode rechts of links van een maximale waarde zit.

In alle gevallen (met $b > 0$) geldt:
De maximale waarde is $a + b$ en de minimale waarde is $a - b$.

Opmerking
Als de waarde van d negatief is, dan gaat een sinusfunctie in het startpunt juist dalend door de evenwichtsstand en begint een cosinusfunctie in een minimum.

21 Schrijf bij de onderstaande formules de coördinaten op van de eerste twee punten rechts van de y-as waarin de grafiek een maximale heeft en van de eerste twee punten waarin de grafiek een minimale waarde heeft.
Controleer je antwoorden door de grafiek op je GR te tekenen.

a $y = 1 + \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$

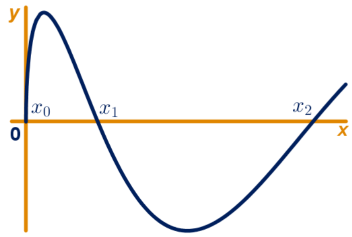
b $y = 3 + 4\sin(2x + \frac{1}{3}\pi)$

c $y = 2 - 4\cos(\frac{\pi}{3}(x - 1))$

d $y = 11 - 3\sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$

Kettingen met sinus en cosinus

22 We bekijken de volgende ketting van functies:
$x \rightarrow$ **[WORTEL]** $\rightarrow \sqrt{x} \rightarrow$ **[SINUS]** $\rightarrow y = \sin(\sqrt{x})$
Hiernaast staat een deel van de grafiek van deze functie getekend. De twee schaalverdelingen zijn verschillend.



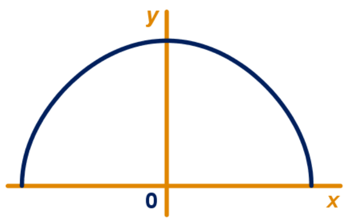
a Wat is het domein van deze functie?
b Leg uit dat de eerste top van de grafiek zit bij $x = \frac{1}{4}\pi^2$.
c Bereken exact de x-coördinaat van de tweede extreme waarde van de grafiek.

We nummeren de nulpunten: $x_0 = 0, x_1, x_2, x_3, \ldots$.
In de grafiek zijn x_0 t/m x_2 aangegeven.
Twee opeenvolgende nulpunten x_k en x_{k+1} liggen steeds verder uit elkaar.
d Onderzoek voor welke waarde van k dit verschil voor het eerst groter dan 100 is.

23 We bekijken de volgende ketting van functies:
$x \rightarrow$ **[SINUS]** $\rightarrow \sin(x) \rightarrow$ **[WORTEL]** $\rightarrow y = \sqrt{\sin(x)}$
Hieronder staat een grafiek van deze functie getekend.

a Verklaar dat de grafiek uit losse boogjes bestaat.
Wat is het domein van deze functie?
b Bereken exact de maximale waarde van deze functie.
c Bij welke waarden van x wordt deze maximale waarde aangenomen? (Gebruik de letter k voor elk willekeurig geheel getal.)
d Los exact op voor $0 < x < 20$: $\sqrt{\sin(x)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

24 Hiernaast staat één boogje van de grafiek van de functie $y = \sqrt{\cos(\frac{1}{2}\pi x)}$ getekend.



a Bepaal (zonder je rekenmachine te gebruiken) voor welke waarden van x de grafiek getekend is.

De grafiek lijkt erg veel op een halve cirkel met straal 1 en middelpunt $(0,0)$, maar is dat niet.
b Bereken met de GR hoe groot het maximale verticale verschil is tussen de grafiek van deze functie en de genoemde halve cirkel. Rond af op 3 decimalen.

Hint 5.

25

We bekijken voor elke waarde van x de volgende ketting van functies:
$x \rightarrow$ **[SINUS]** $\rightarrow \sin(x) \rightarrow$ **[KWADRAAT]** $\rightarrow y = \sin^2(x)$

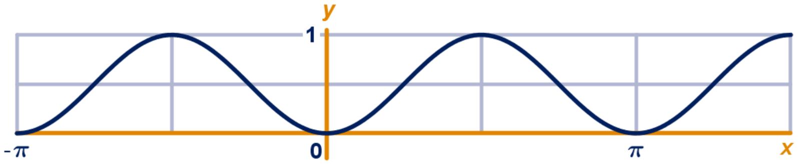
Het bereik van het eerste deel van deze ketting, dus van $y = \sin(x)$, is het interval $[-1, 1]$.
In het tweede deel van de ketting worden deze waarden gekwadrateerd.

a Wat is (dus) de maximale waarde van deze functie? Hoe groot is dan $\sin(x)$?
Bij welke waarden van x wordt deze maximale waarde aangenomen?

b Wat is de minimale waarde van deze functie? Hoe groot is dan $\sin(x)$?
Bij welke waarden van x wordt deze minimale waarde aangenomen?

c Los exact op voor $0 \leq x \leq 2\pi$: $\sin^2(x) = \frac{1}{4}$.

Hieronder staat de grafiek van $y = \sin^2(x)$ getekend.



De grafiek is een sinusoïde, dus geldt:
$\sin^2(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot (x - d))$ voor bepaalde waarden van a, b, c en d.

Opmerking
Je moet nu maar even geloven dat dit inderdaad een echte sinusoïde is en er niet alleen op lijkt. Het bewijs hiervoor behoort niet tot de stof voor havo wisB. Als je het toch per se wilt weten, dan kun je vast wel een bewijs op internet vinden.

d Geef zo'n formule in de vorm $y = a + b\sin(\mathrm{c}(x - d))$.

Ook de grafiek van de functie $y = \cos^2(x)$ is een sinusoïde.

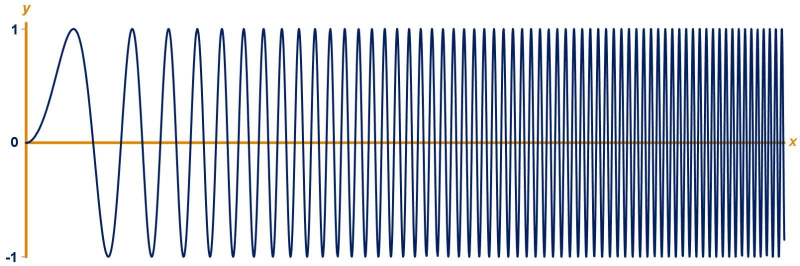
e Teken de grafiek van $y = \cos^2(x)$ op je GR en geef een bijbehorende formule in de vorm $y = a + b\sin(\mathrm{c}(x - d))$.

f Los exact op voor $0 \leq x \leq 2\pi$: $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$.

26 Teken op de GR de grafiek van $y = \sqrt{3 - 2\sin(2x)}$ op het interval $0 \leq x \leq 2\pi$.
Bereken exact (met de formule) de maximale en minimale waarde van deze functie.
Bij welke waarden van x worden deze extreme waarden aangenomen?

Hint 6.

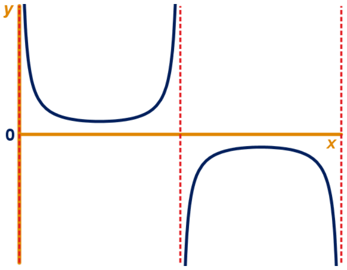
27 Hieronder staat de grafiek van de functie $y = \sin(x^2)$.



Bereken het aantal nulpunten van deze functie op het interval $0 \leq x \leq 20$.

28 Hiernaast staat een deel van de grafiek van de volgende samengestelde functie getekend:

$x \rightarrow$ **[SINUS]** $\rightarrow \sin(x) \rightarrow$ **[OMGEKEERDE]** $\rightarrow y = \dfrac{1}{\sin(x)}$



De grafiek heeft oneindig veel verticale asymptoten: ze herhalen zich periodiek.

a Leg met de formule uit wat de vergelijkingen van de verticale asymptoten zijn.

b Bereken exact (dus zonder rekenmachine) de coördinaten van de twee toppen van het getekende deel van de grafiek.

De lijn door de twee getekende toppen snijdt de y-as.

c Bereken exact de coördinaten van dit snijpunt met de y-as.

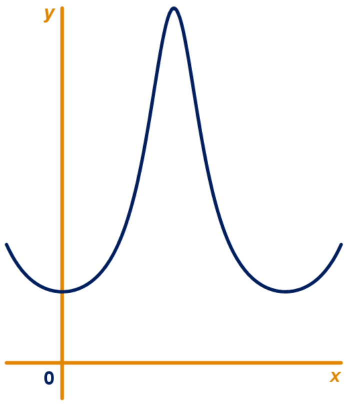
De lijn $y = -2$ snijdt het getekende deel van de grafiek in twee punten A en B.

d Bereken exact de afstand AB.

e Met welke transformatie krijg je de grafiek van $y = \dfrac{1}{\cos(x)}$ uit de grafiek van $y = \dfrac{1}{\sin(x)}$?
Wat zijn (dus) de verticale asymptoten van deze grafiek?
Controleer je antwoorden met de grafiek op je GR.

f Geef de exacte coördinaten van de eerste twee toppen van de grafiek van $y = 1 + \dfrac{4}{\sin(x)}$.

Hint 7.



29 We bekijken voor elke waarde van parameter a de functie
$y = \dfrac{10}{3 + a\cos(x)}$.
Hiernaast staat de grafiek getekend voor $a = 2$, dus van
$y = \dfrac{10}{3 + 2\cos(x)}$.

De grafiek van $y = \dfrac{10}{3 + 2\cos(x)}$ heeft een minimum als de noemer maximaal is. En andersom: de grafiek heeft een maximum als de noemer minimaal is.

a Geef de exacte coördinaten van de drie toppen van het getekende deel van de grafiek van $y = \dfrac{10}{3 + 2\cos(x)}$.

Voor een bepaalde waarde van a is de maximale waarde van de functie $y = \dfrac{10}{3 + a\cos(x)}$ gelijk aan 20.

b Bereken deze waarde van a.
Wat is de minimale waarde?

c Is er een waarde van a waarvoor de grafiek de x-as raakt? Leg uit.

d Voor welke waarden van a heeft de grafiek verticale asymptoten? Licht toe.

Tangens

30 Teken een eenheidscirkel.

a Geef zo goed mogelijk de plekken op de eenheidscirkel aan waarvoor geldt $\sin(t) = 2 \cdot \cos(t)$.

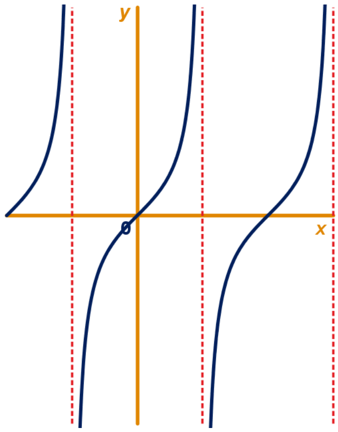
Je kunt de exacte coördinaten van deze punten op de eenheidscirkel als volgt berekenen: het zijn de snijpunten van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ en een rechte lijn door de oorsprong.

b Leg uit dat dit de lijn $y = 2x$ is en bereken de exacte coördinaten van het snijpunt.

c Bereken in drie decimalen nauwkeurig de bijbehorende waarden van t tussen 0 en 2π.

d Herhaal het bovenstaande voor de vergelijking $\sin(t) = \frac{1}{2}\cos(t)$.

31 Hiernaast staat de grafiek getekend van $y = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



De grafiek heeft oneindig veel verticale asymptoten: ze herhalen zich periodiek.

a Leg met de formule uit wat de vergelijkingen van de verticale asymptoten zijn.

b Bereken exact de nulpunten van deze functie.

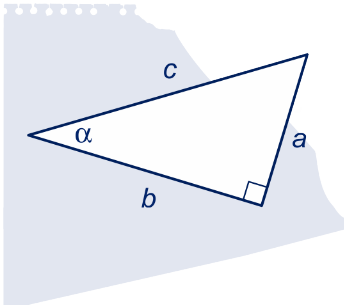
De vergelijking $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1$ geeft $\sin(x) = \cos(x)$.
Deze vergelijking kun je exact oplossen door naar de eenheidscirkel te kijken.

c Leg dat uit.
Bereken nu de exacte oplossingen van de vergelijking $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

d Bereken exact voor welke $0 \leq x \leq 2\pi$ geldt: $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -1$.

Als een punt P draait over de eenheidscirkel, dan is de richtingscoëfficiënt van de lijn OP gelijk aan $\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$.
Deze verhouding tussen sinus en cosinus wordt ook wel de **tangens** genoemd.
Dus: $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

32 Voor driehoeken wist je dit eigenlijk al.
In deze opgave gaan we dat na in de rechthoekige driehoek met zijden a, b en c en hoek α.



a Druk $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ uit in a, b en c.

b Laat zien dat geldt $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$.

Omdat je van de sinus en de cosinus een aantal exacte waarden kent, kun je van dezelfde hoeken ook de exacte waarde van de tangens berekenen. Dus óók voor waarden van α waarbij je geen rechthoekige driehoek kunt tekenen.

c Neem de tabel hieronder over en vul op de open plekken exacte waarden in. Gebruik geen rekenmachine. Vereenvoudig je uitkomsten.

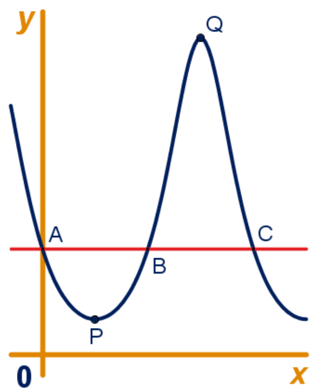
α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
sin(α)									
cos(α)									
tan(α)									

Opmerking
De functie $y = \tan(x)$ behoort *niet* tot de examenstof. Maar je moet wel de functie $y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ als samenstelling van de bekende sinus- en cosinusfunctie kunnen onderzoeken en hier allerlei berekeningen mee kunnen uitvoeren.

33 Teken op je GR de grafiek van $y = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ en vergelijk deze met de grafiek van $y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Door welke transformaties en in welke volgorde, kun je de grafiek van $y = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ uit de grafiek van $y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ krijgen?

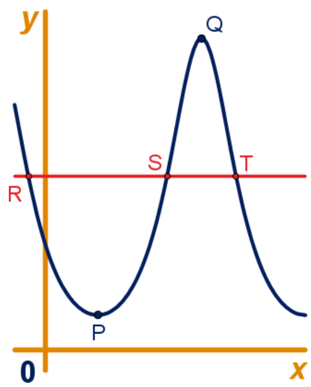
Nog meer samenstellingen

34 Hiernaast staat de grafiek getekend van de functie
$f(x) = \frac{2 - \sin(\pi x)}{2 + \sin(\pi x)}$.



De grafiek van f snijdt de y-as in punt A.
De horizontale lijn door A snijdt de grafiek van f in de punten B en C.
a Bewijs dat $AB = BC$.

Top P zit midden tussen A en B en top Q zit midden tussen B en C.
b Bereken exact de lengte PQ.



De horizontale lijn $y = \frac{1}{2}(y_P + y_Q)$ snijdt de grafiek van f in de punten R, S en T zoals in de figuur hiernaast aangegeven.
c Bereken exact de verhouding $RS : ST$.

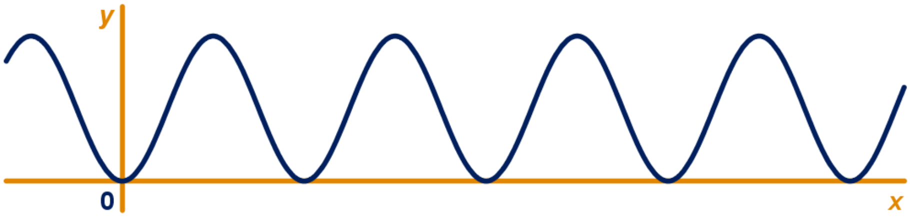
35 Op het domein $[0{,}6\pi]$ is de functie f gegeven door
$f(x) = x \cdot \sin(x)$.

De lijn met vergelijking $y = x$ heeft behalve de oorsprong nog drie punten gemeenschappelijk met de grafiek van f.
a Bereken exact de coördinaten van deze punten.

De helling van de grafiek van f in het punt $(2\pi{,}0)$ is te benaderen door een differentiequotiënt met $\Delta = 0{,}001$ te berekenen.
b Benader op deze manier de helling van de grafiek van f in dit punt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

CE havo wisB pilot 2014 2e tijdvak

36 In de figuur is de grafiek getekend van de functie f gegeven door $f(x) = (\sin(x) \cdot \cos(x))^2$.



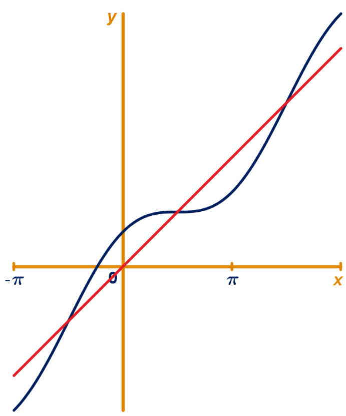
a Bereken op algebraïsche wijze de x-coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de grafiek van f en de x-as op het interval $[0,\pi]$.

De grafiek van f kan ook worden beschreven door middel van één enkele cosinusfunctie. Er geldt $f(x) = 1 - b \cdot \cos(cx)$.

b Bereken a, b en c.

CE havo wisB pilot 2011 2e tijdvak

37 De functie f is gegeven door $f(x) = x + \cos(x)$.
In de figuur staat de grafiek van f getekend en de lijn $y = x$ op het interval $[-\pi, 2\pi]$.

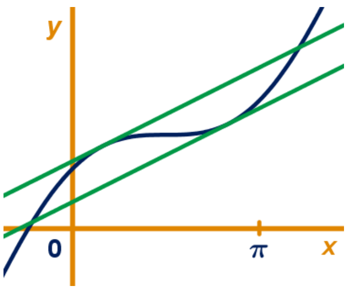


a Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van beide grafieken op dit interval.

We maken de nieuwe functie h als volgt:
$h(x) = \dfrac{f(x + 0{,}001) - f(x)}{0{,}001}$.
De functie h is een goede benadering van de hellingfunctie van f.

b Bereken $h(0)$ en geef hiermee een benadering van de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de y-as.

Voor elke waarde van c bekijken we de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}x + c$.
In de tweede figuur staan voor twee waarden van c de lijn getekend voor het geval de lijn raakt aan de grafiek van f.
Hierbij is ingezoomd op de grafiek.

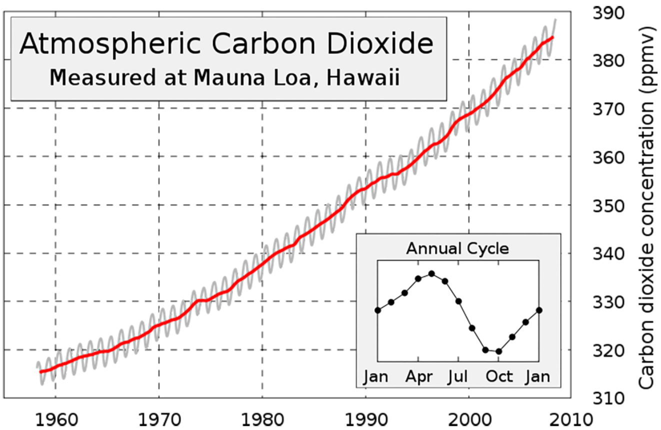


c Bereken met behulp van de functie h deze twee waarden van c afgerond op 2 decimalen.

Trendlijn met schommelingen

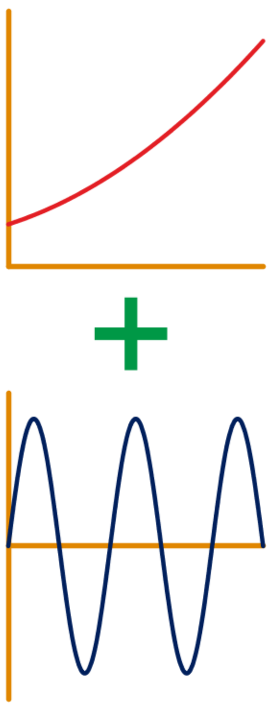
38 **Kooldioxide**

Vanaf 1958 wordt over de hele wereld de concentratie kooldioxide in de lucht gemeten. Kooldioxide is een van de belangrijkste ’broeikasgassen’ en zorgt voor opwarming van de aarde.
In de grafiek hieronder staan de metingen van het CO_2-gehalte in Hawaii weergegeven.
(ppmv = parts per million by volume = aantal cm^3 per m^3)



Bron: www.esrl.noaa.gov

a Op welk moment in het jaar is de CO_2-concentratie het hoogst?



De grafiek kun je opgebouwd denken uit twee grafieken: een **trend** (weergegeven door de rode lijn) en daarbij opgeteld een fluctuatie die zich elk jaar herhaalt.

b Wat is (ongeveer) de amplitude van de jaarlijkse fluctuatie?

Volgens sommige klimaatonderzoekers lijken de concentraties een zogenaamde *Keeling curve* te volgen: een parabolische functie met sterke seizoensinvloed.
Bij de parabolische trendlijn past een formule van de vorm $C = at^2 + bt + 315$, waarbij C de CO_2-concentratie is en de tijd t in jaren sinds 1958.

c Bereken de waarden van a en b. Rond af op 3 decimalen.

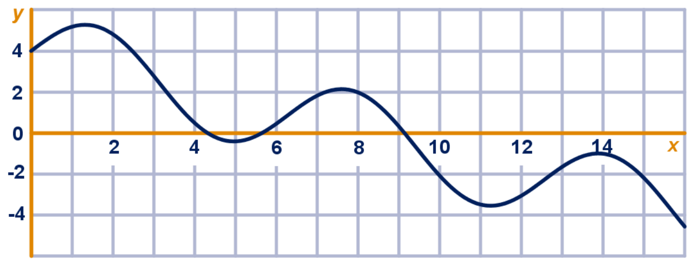
39

Een lijn plus een sinusoïde

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ en $g(x) = \sin(\pi x)$.
De **somfunctie** van f en g is de functie $s(x) = f(x) + g(x)$.

a Teken op de GR de grafieken van f, g en s. Kies een geschikt window.

Hieronder staat een dergelijke grafiek:
$s(x) = f(x) + a \cdot \sin(x)$. Hierin is f een lineaire functie.



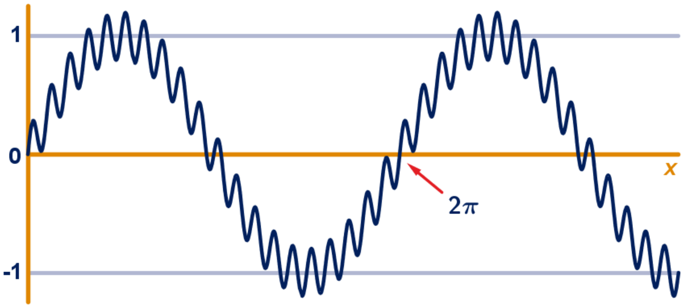
b Geef een formule van f en bepaal de waarde van a. Gebruik de figuur op het werkblad.

40

Een sinusoïde plus een sinusoïde

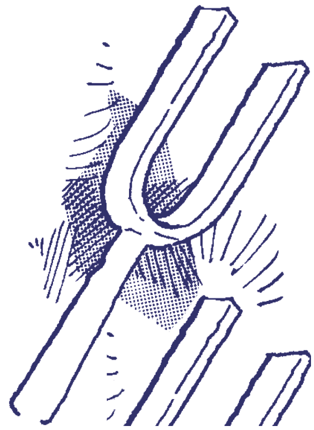
De trendlijn waaromheen de tweede beweging schommelt, kan behalve een rechte lijn of een parabool ook zelf een sinusoïde zijn.

Stel een formule op voor de onderstaande grafiek.
Controleer je antwoord op de GR.



11.4 Toepassingen

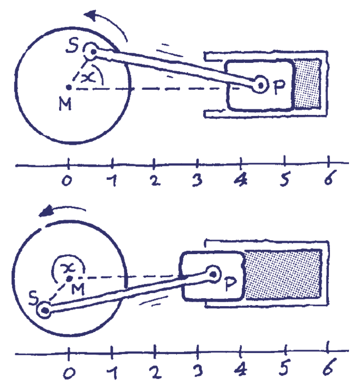
41 Twee stemvorken worden in trilling gebracht. De trillingen hebben dezelfde frequentie en amplitude, maar ze verschillen in fase: de tweede stemvork loopt 1 milliseconde achter op de eerste. De uitwijkingen worden bijvoorbeeld gegeven door:
stemvork A: $u = \sin(t)$
stemvork B: $u = \sin(t - 1)$.



a Teken in één window op de GR de grafieken van beide trillingen.
b Op welke tijdsintervallen tussen 0 en 2π versterken de trillingen elkaar? (Dat is het geval als de uitwijkingen hetzelfde teken hebben.)
c Teken op de GR de somgrafiek: $u = \sin(t) + \sin(t - 1)$.

De somgrafiek is weer een sinusoïde.
d Stel een formule op van deze sinusoïde in de gedaante $u = b \cdot \sin(c(t - d))$. Bepaal daartoe nauwkeurig met de GR de kenmerkende waarden.
Controleer je antwoord met de GR.

42 Een zuiger is via een drijfstang verbonden met een draaiende schijf. Als de schijf draait, beweegt de zuiger horizontaal heen en weer.
M is het middelpunt van de schijf; S is het scharnierende verbindingspunt van de drijfstang en de schijf. Bij punt P is de drijfstang scharnierend met de zuiger verbonden.
$MS = 1$, $PS = 4$. Hoek PMS noemen we x (in radialen).
De afstand PM noemen we A.



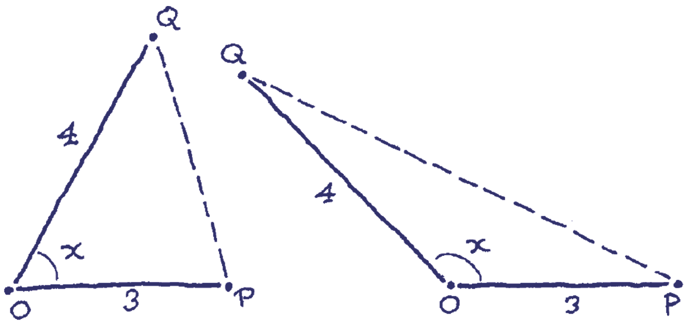
a Toon aan dat voor elke x geldt:
$A = \cos(x) + \sqrt{16 - \sin^2(x)}$.
b Teken de grafiek van A als functie van x.

In de grafiek lijkt het minimum van A gelijk aan 3 te zijn en het maximum 5.
c Leg uit dat dit klopt door de bijbehorende situaties van schijf-zuiger-drijfstang te tekenen.

Bij een rondgang zal A op twee momenten gelijk zijn aan de lengte van de drijfstang PS.
d Bepaal de grootte van de hoeken x waarbij zich dat voordoet (in twee decimalen nauwkeurig).
e Leg uit dat voor elke x geldt: $A \leq 4 + \cos(x)$.
f Onderzoek voor welke x het verschil $4{+}\cos(x){-}A$ maximaal is en bereken dat maximale verschil in twee decimalen nauwkeurig.

Naar het examen wisB, havo 1990, tweede tijdvak

43 Twee staven met lengte 4 en 4 dm kunnen draaien om een punt O. De eindpunten P en Q van de staven worden verbonden door een elastiekje.



De oppervlakte van driehoek OPQ is afhankelijk van de hoek x tussen OP en OQ.

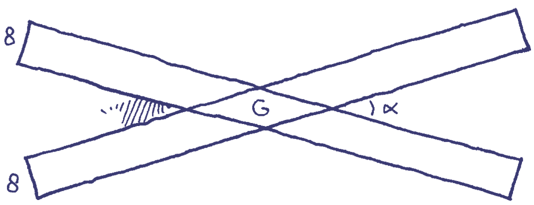
a Voor welke hoeken x is de oppervlakte van 'driehoek' OPQ gelijk aan 0?

b Toon aan dat voor elke hoek x de oppervlakte van driehoek OPQ gelijk is aan $6\sin(x)$. Onderscheid twee gevallen: x is scherp en x is stomp.

c Welke vorm heeft driehoek OPQ in het geval de oppervlakte van de driehoek maximaal is?

Hint 8.

44 Twee lange stroken papier met een breedte van 8 cm worden over elkaar gelegd. Het gebied waar de stroken elkaar overlappen noemen we G.



a Wat voor soort vierhoek is G?

De hoek die de stroken met elkaar maken noemen we α (in graden).

b Bereken exact de oppervlakte van G in het geval $\alpha = 90°$.

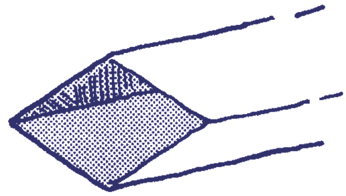
c Druk de oppervlakte van G uit in α.

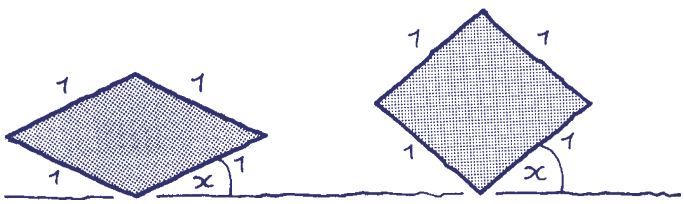
d Bereken voor welke α de oppervlakte van G gelijk is aan 1000 cm^2. Rond je antwoord af op 2 decimalen.

e Beredeneer met de formule voor de oppervlakte van G voor welke hoek α de oppervlakte van G het kleinst is.

f Welke asymptoot heeft de grafiek van de oppervlakte als functie van α?

45 Een buis heeft een loodrechte doorsnede in de vorm van een ruit met zijden van 1 dm.
De buis kan worden ingedrukt en samengetrokken, waardoor het vooraanzicht verandert. Zie de figuren hieronder.
De hoek van de onderste twee zijden met het grondvlak noemen we x (in graden).



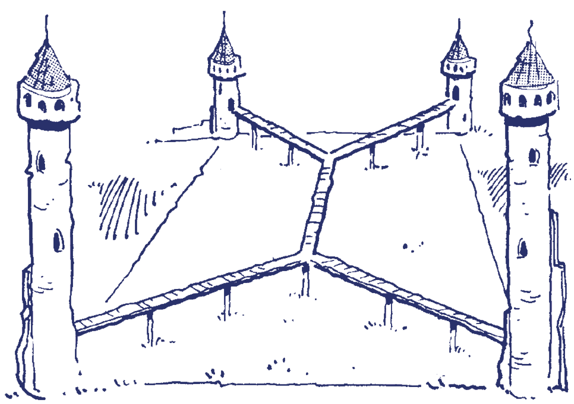


Daardoor verandert de oppervlakte van de doorsnede van de buis en daarmee de doorstromingscapaciteit.
Metingen hebben de tabel hiernaast voor de oppervlakte van de doorsnede opgeleverd.

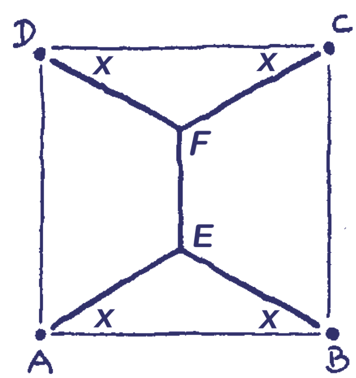
x	opp.
20°	0,64
40°	0,98
60°	0,87
80°	0,34

a Ga met een berekening na of de waarde in de tabel voor $x = 20°$ klopt.
b Druk de oppervlakte van de doorsnede uit in x.
c Bereken voor welke x de oppervlakte van de doorsnede maximaal is.

46 Op de hoekpunten van een vierkant veld van 100 bij 100 meter staan vier uitkijktorens. Via loopbruggen kan men vanuit elke toren elke andere toren bereiken.



Hiernaast staat een bovenaanzicht.
Het netwerk bestaat uit vier even lange stukken die elk een toren met een centraal pad verbinden. De hoek die deze vier stukken met een zijde van het vierkant maken, noemen we x (radialen).
De totale lengte van de loopbruggen noemen we L (meter).



a Hoe ziet het netwerk eruit als $x = \frac{1}{4}\pi$?
Hoe groot is dan de exacte totale lengte?

b Dezelfde vragen als $x = 0$.

c Bewijs dat voor elke x, met $0 \leq x \leq \frac{1}{4}\pi$ geldt:

$$L = 100 - 100 \cdot \tan(x) + \frac{200}{\cos(x)}$$

d Bereken voor welke waarde van x, afgerond op 2 decimalen, de totale lengte L minimaal is.
Wat is de minimale lengte (afgerond op hele meters)?

47 **Schijngestalten van de maan**

Van de maan is ook bij een wolkeloze hemel niet altijd een even groot gedeelte zichtbaar. Het percentage van de maan dat zichtbaar is, verloopt bij benadering periodiek. Voor het jaar 2017 is dit percentage in Nederland te benaderen met de formule:

$$P = 50 + 50\sin(0{,}212769t - 1{,}042563)$$

Hierin is P het percentage van de maan dat zichtbaar is en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari 2017 om 0:00 uur.

a Bereken de periode van P in hele minuten nauwkeurig.

De vorm van het zichtbare gedeelte van de maan wordt de **schijngestalte** van de maan genoemd. Vier speciale schijngestalten zijn **nieuwe maan**, **eerste kwartier**, **volle maan** en **laatste kwartier**. Zie de figuur, waarin ze op volgorde staan afgebeeld, elk met het bijbehorende percentage van de maan dat zichtbaar is.

nieuwe maan 0% zichtbaar — eerste kwartier 50% zichtbaar — volle maan 100% zichtbaar — laatste kwartier 50% zichtbaar — nieuwe maan 0% zichtbaar

De volgorde waarin deze schijngestalten voorkomen, is dus altijd: eerst nieuwe maan, dan eerste kwartier, dan volle maan en daarna laatste kwartier. Daarna volgt opnieuw nieuwe maan, enzovoort.

b Bereken met behulp van de formule voor P op welke datum in 2017 het voor het eerst nieuwe maan zal zijn.

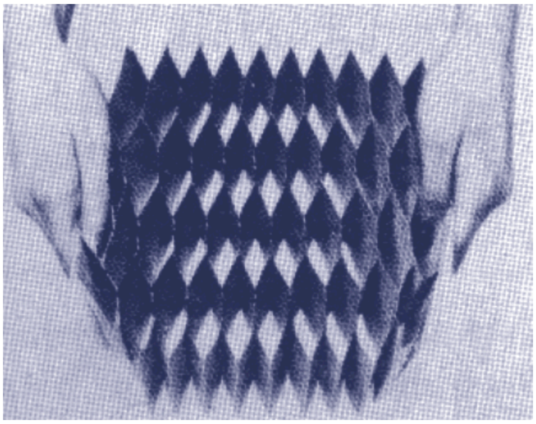
c Onderzoek met behulp van de formule voor P tussen welke twee opeenvolgende schijngestalten de maan zich op 22 februari 2017 zal bevinden.

examen wisB, havo 2016 Pilot, eerste tijdvak

48

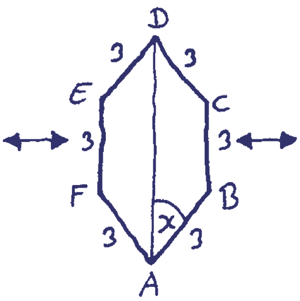
Cellenstructuur

Voor het kweken van plantjes gebruikt een tuinder een cellenstructuur zoals op de foto.



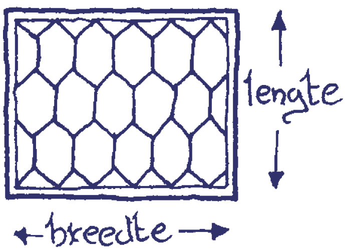
Iedere afzonderlijke cel heeft zijden van 3 cm. Door de hele structuur naar opzij uit te rekken, verandert de vorm van de cellen. De hoek DAB verandert dan, terwijl de zijden EF en CB evenwijdig blijven.

Hoek DAB noemen we x (in radialen).



a Bereken x in twee decimalen, in het geval BF 4 cm is.

Hiernaast zie je een dergelijke structuur aangebracht in een rechthoekige plantenbak. De binnenbreedte van de plantenbak is 22 cm.



b Bereken de binnenlengte van de plantenbak in mm nauwkeurig.

De oppervlakte van één cel noemen we S (in cm^2).

c Toon aan dat voor elke x geldt:
$S = 18\sin(x) + 18\sin(x)\cos(x)$.

d Bereken voor welke waarde van x de oppervlakte van de cel maximaal is.
Wat is de vorm van de cel in dat geval?

naar het examen wisB, havo 1990, eerste tijdvak

Formules van sinusoïden

De sinusoïde met vergelijking $y = a + b\sin(c(x-d))$ krijg je uit de grafiek van $y = \sin(x)$ door achtereenvolgens de volgende transformaties toe te passen:

- Horizontaal vermenigvuldigen (t.o.v. de y-as) met factor $\frac{1}{c}$
- Horizontaal d naar rechts schuiven
- Verticaal vermenigvuldigen (t.o.v. de x-as) met factor b
- Verticaal a omhoog schuiven

Er zijn meerdere volgordes van deze transformaties mogelijk, maar een vermenigvuldiging en verschuiving mogen niet zomaar omgedraaid worden. (Want anders wordt de verschuiving ook vermenigvuldigd.)

Elke sinusoïde is ook te schrijven als een cosinusfunctie: $y = a + b\cos(c(x-d))$.
Het enige verschil is het 'startpunt', in de formule weergegeven door d:

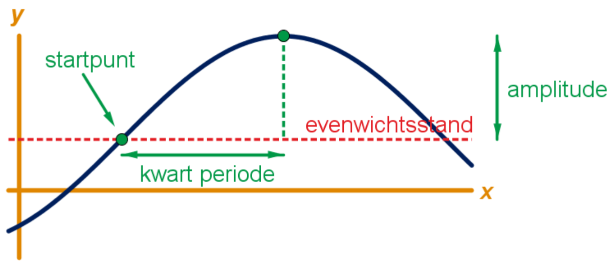
- Als startpunt voor een sinusfunctie moet een punt gekozen worden waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- Als startpunt voor een cosinusfunctie moet een punt gekozen worden waar de grafiek maximaal is.

We zijn vier formules tegengekomen om een sinusformule te veranderen in een cosinusformule, en omgekeerd:

- $\sin(t) = \cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ (denk aan 'rechthoekige driehoek')
- $\cos(t) = \sin(\frac{1}{2}\pi - t)$ (denk aan 'rechthoekige driehoek')
- $\sin(t) = \cos(t - \frac{1}{2}\pi)$ (denk aan 'verschuiving')
- $\cos(t) = \sin(t + \frac{1}{2}\pi)$ (denk aan 'verschuiving')

Toppen

Bij elke sinusoïde geldt: de top zit een kwart periode rechts van het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Zie figuur.



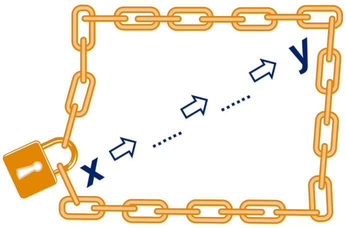
Bij de sinusfunctie $y = a + b\sin(c(x - d))$, met $b > 0$, zit een maximale waarde bij $x = d + \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{c} = d + \frac{\pi}{2c}$ en dan telkens een periode $\frac{2\pi}{c}$ naar links of rechts.
Een minimale waarde zit altijd een halve periode rechts of links van een maximale waarde.

Bij een cosinusfunctie is dat anders:
de grafiek van $y = a + b\cos(c(x - d))$, met $b > 0$, start juist in een maximale waarde, dus bij $x = d$ zit een maximum.
Ook hier geldt dat een minimale waarde altijd een halve periode rechts of links van een maximale waarde zit.

In alle gevallen (met $b > 0$) geldt:
De maximale waarde is $a + b$ en de minimale waarde is $a - b$.

Als de waarde van d negatief is, dan gaat een sinusfunctie in het startpunt juist dalend door de evenwichtsstand en begint een cosinusfunctie in een minimum.

Kettingen en samenstellingen
Met de sinus- en cosinusfunctie kun je ook kettingen en samenstellingen maken. Van zo'n samenstelling kan je allerlei eigenschappen onderzoeken, waarbij je de eigenschappen van sinus en/of cosinus kunt gebruiken.



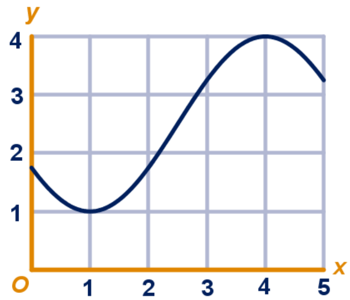
Enkele voorbeelden:
- $y = \sin(\sqrt{x})$: het domein wordt bepaald door de wortel, is dus $x \geq 0$. De grafiek is niet periodiek.
- $y = \sqrt{\sin(x)}$: de periodieke grafiek bestaat uit allemaal losse boogjes, omdat de wortel niet bestaat als $\sin(x)$ negatief is.
- $y = \sin^2(x)$: dit blijkt (verrassend) toch weer een sinusoïde te zijn.
- $y = \sin(x^2)$: de grafiek is niet meer periodiek, maar gaat steeds sneller 'heen en weer'.
- $y = \frac{1}{\sin(x)}$: de grafiek is oneindig veel verticale asymptoten, namelijk als $\sin(x) = 0$ Er is een maximum als $\sin(x)$ minimaal is. En andersom: er is een minimum als $\sin(x)$ maximaal is.
- $y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$: deze verhouding tussen sinus en cosinus is de **tangens**.
  De grafiek is periodiek en heeft oneindig veel verticale asymptoten, namelijk als $\cos(x) = 0$.

1

Grafiek van een cosinus

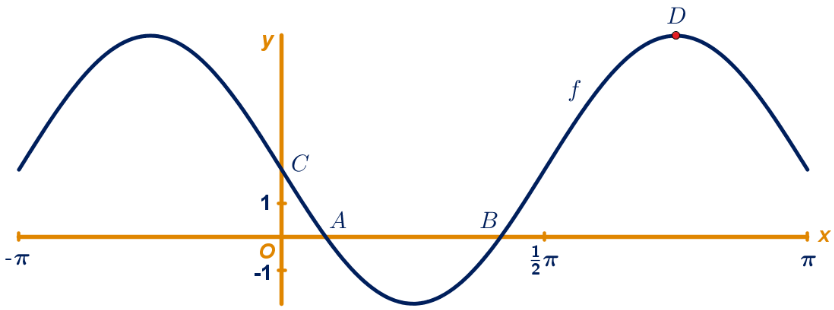
In de figuur is op het interval $[0,5]$ een sinusoïde getekend.
Deze sinusoïde is te beschrijven met een vergelijking van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$.
Bepaal geschikte waarden van a, b, c en d.
Licht je werkwijze toe.

CE havo wisB pilot, 2013 eerste tijdvak



2

Op het domein $\left[-\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$ is de functie f gegeven door:
$f(x) = 2 - 4\sin(2x)$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de punten A en B.



a Bereken exact de x-coördinaten van de punten A en B.

De grafiek van f snijdt de y-as in punt C. Punt D is een top van de grafiek. De x-coördinaat van D ligt tussen $\frac{1}{2}\pi$ en π.
Lijn l gaat door de punten C en D en snijdt de x-as in punt E.

b Bereken exact de x-coördinaat van punt E.

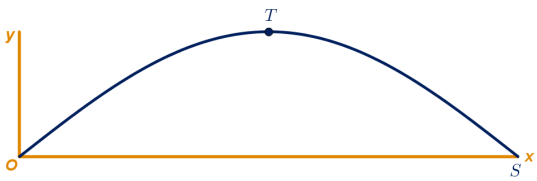
c Benader met een differentiequotiënt de helling in punt C afgerond op 2 decimalen. Gebruik $\Delta = 0{,}001$.

vragen a en b uit CE havo wisB pilot, 2012 tweede tijdvak

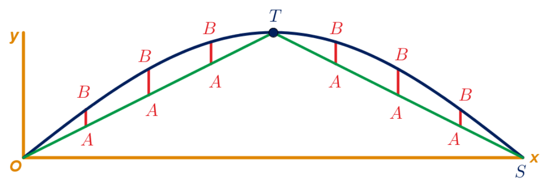
3

De grafiek van een sinus benaderen

Hieronder staat de grafiek van de functie $f(x) = \sin(\frac{1}{4}\pi x)$. Punt S is het eerste snijpunt van de grafiek van f met de x-as rechts van de oorsprong O. Punt T is de top van deze grafiek tussen O en S. Zie figuur 1.



figuur 1



figuur 2

We gaan deze grafiek benaderen door de lijnstukken OT en ST.

a Stel een vergelijking op van lijn OT. Idem voor lijn ST.

Het punt A beweegt over de lijnstukken OT en ST. Het punt B beweegt over de sinusoïde zo dat lijnstuk AB evenwijdig aan de y-as blijft. Zie figuur 2.

b Bereken bij welke waarde van x lengte van AB maximaal is.
Wat is de maximale lengte?
Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

We gaan de grafiek nu benaderen door een parabool met dezelfde top T, die ook door O en S gaat.

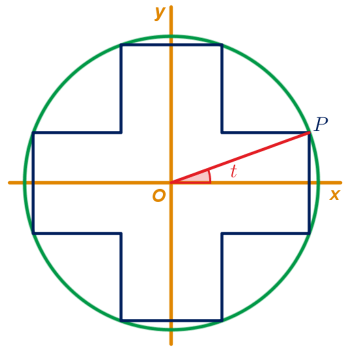
c Stel een vergelijking op van deze parabool

d Hoe groot is (afgerond op 3 decimalen) het maximale verticale verschil tussen de parabool en de sinusoïde?

4

Grieks kruis

Een Grieks kruis heeft vier even grote 'poten'.
In de eenheidscirkel is een Grieks kruis getekend, symmetrisch ten opzichte van de x-as en de y-as.
Punt P is een hoekpunt van het kruis. De hoek waarover punt P gedraaid is ten opzicht van de x-as, noemen we t (in radialen). Zie figuur.
$A(t)$ is de oppervlakte van het kruis. Hierbij nemen we voor t alleen waarden tussen 0 en $\frac{1}{4}\pi$.



Voor een zekere waarde van t is $\sin(t) = \frac{3}{5}$, met $0 \leq t \leq \frac{1}{4}\pi$.

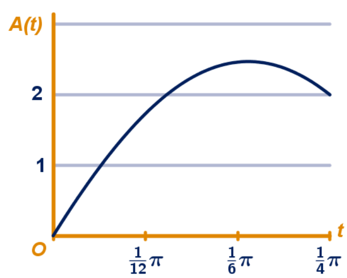
a Teken een cirkel met straal 5 cm en teken hierin nauwkeurig het Griekse kruis dat hoort bij die waarde van t. Licht je tekening toe.

b Bereken exact de oppervlakte van het Griekse kruis bij die waarde van t.

Er geldt: $A(t) = 8 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) - 4 \cdot \sin^2(t)$.

c Toon dat aan.

Hiernaast staat de grafiek van $A(t)$ getekend. De oppervlakte van het kruis lijkt maximaal te zijn bij $t = \frac{1}{6}\pi$.



d Benader met de GR de waarde van $A'(\frac{1}{6}\pi)$.
Leg hiermee uit of bij $t = \frac{1}{6}\pi$ de oppervlakte maximaal is.
Zo nee: is de oppervlakte maximaal bij een waarde van t groter of kleiner dan $\frac{1}{6}\pi$?

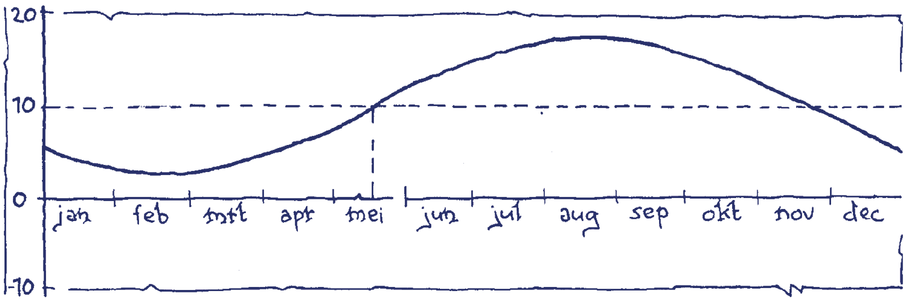
e Bereken de maximale oppervlakte van het Griekse kruis.

5

De temperatuur op een zekere plaats op aarde wordt bepaald door twee dingen:

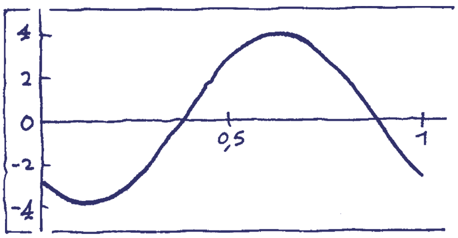
- de jaargolf: die beschrijft de gemiddelde temperatuur van dag tot dag,
- het dag-nacht-ritme: dat beschrijft de gemiddelde temperatuur van uur tot uur.

Beide zijn berekend als gemiddelde van veel metingen. Hieronder staat de jaargolf.



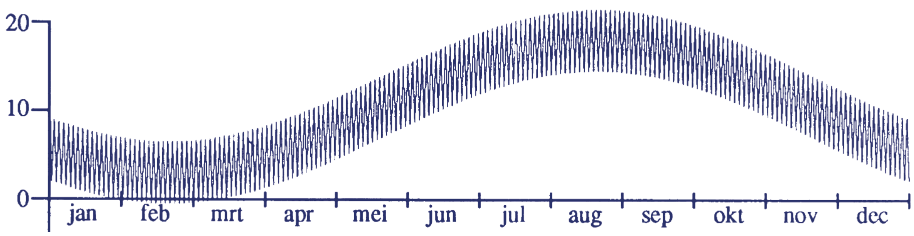
a Stel een formule op voor deze grafiek; t is de tijd van het jaar in dagen, T is de gemiddelde dagtemperatuur in graden Celsius.

Vervolgens kijken we naar de daggolf.



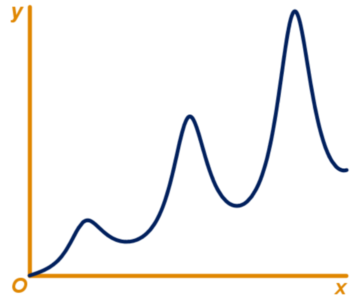
b Stel een formule op voor de grafiek; t loopt van 0 tot 1 (dag), T is temperatuur in graden Celsius. Hierbij is als gemiddelde temperatuur $0°$C genomen en de hoogste temperatuur wordt bereikt om 15.00 uur (dat is op $\frac{15}{24}$ dag).

Als we deze twee golven combineren (optellen), krijgen we het volgende plaatje:



c Hoeveel golfjes telt de grafiek?

d Geef een formule voor deze grafiek.



6 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x}{2 + \cos(x)}$. Hiernaast staat de grafiek getekend voor $x \geq 0$.

a Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de lijn $y = \frac{1}{2}x$ voor $0 \leq x \leq 4\pi$.

b Doe hetzelfde voor de snijpunten met de lijn $y = \frac{2}{3}x$.

De toppen van de grafiek van f waarin een (lokaal) maximum zit, liggen steeds hoger. Ze liggen zelfs op een rechte lijn.

c Leg uit dat deze toppen zitten bij waarden van x waarvoor $\cos(x) = -1$.

d Bereken een vergelijking van de lijn waarop de toppen met een maximum liggen.

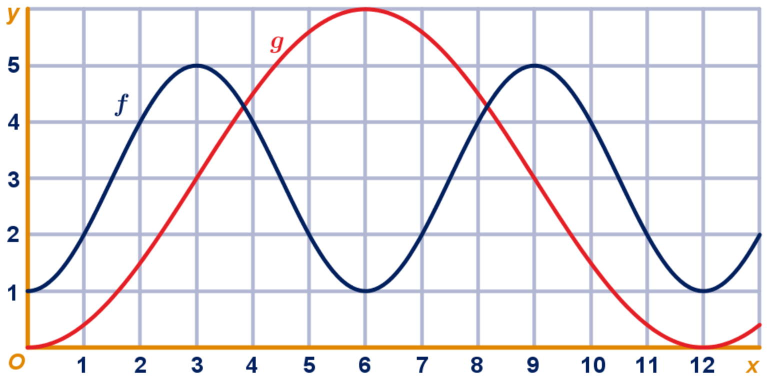
e Bereken ook de vergelijking van de lijn waarop de toppen liggen waarin f een minimum heeft.

Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{x}{2 + a \cdot \cos(x)}$$

f Voor welke waarde van a heeft de grafiek van f_a asymptoten? Licht toe.

7 Hieronder staan de grafieken getekend van twee sinusoïden.
Er geldt:
$f(x) = a + b \cdot \cos(c(x - d))$ en $g(x) = p + q \cdot \sin(r(x - s))$.



a Bereken mogelijke waarden van a, b, c, d, p, q, r en s.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de twee snijpunten in de figuur.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de grootste waarde van de **verschilfunctie** $v(x) = f(x) - g(x)$.

d Door welke transformaties, en in welke volgorde, gaat de grafiek van de functie f over in de grafiek van de functie g?

Stand van zaken

1

a Blauwe grafiek: evenwichtswaarde 2, amplitude 3, periode 8;
Rode grafiek: evenwichtswaarde 2, amplitude 4, periode 6

b Blauw: $y = 2 + 3\sin(\frac{2\pi}{8}(x - 0)) = 2 + 3\sin(\frac{\pi}{4}x)$ ('startpunt' bij $x = 0$)
Rood: $y = 1 + 4\sin(\frac{2\pi}{6}(x - 5)) = 1 + 4\sin(\frac{\pi}{3}(x - 5))$ ('startpunt' bij $x = 5$)
Ook goed: $y = 1 - 4\sin(\frac{\pi}{3}(x - 2))$

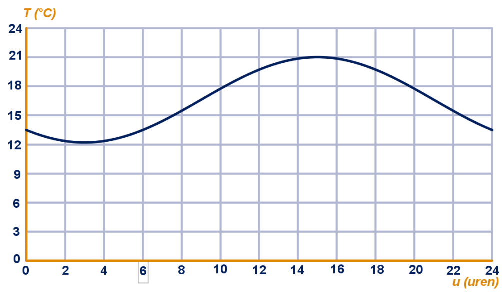
c Blauw: $y = 2 + 3\cos(\frac{2\pi}{8}(x - 2)) = 2 + 3\cos(\frac{\pi}{4}(x - 2))$ ('startpunt' bij $x = 2$)
Rood: $y = 1 + 4\cos(\frac{2\pi}{6}(x - \frac{1}{2})) = 1 + 4\cos(\frac{\pi}{3}(x - \frac{1}{2}))$ ('startpunt' bij $x = \frac{1}{2}$)

d
$$y = \sin(x)$$
Vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor 3
$$y = 3\sin(x)$$
2 omhoog schuiven
$$y = 2 + 3\sin(x)$$
Vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor $\frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$
$$y = 2 + 3\sin(\tfrac{\pi}{4}x)$$

e
$$y = \sin(x)$$
Vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor 4
$$y = 4\sin(x)$$
1 omhoog schuiven
$$y = 1 + 4\sin(x)$$
Vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor $\frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$
$$y = 1 + 4\sin(\tfrac{\pi}{3}x)$$
5 naar rechts schuiven
$$y = 1 + 4\sin(\tfrac{\pi}{3}(x - 5))$$

2

a Zie figuur.



b $T = 16{,}6 + 4{,}4\sin(\frac{\pi}{12}(u - 9))$ (meerdere variaties hierop mogelijk)

c $7{,}6 + 4{,}3\sin(\frac{\pi}{12}(u - 10)) = 10$ oplossen met de GR geeft
$u \approx 12{,}26$ of $u \approx 19{,}74$
$(19{,}74 - 12{,}26) \cdot 60 \approx 449$ minuten

d De stijging is het sterkst als de sinusoïde door de evenwichtsstand gaat; dit gebeurt om 10.00 uur. De temperatuur is om 10.00 uur $7{,}60$ °C en om 10.01 uur $7{,}62$ °C, dus de gevraagde snelheid is $0{,}02$ °C per minuut.
Of: op de GR de grafiek tekenen en de helling bepalen bij $u = 10$. Dat geeft helling $1{,}126$ °C per uur, dus dat is $\frac{1{,}126}{60} \approx 0{,}02$ °C per minuut.
Nog anders: Met de GR een grafiek van de hellingfunctie maken en hiervan het maximum bepalen: $1{,}126$ °C per uur, dus dat is $\frac{1{,}126}{60} \approx 0{,}02$ °C per minuut.

3

a $\sin(2x + 2) = \text{-}0{,}625 \rightarrow 2x + 2 = \text{-}0{,}675...$ of $2x + 2 = \pi - \text{-}0{,}675... = 3{,}816...$
$\rightarrow 2x = \text{-}2{,}675...$ of $2x = 1{,}816... \rightarrow x = \text{-}1{,}337...$ of $x = 0{,}908...$
De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$, dus $x = 0{,}91$, $x = 1{,}80$, $x = 4{,}05$ of $x = 4{,}95$.

b $\cos(\frac{1}{2}\pi(x - 1)) = \text{-}0{,}4 \rightarrow \frac{1}{2}\pi(x - 1) \approx 1{,}982...$ of $\frac{1}{2}\pi(x - 1) \approx 2\pi - 1{,}982... \approx 4{,}300... \rightarrow x - 1 = 1{,}261...$ of $x - 1 = 2{,}738... \rightarrow x \approx 2{,}26$ of $x \approx 3{,}74$
De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$, dus dit zijn de enige twee oplossingen.

c $\sin(\pi(x - 1)) = 0{,}4 \rightarrow \pi(x - 1) \approx 0{,}4115...$ of $\pi(x - 1) \approx \pi - 0{,}4115... \approx 2{,}730...$
$\rightarrow x - 1 = 0{,}130...$ of $x - 1 = 0{,}869... \rightarrow x \approx 1{,}130...$ of $x \approx 1{,}869...$
De periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, dus $x = 1{,}130... + k \cdot 2$ of $x = 1{,}869... + k \cdot 2$.

d $\cos(\frac{\pi}{12}(x - 10)) \approx 0{,}558... \rightarrow \frac{\pi}{12}(x - 10) \approx 0{,}9786...$ of $\frac{\pi}{12}(x - 10) \approx 5{,}3045...$
$\rightarrow x - 10 \approx 3{,}738...$ of $x - 10 \approx 20{,}261... \rightarrow x \approx 13{,}738...$ of $x \approx 30{,}261...$
De periode is $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$ dus $x \approx 13{,}738... + k \cdot 24$ of $x \approx 30{,}261... + k \cdot 24$.

e Herleiden tot $\sin(2x) = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$\rightarrow x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$
Tussen 0 en 10: $\frac{1}{12}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $1\frac{1}{12}\pi$, $1\frac{5}{12}\pi$, $2\frac{1}{12}\pi$, $2\frac{5}{12}\pi$

f Herleiden tot $\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \text{-}\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\rightarrow x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{3}\pi = 2\pi - \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$\rightarrow x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
Tussen 0 en 10: $1\frac{1}{12}\pi$, $1\frac{7}{12}\pi$, $3\frac{1}{12}\pi$, $3\frac{7}{12}\pi$

g -

4

a De periode is $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ maanden

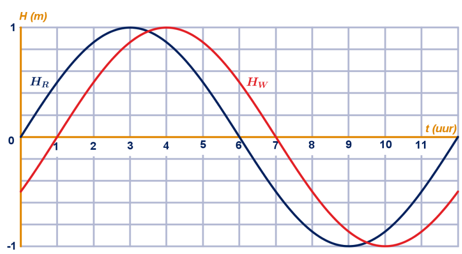
b De vertraging is één maand; de grafiek van H_W is de grafiek van H_R één (maand) naar rechts geschoven.

c Zie figuur.

d $9 < t < 10$

e H_R maximaal bij $t = 3$;
H_W maximaal bij $t = 4$

f Het snijpunt zit midden tussen de toppen, vanwege de symmetrie van de grafieken, dus bij $t = 3\frac{1}{2}$; maar ook een halve periode verder, dus bij $t = 9\frac{1}{2}$.



5

a f: amplitude = 2 en periode = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
g: amplitude = 1 en periode = $\frac{2\pi}{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$

b $f(\frac{1}{3}\pi) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ en $g(\frac{1}{3}\pi) = \sin(1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$, dus $(\frac{1}{3}\pi, 1)$ ligt op beide grafieken;
$S_2 = (1\frac{2}{3}\pi, 1)$, $S_4 = (2\frac{1}{3}\pi, \text{-}1)$ en $S_{11} = (7\frac{2}{3}\pi, \text{-}1)$

c f: door horizontale vermenigvuldiging met factor 2 (t.o.v. de verticale as) en verticale vermenigvuldiging met factor 2 (t.o.v. de t-as);
g: door horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{2}{3}$ (t.o.v. de verticale as).

d Bekijk beide hellingen ten opzichte van de helling van $\sin(t)$ in $(0,0)$:
voor f wordt deze helling vermenigvuldigd met 2 (door de verticale vermenigvuldiging) en vermenigvuldigd met factor $\frac{1}{2}$ (door de horizontale vermenigvuldiging), dus in totaal keer $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$;
voor g wordt deze helling vermenigvuldigd met $1\frac{1}{2}$ (door de horizontale vermenigvuldiging), dus is de helling van g $1\frac{1}{2}$ keer zo groot als die van f.

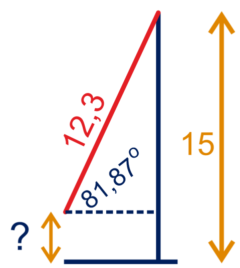
e De grafiek van g moet t.o.v. de t-as met factor $\frac{2}{3}$ worden vermenigvuldigd, want $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = 1$ en dan is de helling in $(0,0)$ gelijk aan die van f.
Dus de amplitude van g moet $\frac{2}{3}$ worden.

6

a Zie figuur.
De hellingshoek is $\tan^{-1}(7) \approx 81{,}87^\circ$ en de lengte van de wieken zijn $12{,}3$ m, dus $15 - 12{,}3 \cdot \sin(81{,}87^\circ) \approx 2{,}82$ m.

b $2\pi \cdot 12{,}3 \cdot 6 \approx 463{,}7$ m/min $\approx 27{,}8$ km/u

c $a = 15{,}00$, $b \approx 12{,}3 \cdot \sin(81{,}87^\circ) \approx 12{,}18$, $c = \frac{2\pi}{10} \approx 0{,}63$



7

a Om 8 uur is de helling maximaal (ter hoogte van de evenwichtswaarde).
Teken de raaklijn in het betreffende punt; die heeft richtingscoëfficiënt 4 °C/u.

b Het minimum = 5, maximum = 35, dus evenwichtswaarde = $(5 + 35) \cdot \frac{1}{2} = 20$ en de amplitude = $35 - 20 = 15$; de periode = 24
Dus: $T = 20 + 15\sin(\frac{2\pi}{24}(t - 8)) = 20 + 15\sin(\frac{\pi}{12}(t - 8))$

c $20 + 15\sin(\frac{\pi}{12}(t - 8)) = 30 \to \sin(\frac{\pi}{12}(t - 8)) = \frac{2}{3}$
$\to \frac{\pi}{12}(t - 8) \approx 0{,}729... + k \cdot 2\pi$ of $\frac{\pi}{12}(t - 8) \approx \pi - 0{,}729... + k \cdot 2\pi$
$\to t \approx 10{,}797... + k \cdot 24$ of $t \approx 17{,}212... + k \cdot 24$
Dat is $\frac{17{,}2126... - 10{,}797...}{24} \cdot 100\% \approx 27\%$ van de dag.

Bijzondere eigenschappen

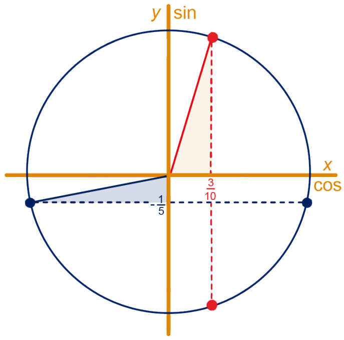
8

a Met Pythagoras de afstand tot $(0,0)$ berekenen: $\sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} = \sqrt{0{,}36 + 0{,}64} = \sqrt{1} = 1$, dus ligt het punt op de eenheidscirkel.
$\cos(t) = 0{,}6 \to t \approx 0{,}93$
$t > 10$: $t \approx 11{,}64$

b $\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \to t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ (k geheel) $\to k > \dfrac{100 - \frac{1}{4}\pi}{\frac{1}{2}\pi} \approx 63{,}2$, dus
$t = \frac{1}{4}\pi + 64 \cdot \frac{1}{2}\pi = 32\frac{1}{4}\pi$

c Zie figuur.
De afstand tot de oorsprong moet 1 zijn:
$(x_P)^2 + (-\frac{1}{5})^2 = 1 \rightarrow (x_P)^2 = \frac{24}{25}$,
dus $x_P = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2}{5}\sqrt{6}$ of $x_P = \frac{2}{5}\sqrt{6}$

d Zie figuur bij onderdeel **c**.
$(y_P)^2 + (\frac{3}{10})^2 = 1 \rightarrow (y_P)^2 = \frac{91}{100}$,
dus $y_P = -\sqrt{\frac{91}{100}} = -\frac{1}{10}\sqrt{91}$ of $y_P = \frac{1}{10}\sqrt{91}$



9

a Dat zijn de twee uiterste punten links en rechts van de eenheidscirkel: $(1,0)$ en $(-1,0)$.
Daar geldt: $\cos(t) = 1$ of $\cos(t) = -1$

b Dat zijn de twee uiterste punten boven en onder van de eenheidscirkel: $(0,1)$ en $(0,-1)$.
Daar geldt: $\sin(t) = 1$ of $\sin(t) = -1$

c Afstand tot de oorsprong is $\sqrt{0{,}9^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{0{,}9} \neq 1$.
Of: $\sin(t) = 0{,}9 \rightarrow t \approx 1{,}120$; $\cos(t) = 0{,}3 \rightarrow t \approx 1{,}266$
Dit geeft twee verschillende waarden voor t.

d $\cos(t) = 0{,}436$ (of exact: $\sqrt{\frac{19}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{19}$)

10

a $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ en $\cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; klopt.

b $(0{,}84...)^2 + (0{,}54...)^2 = 1$

11

a $\cos(t) = 0{,}8$

b $\cos(t) = -0{,}8$

c $\cos(t) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

d $\cos(t) = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$

12

$\sin(t) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$, dus $\sin(t) = -\frac{2}{3}$ of $\sin(t) = \frac{2}{3}$

13

Horizontale lijn $y = 1$.

14

a Door verticale vermenigvuldiging met factor p (t.o.v. de x-as).

b Door horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{p}$ (t.o.v. de y-as).

c Door verticale verschuiving p eenheden naar boven.

d Door horizontale verschuiving p eenheden naar links.

15

a Horizontale verschuiving $\frac{1}{2}\pi$ naar links of $1\frac{1}{2}\pi$ naar rechts;
$\cos(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x - 1\frac{1}{2}\pi)$

b Horizontale verschuiving $1\frac{1}{2}\pi$ naar links of $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts;
$\sin(x) = \cos(x + 1\frac{1}{2}\pi) = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$

16

a $\beta = 90° - \alpha$

b $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$ en $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$

c $\sin(\beta) = \frac{b}{c} = \cos(\alpha)$ en $\cos(\beta) = \frac{a}{c} = \sin(\alpha)$

d Klopt.

e De grafiek van y_1 komt overeen met de grafiek van y_2; evenzo van y_3 en y_4. Dus ze kloppen.

17

a Bijvoorbeeld: $y = 1 + \sin(1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x)$ of $y = 1 + \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\pi)$

b Bijvoorbeeld: $y = 3 - \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$ of $y = 3 - \cos(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}x)$

c Bijvoorbeeld: $y = 2 - 4\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{3}(x - 1)) = 2 - 4\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{3}x + \frac{1}{3}\pi) = 2 - 4\sin(-\frac{\pi}{3}x + \frac{5}{6}\pi) = 2 - 4\sin(-\frac{\pi}{3}(x - \frac{5}{2}))$

d Bijvoorbeeld: $y = 1 + 3\cos(\frac{1}{2}\pi - \pi(x - \frac{1}{2})) = 1 + 3\cos(\frac{1}{2}\pi - \pi x + \frac{1}{2}\pi) = 1 + 3\cos(-\pi x + \pi) = 1 + 3\cos(-\pi(x - 1))$

18

a $\cos(-x) = \cos(x)$

b $\sin(-x) = -\sin(x)$

c $y = \cos(x) + \cos(-x) = \cos(x) + \cos(x) = 2\cos(x)$, dus het is de standaard cosinusgrafiek vermenigvuldigd t.o.v. de x-as met factor 2.

d $y = \sin(x) + \sin(-x) = \sin(x) - \sin(x) = 0$, dus de grafiek is de lijn $y = 0$.

19

a De factor is -1; $\sin(x + \pi) = -1 \cdot \sin(x) = -\sin(x)$

b $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$

c $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$; $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$

d De periode is $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$; je moet dan een halve periode naar links of rechts verschuiven, dus 3 naar links of rechts schuiven.

20

a De evenwichtswaarde is $y = 1$ en de amplitude is 3;
De periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ en het startpunt is bij $x = \frac{1}{2}$.

b De eerste top zit een kwart periode vanaf het startpunt, dus bij $x = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$; coördinaten $(1{,}4)$;
De volgende zit een periode verder, dus bij $x = 3$; coördinaten $(3{,}4)$

c $(2, -2)$ en $(4, -2)$

d Evenwichtswaarde $y = 2$; amplitude = 1; periode = 4π; startpunt bij $x = \frac{1}{3}\pi$, maar het is een $-\cos$, dus begint in een laagste punt;
Toppen: $(2\frac{1}{3}\pi{,}3)$, $(6\frac{1}{3}\pi{,}3)$; dalen: $(\frac{1}{3}\pi{,}1)$, $(4\frac{1}{3}\pi{,}1)$

21

a Maxima: $(\frac{1}{3}\pi{,}2)$ en $(4\frac{1}{3}\pi{,}2)$; minima: $(2\frac{1}{3}\pi{,}0)$ en $(6\frac{1}{3}\pi{,}0)$

b Maxima: $(\frac{1}{12}\pi{,}7)$ en $(1\frac{1}{12}\pi{,}7)$; minima: $(\frac{7}{12}\pi, -1)$ en $(1\frac{7}{12}\pi, -1)$

c Maxima: $(4{,}6)$ en $(10{,}6)$; minima: $(1{,}-2)$ en $(7{,}-2)$

d Maxima: $(2{,}14)$ en $(4{,}14)$; minima: $(1{,}8)$ en $(3{,}8)$

Variaties van en met sinusoïden

22

a Domein: $x \geq 0$

b De eerste top van $y = \sin(x)$ is bij $x = \frac{1}{2}\pi$, dus geldt nu $\sqrt{x} = \frac{1}{2}\pi$
$\rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 = \frac{1}{4}\pi^2$.

c $\sqrt{x} = 1\frac{1}{2}\pi \rightarrow x = \left(1\frac{1}{2}\pi\right)^2 = 2\frac{1}{4}\pi^2$

d $\sin(\sqrt{x}) = 0 \rightarrow \sqrt{x} = k \cdot \pi \rightarrow x = k^2 \cdot \pi^2$;
Er moet gelden: $(k+1)^2 \cdot \pi^2 - k^2 \cdot \pi^2 > 100 \rightarrow k > \frac{1}{2}\left(\frac{100}{\pi^2} - 1\right) \approx 4{,}566$, dus
$k = 5$. (Controle: $x_6 - x_5 = 36\pi^2 - 25\pi^2 \approx 108{,}6$, dus klopt.)

23

a De wortel bestaat niet als de uitkomst van de sinus negatief is.
Domein: $[0 + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi]$, met k geheel.

b Wat onder de wortel staat moet maximaal zijn, dus als $\sin(x) = 1 \rightarrow$ maximale waarde is $\sqrt{1} = 1$.

c $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

d $\sqrt{\sin(x)} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \rightarrow \sin(x) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$,
dus $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = 2\frac{1}{6}\pi$, $x = 2\frac{5}{6}\pi$, $x = 4\frac{1}{6}\pi$, $x = 4\frac{5}{6}\pi$ en $x = 6\frac{1}{6}\pi$.

24

a De wortel bestaat niet als het deel onder de wortel negatief is.
$\cos(\frac{1}{2}\pi x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \rightarrow x = 1 + k \cdot 2$, dus de grafiek is getekend op het interval $[-1, 1]$.

b Voor de halve cirkel geldt $x^2 + y^2 = 1$, dus $y = \sqrt{1 - x^2}$;
Op de GR: $y_1 = \sqrt{\cos(\frac{1}{2}\pi x)}$ en $y_2 = \sqrt{1 - x^2}$ invoeren en dan het maximum bepalen van $y_3 = y_2 - y_1$: maximaal verschil is $0{,}044$.

25

a De maximale waarde is 1, als $\sin(x) = -1$ of $\sin(x) = 1$; bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

b De minimale waarde is 0, als $\sin(x) = 0$; bij $x = k \cdot \pi$.

c $\sin^2(x) = \frac{1}{4} \rightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2}$ of $\sin(x) = \frac{1}{2}$
$\rightarrow x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$

d Bijvoorbeeld: $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{4}\pi))$

e Bijvoorbeeld: $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{3}{4}\pi))$ of $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(2(x + \frac{1}{4}\pi))$

f $\cos^2(x) = \frac{1}{2} \rightarrow \cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\rightarrow x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 1\frac{1}{4}\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi$

26

Minimale waarde $y = \sqrt{3 - 2} = 1$ als $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, dus $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{1}{4}\pi$
Maximale waarde $y = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}$ als $2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, dus $x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = 1\frac{3}{4}\pi$

27

Het interval $[0, 20]$ wordt door het kwadrateren het interval $[0, 400]$, dus gevraagd is het aantal nulpunten van $y = \sin(x)$ op het interval $[0, 400]$: per periode van 2π zitten twee nulpunten (en eentje extra); $\frac{400}{2\pi} \approx 63{,}7$, dus 128 nulpunten.

28

a Er is een verticale asymptoot als de noemer nul is, dus als $\sin(x) = 0$
$\rightarrow x = k \cdot \pi$ (k geheel)

b Minimum: als $\sin(x) = 1$, dus $(\frac{1}{2}\pi, 1)$;
Maximum: als $\sin(x) = -1$, dus $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$

c $y = -\frac{2}{\pi}(x - \frac{1}{2}\pi) + 1 = -\frac{2}{\pi}x + 2$, dus de coördinaten zijn $(0,2)$

d $\frac{1}{\sin(x)} = -2 \rightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$, dus $AB = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$

e Verschuiving $\frac{1}{2}\pi$ naar links; asymptoten: $y = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (k geheel).

f De grafiek van $y = \frac{1}{\sin(x)}$ wordt eerst verticaal met factor 4 vermenivuldigd t.o.v. de x-as en daarna 1 omhoog geschoven, dus minimum $(\frac{1}{2}\pi, 5)$ en maximum $(1\frac{1}{2}\pi, -3)$

29

a Toppen van $y = 3 + 2\cos(x)$ zijn $(0,5)$ en $(\pi,1)$;
Dus: top (minimum) in $(0,2)$ en $(2\pi,2)$; top (maximum) in $(\pi,10)$

b $\frac{10}{3-a} = 20 \rightarrow a = 2\frac{1}{2}$;
De minimale waarde is dan $\frac{10}{3 + 2\frac{1}{2}} = \frac{20}{11} = 1\frac{9}{11}$

c Nee, want de uitkomst van de breuk kan nooit nul zijn.

d Voor $a \geq 3$, want dan wordt de noemer nul voor waarden van x.

30

a -

b Voor punten op de eenheidscirkel geldt $y = \sin(t)$ en $x = \cos(t)$,
dus $\sin(t) = 2 \cdot \cos(t)$ wordt dan $y = 2x$;
$x^2 + (2x)^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{5} \rightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$ of $x = \frac{1}{5}\sqrt{5}$;
coördinaten: $(\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$ en $(-\frac{1}{5}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5})$

c $\cos(t) = \frac{1}{5}\sqrt{5} \rightarrow t \approx 1{,}107$;
$\cos(t) = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \rightarrow t \approx 2{,}034...$, maar deze voldoet niet ($\sin(t)$ klopt niet), dus $t = 2\pi - 2{,}034... \approx 4{,}249$

d Eenheidscirkel snijden met de lijn $y = \frac{1}{2}x$ geeft $x^2 = \frac{4}{5}$, dus $x = \pm\frac{2}{5}\sqrt{5}$;
coördinaten $(\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5})$ en $(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5})$; $t \approx 0{,}464$ en $t \approx 3{,}605$

31

a noemer nul: $\cos(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (k geheel)

b $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \rightarrow \sin(x) = 0 \rightarrow x = k \cdot \pi$ (k geheel)

c Dan moet op de eenheidscirkel de x- en y-coördinaat gelijk zijn, dus snijpunt van de eenheidscirkel met de lijn $y = x$.
$x^2 + x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$, dus $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$;
$\cos(x) = \sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi$;
$\cos(x) = \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $x = 1\frac{1}{4}\pi$

d $\cos(x) = -\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $x = 1\frac{3}{4}\pi$;
$\cos(x) = -\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $x = \frac{3}{4}\pi$

32

a $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ en $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

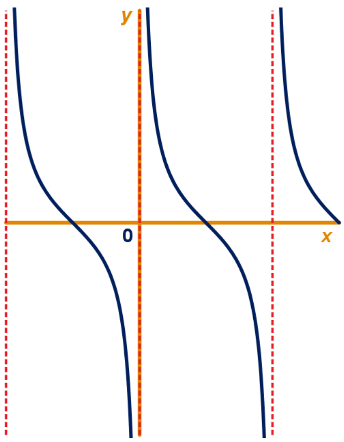
b $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan(\alpha)$

c Zie tabel.

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos(α)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
tan(α)	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	geen	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

33

Zie figuur.
Horizontale vermenigvuldiging (t.o.v. de y-as) met factor -1 en dan $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts schuiven.



34

a $f(0) = 1$, dus de vergelijking $\frac{2 - \sin(\pi x)}{2 + \sin(\pi x)} = 1$ moet worden opgelost
$\rightarrow 2 - \sin(\pi x) = 2 + \sin(\pi x) \rightarrow \sin(\pi x) = 0 \rightarrow$
$x_A = 0$, $x_B = 1$ en $x_C = 2$. Dus $AB = BC = 1$.

b $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ en $Q(1\frac{1}{2}, 3)$, dus $PQ = \sqrt{1^2 + (2\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{73}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{73}$

c $\frac{2 - \sin(\pi x)}{2 + \sin(\pi x)} = \frac{5}{3} \rightarrow 10+5\sin(\pi x) = 6-3\sin(\pi x)$
$\rightarrow \sin(\pi x) = -\frac{1}{2} \rightarrow \pi x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of
$\pi x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \rightarrow x = -\frac{1}{6} + k \cdot 2$ of $x = \frac{7}{6} + k \cdot 2$;
dus $x_R = -\frac{1}{6}$, $x_S = \frac{7}{6}$ en $x_T = \frac{11}{6}$; $RS : ST = \frac{8}{6} : \frac{4}{6} = 2 : 1$

35

a $x \cdot \sin(x) = x \rightarrow x \cdot (\sin(x) - 1) = 0 \rightarrow$ ($x = 0$ vervalt of) $\sin(x) = 1$
Op interval $[0,6\pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 2\frac{1}{2}\pi$ en $x = 4\frac{1}{2}\pi$
De coördinaten zijn $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(2\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi)$ en $(4\frac{1}{2}\pi, 4\frac{1}{2}\pi)$

b Het differentiequotiënt is $\frac{f(2\pi + 0{,}001) - f(2\pi)}{0{,}001} = \frac{0{,}006284... - 0}{0{,}001} \approx 6{,}28$

36

a $(\sin(x) \cdot \cos(x))^2 = 0 \rightarrow \sin(x) \cdot \cos(x) = 0 \rightarrow \sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 0$;
Dit geeft de oplossingen $x = 0$, $x = \pi$ en $x = \frac{1}{2}\pi$

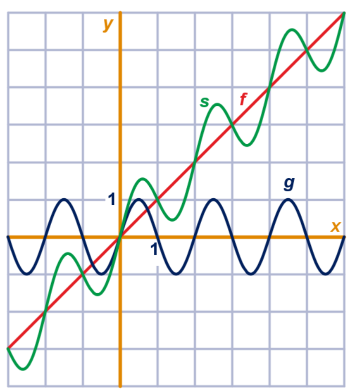
b Met de GR een minimum en maximum bepalen: $(0{,}0)$ en $(0{,}785398...; 0{,}25)$;
De evenwichtswaarde $a = \frac{1}{2}(0 + 0{,}25) = 0{,}125$ en de amplitude $b = 0{,}125$;
De periode is twee keer het verschil van de x-waarden van de twee toppen, dus periode $\approx 1{,}570796...$; $c = \frac{2\pi}{1{,}570796...} \approx 4$
Of exacte aanpak:
De top ligt midden tussen de nulpunten $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}\pi$;

$f(\frac{1}{4}\pi) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, dus $a = \frac{1}{8}$ en $b = \frac{1}{8}$;
Uit de nulpunten volgt dat de periode $\frac{1}{2}\pi$ is, dus $c = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$

37
- **a** $x + \cos(x) = x \rightarrow \cos(x) = 0$, dus $x = -\frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$
- **b** $h(0) = 0{,}9995$ en $f(0) = 1$, dus raaklijn $y = 0{,}9995x + 1$
- **c** Er moet gelden $h(x) = \frac{1}{2}$; met de GR geeft dit $x \approx 0{,}523...$ en $x \approx 2{,}617...$;
  $f(0{,}523...) \approx 1{,}389...$, dus $c = 1{,}389... - \frac{1}{2} \cdot 0{,}523... \approx 1{,}13$;
  $f(2{,}617...) \approx 1{,}7517...$, dus $c = 1{,}7517... - \frac{1}{2} \cdot 2{,}617... \approx 0{,}44$

38
- **a** (begin) mei (zie 'Annual Cycle' in kader)
- **b** 3 tot 3,5 ppmv (lijkt de laatste jaren iets groter te zijn worden)
- **c** Twee waarden aflezen: in 1970 ($t = 12$) geldt $C = 325$ en in 2008 ($t = 50$) geldt $C = 385$;
  invullen geeft twee vergelijkingen $325 = 144a + 12b + 315$ en $385 = 2500a + 50b + 315$
  $\rightarrow a = 0{,}015$ en $b = 0{,}654$
  (andere afgelezen waarden geven andere waarden)

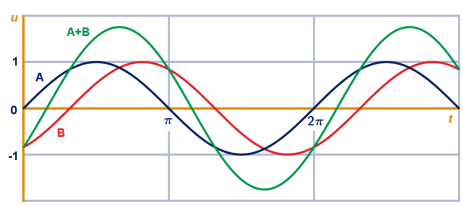
39
- **a** Zie figuur.
- **b** $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$; $a = 2$



40
De trendlijn is de standaard sinusoïde: $y = \sin(x)$;
De fluctuatie heeft periode $\frac{2\pi}{20}$ en amplitude van (ongeveer) $0{,}2$: $y = 0{,}2\sin(20x)$
Dus: $y = \sin(x) + 0{,}2\sin(20x)$

Toepassingen

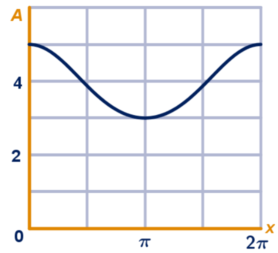
41
- **a** Zie figuur.
- **b** $1 < t < \pi$ en $\pi + 1 < t < 2\pi$
- **c** Zie figuur bij onderdeel **a**.
- **d** $u = 1{,}76 \cdot \sin(t - 0{,}50)$



42
- **a** Noem het punt op de lijn PM dat recht onder of boven S ligt T.
  Dan: $TM = \cos(x)$ (dit klopt ook voor $\frac{1}{2}\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$, want dan is $\cos(x) < 0$);

$ST = \sin(x)$ dus met Pythagoras: $PT = \sqrt{PS^2 - ST^2} = \sqrt{16 - \sin^2(x)}$;
Dus: $PM = TM + PT = \cos(x) + \sqrt{16 - \sin^2(x)}$

b Zie figuur.



c PM is minimaal als $x = 0$; dan is PM inderdaad 3.
PM is maximaal als $x = \pi$; dan is PM inderdaad 5.

d $\cos(x) + \sqrt{16 - \sin^2(x)} = 4$ met de GR oplossen:
$x \approx 1{,}45$ of $x \approx 4{,}84$;
Meetkundige aanpak: dan is driehoek MSP gelijkbenig met zijden van 1, 4 en 4.
Dan geldt: $\cos(x) = \frac{1}{2} \Big/ 4 = \frac{1}{8}$, dus $x \approx 1{,}45$ of $x \approx 4{,}84$.

e $16 - \sin^2(x) \leq 16$ voor elke x, dus $A \leq \cos(x) + \sqrt{16} = \cos(x) + 4$

f Het verschil is maximaal als $\sin^2(x) = 1$, dus als $x = \frac{1}{2}\pi \approx 1{,}57$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi \approx 4{,}71$; het verschil is dan $4 - \sqrt{15} \approx 0{,}13$.
Andere aanpak:
$4 + \cos(x) - A = 4 + \cos(x) - (\cos(x) + \sqrt{16 - \sin^2(x)}) = 4 + \sqrt{16 - \sin^2(x)}$
en dan met de GR hiervan het maximum bepalen: het maximale verschil is $0{,}13$ bij $x \approx 1{,}57$ en $x \approx 4{,}71$.

43

a 0° en 180° (of: 0 en π radialen)

b De hoogte van de driehoek is de afstand van Q tot de lijn OP.
Als x scherp is, is deze hoogte $4 \cdot \sin(x)$.
Als x stomp is, is deze hoogte $4 \cdot \sin(180^\circ - x) = 4 \cdot \sin(x)$.
In beide gevallis is de oppervlakte dus $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin(x) = 6\sin(x)$.

c Als $\sin(x)$ maximaal is, dus als $x = 90^\circ$ (of: $x = \frac{1}{2}\pi$); dan is de driehoek rechthoekig.

44

a Een ruit

b hoogte = 8; zijde = $\frac{8}{\sin(45^\circ)} = \frac{8}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$; oppervlakte = $8 \cdot 8\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$

c $\text{opp}(G) = 8 \cdot \frac{8}{\sin(\alpha)} = \frac{64}{\sin(\alpha)}$

d $\frac{64}{\sin(\alpha)} = 1000 \rightarrow \sin(\alpha) = 0{,}064 \rightarrow \alpha \approx 3{,}67^\circ$

e Als de noemer, dus $\sin(\alpha)$, het grootst is, dus als $\alpha = 90^\circ$.

f Verticale asymptoot als de noemer nul is, dus $\sin(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = 0^\circ$ en $\alpha = 180^\circ$.

45

a Horizontale diagonaal: $2 \cdot 1 \cdot \cos(20^\circ) \approx 1{,}879...$;
Verticale diagonaal: $2 \cdot 1 \cdot \sin(20^\circ) \approx 0{,}684...$;
De oppervlakte is dus $\frac{1}{2} \cdot 1{,}879... \cdot 0{,}684... \approx 0{,}643$; klopt.

b Horizontale diagonaal: $2 \cdot 1 \cdot \cos(x)$;
Verticale diagonaal: $2 \cdot 1 \cdot \sin(x)$;
De oppervlakte is dus $\frac{1}{2} \cdot 2\cos(x) \cdot 2\sin(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$.

c Met de GR het maximum bepalen: $x = 45^\circ$ (dan is de doorsnede een vierkant).

46

a Als de letter **X**; $L = 200\sqrt{2}$ meter

b Als de letter **H** een kwartslag gedraaid; $L = 300$ meter

c De afstand van E tot AB is $50 \cdot \tan(x)$, dus $EF = 100 - 2 \cdot 50\tan(x) = 100 - 100\tan(x)$; elk schuine stuk is $\frac{50}{\cos(x)}$;
Dus: $L = 100 - 100\tan(x) + 4 \cdot \frac{50}{\cos(x)} = 100 - 100\tan(x) + \frac{200}{\cos(x)}$

d Met de GR het maximum bepalen: $x \approx 0{,}52$ en $L \approx 273$ m.

47

a De periode is $\frac{2\pi}{0{,}212769} \approx 29{,}5305$ dagen, dat is 45524 minuten (of 29 dagen, 12 uur en 44 minuten).
Of: met de GR twee maxima (of twee minima) zoeken; het verschil is $29{,}5305$ dagen, etc.

b Er wordt gevraagd naar de kleinste (niet-negatieve) waarde van t waarvoor $P = 0$; $t \approx 27{,}05$, dus op 28 januari (2017).

c 22 februari (van 0:00 uur tot 24:00 uur) ligt tussen $t = 52$ en $t = 53$; dan is $P \approx 22$ respectievelijk $P \approx 14$. Dus blijkt (bijvoorbeeld uit de grafiek) dat P hiertussen afneemt, dus tussen laatste kwartier en nieuwe maan.

48

a $\sin(x) = \frac{2}{3} \rightarrow x \approx 0{,}73$

b $FB = \frac{22}{5{,}5} = 4$, dus $x \approx 0{,}7297...$
$\rightarrow$ lengte = $3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot \cos(0{,}7297...) \approx 17{,}9$ cm (of 179 mm)

c $BF = 2 \cdot 3\sin(x) = 6\sin(x)$; de afstand van A tot BF is $3 \cdot \cos(x)$;
opp$(ABF) = \frac{1}{2} \cdot 6\sin(x) \cdot 3\cos(x) = 9\sin(x)\cos(x)$
en opp$(BCEF) = 3 \cdot 6\sin(x) = 18\sin(x)$;
Dus: $S = 2 \cdot$ opp(ABF) + opp$(BCEF) = 18\sin(x)\cos(x) + 18\sin(x)$

d Met de GR het maximum bepalen van S: $x \approx 1{,}047$.
(Je kunt met differentiëren bewijzen dat $x = \frac{1}{3}\pi$, maar dat valt buiten de stof voor havo wisB.)
De cel is dan een regelmatige zeshoek.

Extra opgaven

1

Het interval $[1{,}4]$ is een halve periode, dus de periode is $6 \rightarrow c = \frac{2\pi}{6} (= \frac{1}{3}\pi)$ (of ongeveer $1{,}05$)
$a = (\frac{4+1}{2} =) 2\frac{1}{2}$;
$b = (4 - 2\frac{1}{2} =) 1\frac{1}{2}$ en $d = 4$

2

a $2 - 4\sin(2x) = 0 \rightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \frac{1}{6}\pi$ of $2x = \frac{5}{6}\pi \rightarrow x = \frac{1}{12}\pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi$
(plus of min periode π levert geen verdere oplossingen)

b De sinusoïde gaat in C door de evenwichtsstand dus de top D zit op driekwart van de periode $(= \pi)$ vanaf C: $x_D = \frac{3}{4}\pi$;
$f(0) = 2$, dus $C(0{,}2)$; $f(\frac{3}{4}\pi) = 6$, dus $D(\frac{3}{4}\pi{,}6)$;

rc $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{16}{3\pi}$, dus een vergelijking van l is $y = \frac{16}{3\pi}x + 2$;

$\frac{16}{3\pi}x + 2 = 0$ geeft $x_E = \text{-}\frac{3}{8}\pi$

c helling $= \frac{f(0{,}001) - f(0)}{0{,}001} = \frac{1{,}992... - 2}{0{,}001} \approx \text{-}8{,}00$

3

a De grafiek is een halve periode en de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$, dus $S(4{,}0)$ en $T(2{,}1)$;

OT: $y = \frac{1}{2}x$; ST: $y = 2 - \frac{1}{2}x$.

b Op stuk OT: $AB = \sin(\frac{1}{4}\pi x) - \frac{1}{2}x$;
Met de GR het maximum bepalen: $AB \approx 0{,}21$ bij $x \approx 1{,}12$;
Vanwege de symmetrie is de maximale waarde van AB op stuk ST ook $1{,}12$ bij $x \approx 4 - 1{,}12 = 2{,}88$.

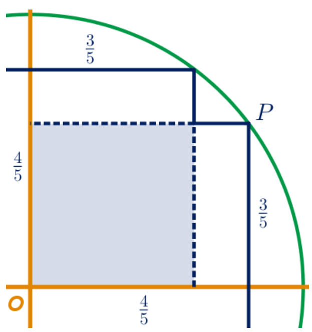
c Topvorm: $y = c(x-2)^2 + 1$; punt $O(0{,}0)$ invullen geeft $c = \text{-}\frac{1}{4}$;
$y = \text{-}\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$

d Met de GR het maximum bepalen van $AB = \text{-}\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1 - \sin(\frac{1}{4}\pi x)$ (want de parabool ligt nu boven de sinusoïde);
Dit geeft $AB \approx 0{,}056$ (bij $x \approx 0{,}601$ en $x \approx 3{,}399$).

4

a De coördinaten van P zijn dan $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, dus 3 cm boven de x-as en 4 cm rechts van de y-as. Zie figuur voor een deel van het kruis. Daarna is met symmetrie de rest van het kruis eenvoudig te tekenen.

b Zie tekening bij onderdeel **a**.
Het deel rechtsboven bestaat uit twee rechthoeken van $\frac{3}{5}$ bij $\frac{4}{5}$ met een vierkant overlapgebied, dus heeft oppervlakte $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.
De totale oppervlakte is $4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.



c Het deel rechtsboven bestaat uit twee rechthoeken van $\sin(t)$ bij $\cos(t)$ met een vierkant overlapgebied van $\sin(t)$ bij $\sin(t)$, dus heeft oppervlakte $2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) - \sin^2(t)$.
De totale oppervlakte is $4 \cdot (2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) - \sin^2(t)) = 8 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) - 4\sin^2(t)$.

d De GR geeft $A'(\frac{1}{6}\pi) \approx 0{,}536$; de grafiek is dus stijgend bij $t = \frac{1}{6}\pi$, dus is de oppervlakte maximaal bij een waarde van t groter dan $\frac{1}{6}\pi$.

e Met de GR het maximum bepalen: A is maximaal $2{,}47$ (bij $t \approx 0{,}554$).

5

a $T = 10 + 8 \cdot \sin(\frac{2\pi}{365}(t - 135))$

b $T = 4 \cdot \sin(2\pi(t - \frac{15}{24}))$

c 365

d $T = 10 + 8 \cdot \sin(\frac{2\pi}{365}(t - 135)) + 4 \cdot \sin(2\pi(t - \frac{15}{24}))$

6

a $\dfrac{x}{2+\cos(x)} = \frac{1}{2}x \rightarrow x = \frac{1}{2}x \cdot (2+\cos(x)) \rightarrow \frac{1}{2}x \cdot \cos(x) = 0$
$\rightarrow x = 0$ of $\cos(x) = 0$, dus $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{2}\pi$, $x = 3\frac{1}{2}\pi$ en $x = 3\frac{1}{2}\pi$.

b $\dfrac{x}{2+\cos(x)} = \frac{2}{3}x = \dfrac{2x}{3} \rightarrow 3x = 2x \cdot (2+\cos(x)) \rightarrow x + 2x \cdot \cos(x) = 0$
$\rightarrow x(1+2\cos(x)) = 0 \rightarrow x = 0$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}$,
dus $x = 0$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = 1\frac{1}{3}\pi$, $x = 2\frac{2}{3}\pi$ en $x = 3\frac{1}{3}\pi$.

c De breuk is maximaal als de noemer minimaal is, dus als $\cos(x) = -1$.

d In de punten met $\cos(x) = -1$ is $f(x) = \dfrac{x}{2-1} = x$, dus de lijn is $y = x$.

e De breuk is minimaal als de noemer maximaal is, dus als $\cos(x) = 1$; in die punten is $f(x) = \dfrac{x}{2+1} = \frac{1}{3}x$, dus de lijn is $y = \frac{1}{3}x$

f Voor $a \leq -2$ of $a \geq 2$, want dan wordt de noemer nul voor waarden van x.

7

a Bijv.: $f(x) = 3 + 2\cos(\frac{2\pi}{6}(x-3))$, dus $a = 3$, $b = 2$, $c = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ en $d = 3$;
Bijv.: $f(x) = 3 + 3\sin(\frac{2\pi}{12}(x-3))$, dus $a = 3$, $b = 3$, $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ en $d = 3$;

b Met de GR: $(3{,}84; 4{,}28)$ en $(8{,}16; 4{,}28)$

c Met de GR het maximum bepalen van $f(x) - g(x)$: $2{,}56$.

d Verticaal 1 naar beneden schuiven;
Verticaal vermenigvuldigen (t.o.v. de x-as) met factor $1\frac{1}{2}$;
Horizontaal vermenigvuldigen (t.o.v. de y-as) met factor 2

11 Goniometrische functies

1 Je moet de helling bepalen in een punt van de grafiek: welk punt? Bepaal dan de helling met de juiste optie van je GR.
2 Maak een schematische tekening van de situatie.
3 Teken een rechthoekige driehoek en gebruik de stelling van Pythagoras.
4 Let op: het is een $-\cos$, dus het startpunt is een minimum.
5 Geef eerst een formule van de cirkel en schrijf deze in de vorm $y = \ldots$; kijk dan naar het verschil tussen de twee functies.
6 Bekijk de functie als ketting.
7 Door welke transformaties ontstaat de grafiek uit de grafiek van $y = \frac{1}{\sin(x)}$?
8 Wanneer is de uitkomst van $y = 6\sin(x)$ maximaal?

Index