havo 5 wiskunde B deel 2
Hoofdstuk 10 (voorlopig)

de Wageningse Methode

Copyright © 2018 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN 978-90-5225-040-3
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

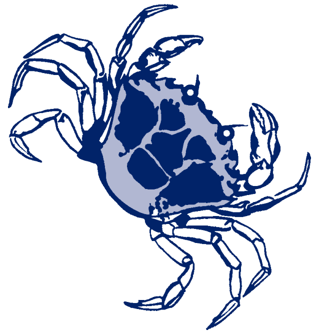
Inhoudsopgave


58

We herhalen het onderwerp exponentiële groei.

1

Kanker is een van de belangrijkste doodsoorzaken.
Een kwaadaardig gezwel ontstaat als een normale lichaamscel verandert in een tumorcel, die gaat zich dan op eigen houtje delen. Bij de eerste deling ontstaan twee tumorcellen, bij de volgende deling vier, daarop acht, dan zestien, enzovoort.



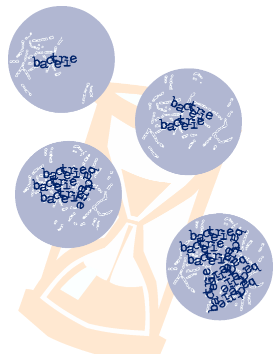
- **a** Hoeveel tumorcellen zijn er na de vijfde en na de zesde deling?
- **b** Na hoeveel delingen zijn er meer dan 2000 tumorcellen?
- **c** Zoek met je rekenmachine uit na hoeveel delingen er meer dan een miljoen tumorcellen zijn.

Zeg dat een tumorcel een inhoud heeft van 1 miljoenste mm^3.

- **d** Ga na dat er dan na veertig delingen een tumor is van meer dan 1 dm^3.

2

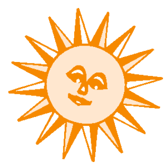
Op een gegeven moment (tijdstip 0) zijn er in een kweek 1000 bacteriën. We veronderstellen dat de bacteriën zich gemiddeld elk uur delen.



- **a** Hoeveel bacteriën zijn er na t uur?
- **b** Wat is de exacte groeifactor per half uur?
  Geef een formule voor het aantal bacteriën na t halve uren.
- **c** Wat is de exacte groeifactor per kwartier?
  Geef een formule voor het aantal bacteriën na t kwartieren.

3

Hoe dieper je onder water komt, des te donkerder het wordt.
Licht dat op water valt wordt gedeeltelijk geabsorbeerd. Hoe troebeler het water, hoe minder licht het doorlaat.
In zeewater bijvoorbeeld, is de hoeveelheid licht op 1 meter diepte ongeveer 75% van de hoeveelheid licht dat op het wateroppervlak valt.
De hoeveelheid licht op 2 meter diepte is 75% van 75% van de oorspronkelijke hoeveelheid licht die op het water valt.



- **a** Hoeveel procent is dat?

y is de hoeveelheid licht (in procenten van de oorspronkelijke hoeveelheid) op x meter diepte.

- **b** Geef een formule voor y uitgedrukt in x.
- **c** Stel een vergelijking op om te berekenen op welke diepte de hoeveelheid licht 10% van de oorspronkelijke hoeveelheid is.
- **d** Los deze vergelijking op met de GR (gebruik de optie ’solver’ of ’intersect’).

De groeifuncties in de voorgaande opgaven vertonen alle dezelfde eigenschap:
de hoeveelheid één tijdseenheid later (of één lengte-eenheid dieper) krijg je door de hoeveelheid nú (of op deze hoogte) met een bepaalde factor te vermenigvuldigen.
Deze vorm van groei noemen we **exponentiële groei**.
Een hoeveelheid H groeit dus exponentieel in de tijd t als H gedurende elke tijdseenheid een vaste factor keer zo groot wordt: de **groeifactor**.
Als de beginhoeveelheid b is en de groeifactor g, dan moet er na elke tijdseenheid met g vermenigvuldigd worden.

t	0	1	2	3
$H(t)$	b	$b \cdot g$	$b \cdot g \cdot g$	$b \cdot g \cdot g \cdot g$

Algemeen: $H(t) = b \cdot g^t$.

Exponentiële groei kan razend snel gaan, dat zie je bijvoorbeeld in opgave 1.
In maart 2014 brak de besmettelijke ziekte *ebola* uit in West-Afrika.
In september van dat jaar begon men zich ernstig zorgen te maken zoals uit onderstaand bericht op Nos.nl blijkt.
dinsdag 23 sep 2014, 11:24 (Aangepast op 23-09-14, 15:53)
Door redacteur gezondheidszorg Rinke van den Brink
Als er niet heel snel ingegrepen wordt gaat de groei van ebola exponentieel door en zullen er begin november meer dan 20.000 mensen besmet zijn. Dat staat in een artikel van het Ebola Response Team van de WHO dat vandaag verschenen is in de New England Journal of Medecine (NEJM).

4 In een artikel op internet in oktober 2014 over de ebola-epidemie staat het volgende.
Zolang er geen maatregelen genomen worden, en zolang het aantal zieken relatief klein is vergeleken met het totale bevolkingsaantal, zal het aantal patiënten exponentieel blijven stijgen. In de begindagen van de huidige ebola-epidemie gebeurde dit a rato van een verdubbeling om de twintig dagen.

Bron: http://www.express.be/business/nl/economy/hoe-snel-verspreidt-ebola-zich/208525.htm

a Wat was gedurende de begindagen de groeifactor per dag, afgerond op 3 decimalen?
b Met hoeveel procent nam het aantal patiënten per dag toe?

5 Aan water wordt suiker toegevoegd. De suiker lost langzaam op: van de suiker die er op een bepaald moment nog over is, lost in de volgende minuut 20% op. Om 12.00 uur is 125 gram suiker over. Het aantal grammen suiker dat er t minuten na 12.00 uur over is noemen we $A(t)$.

a Wat is de groeifactor per minuut van de hoeveelheid suiker die over is?

b Geef een formule voor $A(t)$.

c Hoeveel gram suiker was er 2 minuten voor 12.00 uur over?

d Stel een vergelijking op om te berekenen na hoeveel tijd op 1 gram na alle suiker is opgelost. Los deze vergelijking op met je GR. Na hoeveel minuten en seconden is dat?

Door het water te verwarmen lost de suiker sneller op: na 3 minuten is dan al 80% opgelost.

e Wat is nu de (exacte) groeifactor per minuut?
Bereken met een vergelijking na hoeveel tijd op 1 gram na alle suiker is opgelost.

Stel dat een hoeveelheid exponentieel groeit en dat de hoeveelheid in 6 uur tijd 5 keer zo groot wordt.
Dan geldt voor de groeifactor g per uur: $g^6 = 5$.
Dus $g = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$.
Afgerond op 3 decimalen is $g = 1{,}308$, dus neemt de hoeveelheid per uur met $30{,}8\%$ toe.

6 De prijzen stijgen gemiddeld met 2% per jaar.

a Met hoeveel procent stijgen de prijzen in 10 jaar (in één decimaal nauwkeurig)?

Een luchtballon loopt langzaam leeg, elke dag met 3%.
Op een gegeven moment ($t = 0$) zit er 5 liter lucht in.

b Geef een formule voor de hoeveelheid lucht H in de ballon (in liter) na t dagen.

c Hoeveel procent lucht verdwijnt er per week uit de ballon (in één decimaal nauwkeurig).

Een hoeveelheid groeit per 70% per week.

d Bereken in één decimaal nauwkeurig met hoeveel procent de hoeveelheid per dag groeit.

Als een hoeveelheid met 2% per uur afneemt, groeit die hoeveelheid exponentieel met groeifactor $0{,}98$ per uur.
Als een hoeveelheid met 2% per uur toeneemt, groeit die hoeveelheid exponentieel met groeifactor $1{,}02$ per uur.

Halfwaardetijd en verdubbelingstijd

7 In 1986 vond er een explosie plaats in de kerncentrale van Tsjernobyl in de toenmalige Sovjetunie: de grootste kernramp in de geschiedenis. Daarbij kwamen veel radioactieve stoffen vrij. Deze stoffen vervallen: onder het uitzenden van straling veranderen ze in een stof die niet meer radioactief is.
De radioactiviteit neemt dus af. En dat gebeurt exponentieel. Een van de vrijgekomen stoffen in Tsjernobyl was Cesium-141. Van Cesium-141 neemt de radioactiviteit jaarlijks af met 2%.

- **a** Geef een formule voor het percentage straling dat er nog over is na t jaar.
- **b** Bepaal met je rekenmachine hoeveel jaar het ongeveer duurt voordat de straling gehalveerd is.

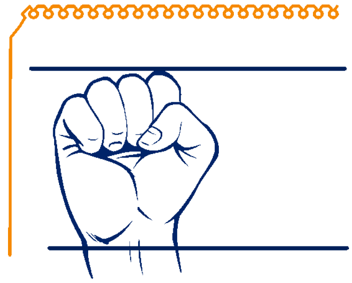
8 Halfwaardetijd is een begrip uit de natuurkunde. Het geeft aan hoe lang het duurt voordat de straling gehalveerd is. Het begrip halfwaardetijd wordt ook wel gebruikt bij andere zaken dan radioactiviteit. Stel dat wij 100 mg Pu-238 (plutonium) hebben. De halfwaardetijd van Pu-238 is negen jaar; dat wil zeggen dat er na negen jaar nog de helft van over is.

- **a** Hoeveel mg Pu-238 is er dan nog na 27 jaar?
- **b** Hoeveel procent van het Pu-238 vervalt er jaarlijks?
- **c** Stel een formule op voor de hoeveelheid Pu-238 na t jaar.

Veronderstel dat een hoeveelheid stof (of andere grootheid) exponentieel in de tijd afneemt. De tijd waarin die hoeveelheid *halveert*, noemen we de **halfwaardetijd** van die stof.
Als het niet om radioactiviteit gaat wordt deze tijdsduur ook wel de **halveringstijd** genoemd.
Evenzo:
Een hoeveelheid stof (of andere grootheid) neemt exponentieel toe. De tijd waarin de hoeveelheid *verdubbelt*, noemen we de **verdubbelingstijd**.

9 Het aantal PIN-transacties in Nederland is in de periode van 2005 tot 2013 verdubbeld.

- **a** Bereken de (gemiddelde) jaarlijkse procentuele groei, afgerond op 1 decimaal.
- **b** Bereken (in maanden nauwkeurig) de verdubbelingstijd als het aantal pintransacties met $7{,}3\%$ per jaar toeneemt.



10

Een hoeveelheid stof neemt exponentieel toe. Voor het berekenen van de verdubbelingstijd bij een bepaald groeipercentage bestaat een vuistregel. Deze vuistregel gaat alleen op als het groeipercentage niet al te groot is (tot 10%).
Hij luidt:

de verdubbelingstijd $= \dfrac{70}{\text{groeipercentage}}$.

Stel dat de bevolking van een land elk jaar met 2% groeit.

a Hoe lang zou het dan volgens de vuistregel duren voordat de bevolking verdubbeld is?

b Hoeveel keer zo groot wordt de bevolking in de tijd die je bij het vorige onderdeel hebt gevonden? Klopt het ongeveer?

De vuistregel kan ook omgekeerd gebruikt worden.
Stel dat van een ander land de bevolking in 14 jaar verdubbelt.

c Met hoeveel procent groeit de bevolking van dat land dan jaarlijks volgens de vuistregel?

d Bereken in twee decimalen nauwkeurig met hoeveel procent de bevolking precies groeit.

11

a Iets neemt elk jaar toe met 4%. Hoe groot is de procentuele toename in 20 jaar? (Rond af op een geheel percentage.)

b Iets neemt elk jaar af met $5{,}7\%$. Hoe groot is de procentuele afname in 20 jaar? (Rond af op een geheel percentage.)

c Iets neemt in 40 jaar met 60% toe. Bereken de jaarlijkse procentuele groei afgerond op 1 decimaal.

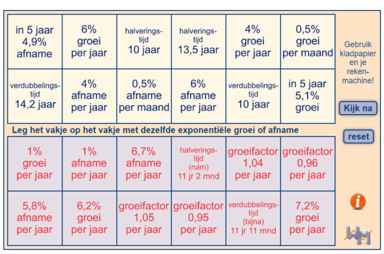
d Iets neemt per jaar met 24% af. Bereken de maandelijkse procentuele afname afgerond op 1 decimaal.

e De verdubbelingstijd bedraagt 7 jaar. Bereken de jaarlijkse procentuele groei afgerond op 1 decimaal.

f De halveringstijd bedraagt 29 maanden. Bereken de jaarlijkse procentuele afname afgerond op 1 decimaal.

g Het aantal inwoners van een stad groeit in 25 jaar van $4{,}3$ naar $6{,}8$ miljoen. Bereken de jaarlijkse procentuele groei afgerond op 1 decimaal.

Opmerking
Je kunt nog meer oefenen met het rekenen met groeifactoren met de applet ‘Mini-loco_groeifactor’.



In deze paragraaf gaan we de eigenschappen van exponentiële verbanden wat beter bekijken. Daarvoor herhalen wij eerst de bekende rekenregels voor machten, want die zul je nodig hebben.

Rekenregels voor machten:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (ofwel $a^p : a^q = a^{p-q}$)
3. $\left(a^p\right)^q = \left(a^q\right)^p = a^{p \cdot q}$
4. $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
5. $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$
6. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (n geheel)
7. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a}^{\,p}$ (p en q geheel)
8. $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$

12

a Vul in:

$7^8 \cdot 7^6 = 7^{\cdots}$ $\quad$ $7^8 : 7^6 = 7^{\cdots}$

$(7^8)^6 = 7^{\cdots}$ $\quad$ $7^8 \cdot 4^8 = (\ldots)^8$

b Bereken zonder rekenmachine, schrijf een tussenstap op.

$2^{1{,}23} \cdot 2^{1{,}77}$ $\quad$ $2^{23{,}5} : 2^{21{,}5}$

$(2^{0{,}125})^{16}$ $\quad$ $2^{0{,}5} \cdot 8^{0{,}5}$

c Bereken zonder rekenmachine; schrijf tussenstappen op.

$8^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ $49^{1\frac{1}{2}}$ $\quad$ $10000^{\frac{3}{4}}$

$8^{-\frac{2}{3}}$ $\quad$ $49^{-1\frac{1}{2}}$ $\quad$ $10000^{-\frac{3}{4}}$

d Schrijf zo mogelijk als macht van één getal.

$5^3 \cdot 5^4$ $\quad$ $3^5 \cdot 4^5$

$5^3 \cdot 5^3$ $\quad$ $3^4 \cdot 4^5$

e Ga na zonder rekenmachine: goed of fout?

$2 \cdot 2^3 = 2^4$ $\quad$ $40^3 = 4 \cdot 10^3$

$(-2)^{13} = 2^{13}$ $\quad$ $(-2)^{14} = 2^{14}$

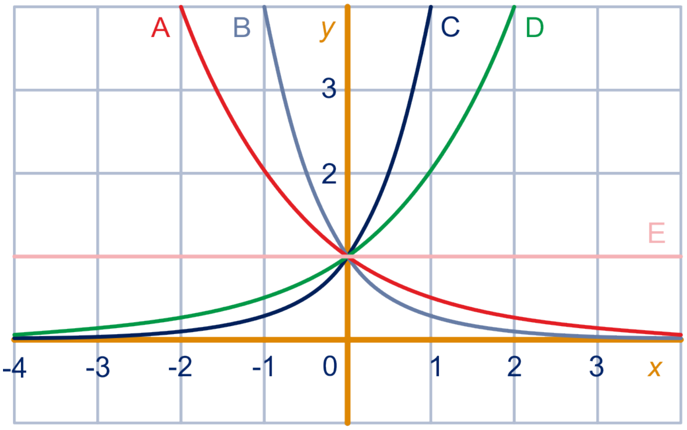
$\dfrac{2^{14}}{2^7} = 2^7$ $\quad$ $\dfrac{2^{14}}{2} = 2^7$

$(2^5)^3 = 8^5$ $\quad$ $(2^5)^3 = 2^{125}$

$2^5 \cdot 2^5 = 2^{25}$ $\quad$ $2^5 \cdot 2^5 = 2^{10}$

$2^5 \cdot 2^5 = 4^5$ $\quad$ $2^5 \cdot 2^5 = 4^{10}$

13 We nemen in de algemene gedaante $y = b \cdot g^x$ voor b het getal 1 en voor g de getallen $1, 2, 4, \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$. Hieronder staan de vijf bijbehorende grafieken (A t/m E).



a Welke grafiek hoort bij welke waarde van g?

b Hoe krijg je de grafiek met $g = \frac{1}{2}$ uit de grafiek met $g = 2$? Kun je dat met de rekenregels verklaren?

De grafieken van $y = \left(1\frac{1}{2}\right)^x$ en $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ lopen ergens tussen de vijf getekende grafieken door.

c Beschrijf hoe deze grafieken lopen. Controleer je antwoord door de grafieken op je GR te tekenen.

d Verklaar met rekenregels van machten dat de grafieken van $y = \left(1\frac{1}{2}\right)^x$ en van $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ elkaars spiegelbeeld zijn in de y-as.

14 **a** De grafieken van de exponentiële functies $y = g^x$ hebben een punt gemeenschappelijk.
Welke punt? Kun je dat verklaren?

b Wat weet je van het grondtal g als de functie stijgend is?
En wat als de functie dalend is?
Blijft er één geval over. Welk?

c Zeg van de volgende functies of ze stijgend of dalend zijn (zonder eerst de grafiek te tekenen).

$y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ $\quad$ $y = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^x$

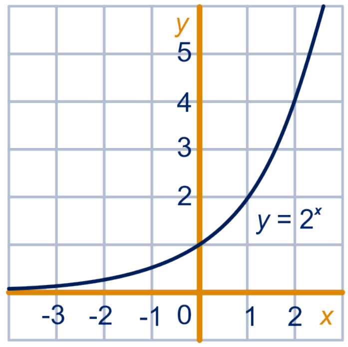
$y = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^x$ $\quad$ $y = \pi^x$

d Hoe ziet de grafiek eruit van $y = 0{,}99^x$?
En van $y = 1{,}01^x$?

e Bereken voor welke waarde(n) van x het verschil tussen $0{,}99^x$ en $1{,}01^x$ groter is dan 1. Rond in je antwoord af op 1 decimaal.

Hint 1.

10.2 Exponentiële functies



De grafiek van $y = 2^x$ gaat aan de linkerkant steeds meer op de x-as lijken. Preciezer gezegd: als je langs de grafiek van $y = 2^x$ naar links gaat, kom je zo dicht bij de x-as als je maar wilt. We zeggen dat de x-as **horizontale asymptoot** is van de grafiek van $y = 2^x$.

15

a Ga na dat de x-as horizontale asymptoot is van de grafiek van elke exponentiële functie (behalve als $g = 1$).

b Ken jij nog een andere functie waarvan de x-as een horizontale asymptoot is?

c Bereken voor welke waarden van x geldt: $0{,}9^x < 0{,}000001$. Rond in je antwoord af op 1 decimaal.

Opmerking

Zojuist heb je waarschijnlijk met de GR de vergelijking $0{,}9^x = 0{,}000001$ opgelost, met de 'solver' of met 'intersect'. En ook in eerdere opgaven in dit hoofdstuk heb je voor soortgelijke vergelijkingen je GR moeten gebruiken. Voorlopig is dat nog de enige manier waarop dit kan, maar later in dit hoofdstuk ga je leren hoe je zo'n vergelijking ook algebraïsch of exact kunt oplossen.

16

Vergelijk de functies $y = 2^x$ en $y = x^2$. De formules lijken veel op elkaar. Maar het zijn toch heel verschillende functies.

a Teken op je GR voor $-5 \leq x \leq 5$ beide functies in één figuur. Noem eens wat opvallende verschillen tussen de grafieken.

b Voor welke getallen x geldt: $2^x < x^2$?

We gaan het groeigedrag van $y = 2^x$ en $y = x^2$ vergelijken. Daarvoor berekenen we de gemiddelde toename van beide functies op verschillende x-intervallen van lengte 1.

Voorbeeld

We nemen het x-interval $[2,3]$, dus x neemt toe van 2 tot 3.
Dan neemt $y = 2^x$ toe van 4 tot 8, dus $\Delta y = 4$.
Dan neemt $y = x^2$ toe van 4 tot 9, dus $\Delta y = 5$.

c Bereken Δy voor beide functies op de x-intervallen in de tabel.

x-interval	$[2,3]$	$[3,4]$	$[4,5]$	$[10,11]$	$[100,101]$
Δy bij $y = 2^x$	4				
Δy bij $y = x^2$	5				

d Is de conclusie gerechtvaardigd dat voor grote waarden van x de functie $y = 2^x$ veel sneller groeit dan $y = x^2$?

We hebben hiervoor naar de absolute toename van y gekeken. We kunnen ook kijken naar de relatieve toename van y: dat is hoeveel keer zo groot y wordt op een x-interval van lengte 1.

Voorbeeld

We nemen het x-interval $[2,3]$.

Dan neemt $y = 2^x$ toe van 4 tot 8, dus y wordt $\frac{8}{4} = 2$ keer zo groot.

Dan neemt $y = x^2$ toe van 4 tot 9, dus y wordt $\frac{9}{4} = 2{,}25$ keer zo groot.

e Bereken voor beide functies hoeveel keer zo groot y wordt op de x-intervallen in de tabel.

x-interval	$[2,3]$	$[3,4]$	$[4,5]$	$[10,11]$	$[100,101]$
bij $y = 2^x$	2				
bij $y = x^2$	$2{,}25$				

f Wat valt je op?

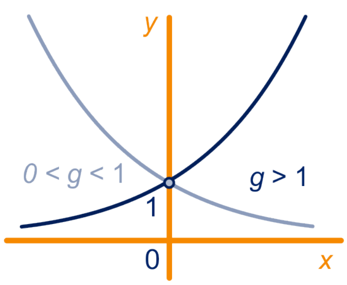
17 De helling in een punt van de grafiek van $y = x^2$ kunnen we exact berekenen met behulp van differentiëren. De functie $y = 2^x$ kunnen we echter (nog) niet differentiëren, maar bij deze functie kunnen we de helling in een punt wel benaderen.

a Neem $x = 3$. Bereken bij deze x exact de helling van de grafiek van $y = x^2$ en benader de helling van de grafiek van $y = 2^x$ op 2 decimalen.
Doe hetzelfde bij $x = 10$.

b Zoek met de GR de twee waarden van x (afgerond op 2 decimalen) waarbij de helling aan beide grafieken gelijk is.

Transformaties

$y = g^x$ is de standaard exponentiële functie met grondtal g.
De x-as is horizontale asymptoot van de grafiek (behalve als $g = 1$).
Als $g > 1$, dan is de functie stijgend;
als $0 < g < 1$, dan is de functie dalend.
De grafiek gaat door het punt $(0,1)$.

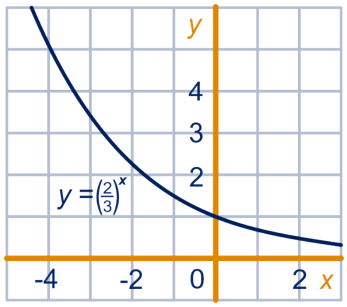


We gaan in de volgende opgaven de formule van deze standaard exponentiële functie veranderen en bekijken dan wat er dan met de bijbehorende grafiek gebeurt. En andersom: als we de grafiek transformeren, wat gebeurt er dan met de formule?

18 Teken op je GR de grafiek van $f(x) = -3 + 2^x$.
De grafiek van f is verwant met de grafiek van $y = 2^x$.

a Hoe moet je de grafiek van $y = 2^x$ verschuiven om de grafiek van f te krijgen?
b Is f stijgend of dalend?
c Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f?
d Welke getallen zitten in het bereik van f?

19 $f(x) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$ en $g(x) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x$



a Hoe krijg je de grafiek van f uit die van $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$?
En hoe krijg je de grafiek van g uit die van $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$?
b Is f stijgend? En g?
c Geef een vergelijking van de horizontale asymptoot van de grafiek van f. Ook voor de grafiek van g.
d Geef het bereik van beide functies.

Er is een waarde van x met $f(x) = 4$.

e Bereken $g(x)$ voor die waarde van x (zónder de waarde van x uit te rekenen).

Hint 2.

20 $h(x) = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 5$

a Hoe ontstaat de grafiek van h uit die van $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$?
b Is h een stijgende functie? Hoe zie je dat aan de formule?
c Welke lijn is horizontale asymptoot van de grafiek van h?
d Geef het bereik van h.

De grafiek van $y = a \cdot g^x + b$ is verwant aan de grafiek van $y = g^x$.
Je krijgt de grafiek van $y = a \cdot g^x + b$ door de grafiek van $y = g^x$ verticaal te vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor a en daarna b eenheden omhoog te schuiven.
De lijn $y = b$ is horizontale asymptoot van de grafiek van $y = a \cdot g^x + b$.

21
a Teken in één window de grafieken van $y = 2^x$ en $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
b Hoe liggen de grafieken ten opzichte van elkaar?

Er is een verband tussen 2^x en $\left(\frac{1}{2}\right)^x$: voor elke x zijn ze elkaars omgekeerde.

c Uit welke rekenregel voor machten volgt dit verband?
d Voor welke x geldt: $2^x \geq 32$?
En voor welke x geldt (dus): $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 32$?

22

a Teken in één window de grafieken van $y = 2^x$ en $y = 2^{x+3}$.
b Hoe moet je de grafiek van $y = 2^x$ verschuiven om de grafiek van $y = 2^{x+3}$ te krijgen?
c Hoe moet je de grafiek van $y = 2^x$ vermenigvuldigen om de grafiek van $y = 2^{x+3}$ te krijgen?
d Wat is dus het verband tussen $y = 2^{x+3}$ en $y = 2^x$? Verklaar dit verband met een rekenregel.
e Voor welke x geldt: $2^{x+3} \geq 32$?

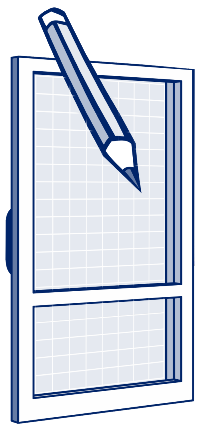
23

a Teken in één window de grafieken van $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$ en $y = 2^{x-1}$.
b Hoe liggen de grafieken ten opzichte van elkaar?
c Wat is het verband tussen $\frac{1}{2} \cdot 2^x$ en 2^{x-1}? Uit welke rekenregels volgt dat verband?
d Voor welke x geldt: $\frac{1}{2} \cdot 2^x \geq 32$?

24

a Teken in één window de grafieken van $y = 2^x$ en $y = 8^x$.
b Hoe krijg je de grafiek van $y = 8^x$ uit die van $y = 2^x$?
c Wat is het verband tussen 2^x en 8^x? Uit welke rekenregel volgt dat verband?
d Voor welke x geldt: $8^x \geq 32$?

25



a Teken in één window de grafieken van $y = 2^x$ en $y = 2^{1-x}$.
b Hoe krijg je de grafiek van $y = 2^{1-x}$ uit die van $y = 2^x$?
c Welke functie krijg je als je de functies $y = 2^x$ en $y = 2^{1-x}$ met elkaar vermenigvuldigt?
d Bereken het snijpunt van de twee grafieken.

- De grafiek van $y = g^{x-a}$ krijg je uit de grafiek van $y = g^x$ door deze a naar rechts te schuiven.
  Met behulp van een rekenregel zie je: $g^{x-a} = g^{-a} \cdot g^x$.
  Dus je kunt de grafiek van $y = g^{x-a}$ ook uit de grafiek van $y = g^x$ krijgen door deze verticaal t.o.v. de x-as met factor g^{-a} te vermenigvuldigen.
- Je krijgt de grafiek van $y = g^{cx}$ uit de grafiek van $y = g^x$ door deze horizontaal te vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor $\frac{1}{c}$.
  Omdat $g^{cx} = \left(g^c\right)^x$ is het ook de grafiek van de exponentiële functie met groeifactor g^c.

Opmerking
Net zoals je bij het transformeren van bijvoorbeeld sinusoïden en parabolen gezien hebt, zijn alle combinaties van horizontale en verticale transformaties mogelijk en is de volgorde vaak van belang.

26 We bekijken de bundel functies $y = \frac{1}{2} \cdot 3^{x-p} - 5$ voor elk getal p.

a Hoe ontstaan de grafieken uit de bundel uit elkaar?

b Bereken exact voor welke waarde van p het exemplaar uit de bundel door het punt $(2,-\frac{1}{2})$ gaat.

27 We bekijken de bundel functies $y = p - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ voor elk getal p.

a Hoe ontstaan de grafieken uit de bundel uit elkaar?

b Bereken exact voor welke waarde van p het exemplaar uit de bundel door het punt $(-1,1)$ gaat.

10.3 Vergelijkingen

Voorbeeld

De vergelijking $2^x = 8$ kun je onmiddellijk oplossen.
Immers, duidelijk is dat $x = 3$ aan de vergelijking voldoet (want $2^3 = 8$) en ook dat 3 het enige getal is met die eigenschap.

Maar dan weet je automatisch ook de oplossing van de vergelijking $2^{x-1} = 8$ als volgt:

$2^{x-1} = 2^3$

$x - 1 = 3$

$x = 4$

28 Bereken exact (zoals in het voorbeeld) voor welke x geldt:

a $2^{x+7} = 8$

b $2^{7x} = 16$

c $2^{-x} = 64$

d $2^{\frac{1}{x}} = 8$

29 Bereken exact voor welke x geldt:

a $3^x = \frac{1}{3}$

b $3^{x-5} = \frac{1}{3}$

c $3^{5x} = \frac{1}{9}$

d $3^{5-2x} = \frac{1}{81}$

e $2 \cdot 5^{\frac{1}{2}x} = 50$

f $\dfrac{100}{5^{3x+1}} = 500$

g $6^x = 9 \cdot 2^x$

Hint 3.

h $8 \cdot 3^x = 2 \cdot 1{,}5^x$

30 $f(x) = 4^{-x}$ en $g(x) = 2^{x+1}$

a Teken in één window de grafieken van f en g.

b Bereken met je GR de x-coördinaat van het snijpunt van de grafieken, afgerond op 3 decimalen.

Met je rekenmachine heb je berekend dat voor het snijpunt van de grafieken *waarschijnlijk* geldt $x = -\frac{1}{3}$.
Maar dat weet je niet zeker.
Of $x = -\frac{1}{3}$ precies goed is, kun je nagaan door $f(-\frac{1}{3})$ en $g(-\frac{1}{3})$ exact uit te rekenen.

c Zijn $f(-\frac{1}{3})$ en $g(-\frac{1}{3})$ exact gelijk?

Hint 4.

Voorbeeld

We kunnen de vergelijking $f(x) = g(x)$ uit opgave 30 voor het vinden van het snijpunt van de grafieken ook algebraïsch oplossen. Dat gaat als volgt.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 4^{-x} &= 2^{x+1} && \text{grondtallen gelijk maken} \\ \left(2^2\right)^{-x} &= 2^{x+1} && \text{haakjes weg} \\ 2^{-2x} &= 2^{x+1} && \text{grondtallen weglaten} \\ -2x &= x+1 \\ -3x &= 1 \\ x &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

31 $f(x) = 2^{x+3}$ en $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

a Teken in één window de grafieken van f en g.

b Bereken met de GR het snijpunt van de twee grafieken.

c Bereken ook algebraïsch de coördinaten van het snijpunt (dus op de manier van het voorbeeld hierboven).

d Voor welke x geldt: $f(x) < g(x)$?

32 Bereken exact voor welke x geldt:

a $3^{2x-1} = \frac{1}{9^x}$

b $\frac{1}{8} \cdot 2^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$

33 $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 9^{x-2}$ en $g(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$

a Teken in één window de grafieken van f en g.

b Bereken met de GR het snijpunt van de twee grafieken.

c Bereken exact de coördinaten van het snijpunt.

d Voor welke x geldt: $f(x) \geq g(x)$?

34 Een petrischaaltje met bacteriën staat in een oventje met de temperatuur zodanig ingesteld dat het aantal bacteriën per 40 minuten verdubbelt.

Noem de groeifactor per uur g.

a Leg uit dat geldt: $g^{\frac{2}{3}} = 2$.

De groeifactor g bereken je nu als volgt:

$$\begin{aligned} g^{\frac{2}{3}} &= 2 && \text{nodig } g = g^1 \\ \left(g^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} &= 2^{\frac{3}{2}} && \text{want } \tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{2} = 1 \\ g &= 2^{\frac{3}{2}} \ (\approx 2{,}828) \end{aligned}$$

10.3 Vergelijkingen

Door de temperatuur van het oventje anders in te stellen, verdubbelt het aantal bacteriën in 50 minuten.

b Bereken de groeifactor per uur, zowel exact als afgerond op 3 decimalen.

c Laat met een rekenregel voor machten zien dat $7^{2\frac{1}{2}}$ oplossing van de vergelijking $x^{\frac{2}{5}} = 7$.

d Welk getal is oplossing van de vergelijking $x^{-2\frac{1}{2}} = 7$?

Als $x^b = a$ dan $x = a^{\frac{1}{b}}$.
Hierbij worden x en a positief verondersteld en $b \neq 0$.

35 Los algebraïsch op; geef het antwoord afgerond op drie decimalen:

$x^{\frac{4}{5}} = 2$	$z^{1,4} = 2$
$a^{-0,3} = 2$	$b^{-1\frac{2}{3}} = 5$
$c^{-1\frac{2}{3}} = 1$	$d^{-3\frac{1}{4}} = 0$
$3 \cdot p^{2\frac{1}{3}} = 12$	$\dfrac{100}{q^{1,2}} = 5$

36 **Zeppelins**

Af en toe zie je ze nog wel als reclamemiddel, zulke sigaarvormige luchtschepen. In de jaren dertig van de vorige eeuw werden ze als luxe vervoermiddel gebruikt. Een probleem was dat het draaggas door de huid van het luchtschip ontsnapte. Een verlies van 50% per 10 dagen was normaal.

Een zeppelin heeft op tijdstip 0 nog 100.000 m^3 draaggas.
De hoeveelheid draaggas na t dagen noemen we $G(t)$ (in duizenden m^3).
We gaan uit van een verlies van 50% per 10 dagen.
Noem de groeifactor per dag g.

a Laat zien dat geldt $g = 2^{-0,1}$.
Geef ook de waarde van g afgerond op 3 decimalen.

b Hoeveel procent van het draaggas gaat verloren in 12 dagen?

Er geldt $G(t) = 100 \cdot \left(2^{-0,1}\right)^t = 100 \cdot 2^{-0,1t}$.

c Bereken na hoeveel dagen 25% van het draaggas verloren is gegaan.

Een vergelijking als $100 \cdot 2^{-0,1t} = 75$ heb je opgelost met je rekenmachine. Dat lukt niet algebraïsch. Hoe je zo'n vergelijking snel exact en in vele decimalen nauwkeurig op kunt lossen is onderwerp van de volgende paragrafen.

Een bacteriekolonie verdubbelt elk uur. Op een gegeven moment zijn er 500 bacteriën.
Hoe lang duurt het voordat de kolonie is uitgegroeid tot 3000 *bacteriën?*
Het beantwoorden van deze vraag komt neer op het oplossen van de vergelijking $500 \cdot 2^t = 3000$, ofwel van $2^t = 6$.
$t = 2$ is te klein en $t = 3$ is te groot. Het zit er ergens tussenin.

Denk even terug naar de 1e en 2e klas: toen kreeg je de vergelijking $x^2 = 6$. Die kon je ook niet (exact) oplossen.
Toen werd de 'wortel' geïntroduceerd: $x = \sqrt{6}$ (of $x = -\sqrt{6}$).
En voor de vergelijking $x^3 = 6$ werd ook iets nieuws 'bedacht': $x = \sqrt[3]{6}$.
Iets soortgelijks doen wij voor de vergelijking $2^t = 6$.

De **exacte oplossing** van de vergelijking $2^t = 6$ noemen we $t = {}^2\log(6)$.
Spreek dat uit als "*de 2-logaritme van 6*", of korter "2-log 6".
Dus:
${}^2\log(6)$ is de tijdsduur waarin het aantal bacteriën 6 keer zo groot wordt, bij groeifactor 2.

Opmerking
Internationaal wordt een andere notatie gebruikt, waarbij het grondtal (groeifactor) op een andere plaats wordt aangegeven: $\log_2(6)$

37

a Bereken met je GR (met intersect of solver) de oplossing van de vergelijking $2^t = 6$ in 3 decimalen nauwkeurig.

Jouw GR heeft een mogelijkheid om ${}^2\log(3)$ uit te rekenen.

b Zoek uit hoe dat op jouw GR werkt en controleer of je dezelfde uitkomst krijgt als zojuist.

c Geef de exacte oplossing van de vergelijking $5^t = 10$.
Geef ook een benadering van de oplossing in 3 decimalen.

d Vul in:
$t = {}^3\log(7{,}5)$ is de oplossing van de vergelijking $(...)^t = ...$
Ofwel: ${}^3\log(7{,}5)$ is de tijdsduur waarin het aantal bacteriën ... keer zo groot wordt, bij groeifactor ... .

38

a Vul in:
${}^3\log(81)$ is de oplossing van de vergelijking $(...)^t = ...$
Ofwel: ${}^3\log(81)$ is de tijdsduur waarin het aantal bacteriën ... keer zo groot wordt, bij groeifactor ... .

b Hoe groot is ${}^3\log(81)$ dus?

39 Een kolonie bacteriën verdubbelt elk uur. ${}^{2}\log(8)$ is het aantal uur dat het duurt voordat deze kolonie bacteriën precies 8 keer zo groot is. Dat getal is dus exact 3.

a Geef zo ook de exacte waarden van de volgende logaritmen. Gebruik je rekenmachine alleen maar om je antwoord te controleren.

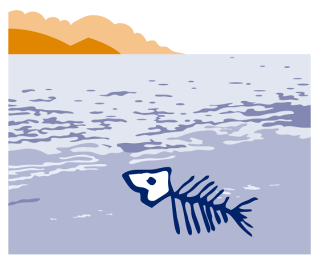
${}^{2}\log(4)$	${}^{2}\log(\frac{1}{2})$
${}^{2}\log(32)$	${}^{2}\log(\frac{1}{4})$
${}^{2}\log(2)$	${}^{2}\log(1)$
${}^{2}\log(1024)$	${}^{2}\log(\sqrt{2})$

b Neem over en vul op de juiste plaatsen de woorden "groeifactor", "tijdsduur" en "vergrotingsfactor" in.

${}^{2}\log(64) = 6$

………… ………… …………

40 In een sterk verontreinigd meer neemt de hoeveelheid licht per meter die je duikt af met 50%. We gaan ons de volgende vraag stellen: *Hoeveel meter moet je duiken voordat er nog maar 15% van de hoeveelheid licht over is?*



a Noteer het antwoord op deze vraag met behulp van een logaritme: ${}^{\cdots}\log(...)$.
Op hoeveel cm diepte is dat?

b Schrijf precies op wat in deze context de betekenis is van: ${}^{0,5}\log(0{,}32)$.

${}^{0,5}\log(0{,}125)$ is het aantal meter dat je moet duiken voordat de hoeveelheid licht $0{,}125$ keer zo groot is. Dat getal is dus exact 3.

c Geef zo ook de exacte waarden van de volgende logaritmen. Gebruik je rekenmachine alleen maar om je antwoorden te controleren.

${}^{0,5}\log(0{,}5)$	${}^{0,5}\log(4)$
${}^{0,5}\log(0{,}25)$	${}^{0,5}\log(32)$
${}^{0,5}\log(1)$	${}^{0,5}\log(2)$

d Neem over en vul op de juiste plaatsen de woorden "groeifactor", "tijdsduur" en "vergrotingsfactor" in.

${}^{0,5}\log(16) = -4$

………… ………… …………

We bekijken een exponentieel groeiproces met groeifactor g.
$^g\log(x)$ is de tijdsduur die nodig is om de hoeveelheid x keer zo groot te laten worden.
$g^t = x$ is gelijkwaardig met $^g\log(x) = t$.
We nemen de getallen g en x positief en $g \neq 1$.

Opmerking
Logaritmen kun je dus onmiddellijk vertalen naar exponenten. Hieronder staan drie equivalanties: elke rekenzin met logaritme betekent precies hetzelfde als de rekenzin met exponenten die ernaast staat.

$^3\log(729) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3^6 = 729$
$^9\log(x) = 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 9^{1{,}5} = x$
$^p\log(100) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 100$

41
a Bepaal de positieve getallen x en p hierboven.
b Los exact op voor $x > 0$:

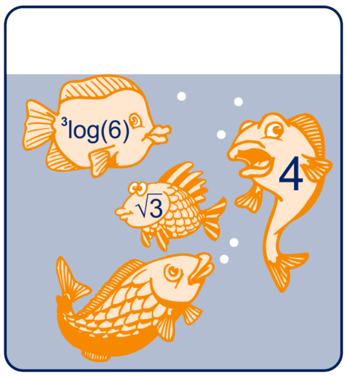
$^2\log(x) = 8$	$^8\log(x) = 2$
$^2\log(8) = x$	$^8\log(2) = x$
$^x\log(2) = 8$	$^x\log(8) = 2$

De logaritme met grondtal 10, dus $^{10}\log(...)$ wordt erg vaak gebruikt. Zelfs zó vaak, dat afgesproken is dat het weggelaten mag worden en er een apart knopje voor op je rekenmachine zit.
Je bent het waarschijnlijk ook al tegengekomen bij de vakken natuurkunde en/of scheikunde (als je die vakken hebt).

$\log(...)$ betekent $^{10}\log(...)$.

Voorbeeld
$\log(100) = {}^{10}\log(100) = 2$, want $10^2 = 100$.
$\log(0{,}001) = {}^{10}\log(0{,}001) = -3$, want $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$.

Nieuwe getallen
Soms komen logaritmen mooi uit. Zo is $^3\log(9)$ geen nieuw getal: het is een andere schrijfwijze voor het getal 2.
Meestal komen logaritmen niet mooi uit. Zo kenden we het getal $^3\log(10)$ nog niet. En het is wel even wennen aan nieuwe getallen. Zoiets heb je al eerder ervaren, namelijk toen je in de derde klas kennis maakte met wortels; en al op de basisschool toen je voor het eerst met breuken ging werken. Eigenlijk is er nu weer hetzelfde aan de hand. Vergelijk maar eens de vragen over breuken, wortels en logaritmen in de volgende opgave.



42 Welke getallen zijn geheel, welke niet?
$\frac{12}{3}$, $\frac{11}{3}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{7}$, $^{3}\log(9)$, $^{3}\log(8)$, $\log(0{,}01)$

Voorbeeld
De volgende aanpak is vaak erg handig om exponentiële vergelijkingen op te lossen.
We willen $^{12}\log(8)$ berekenen. Noem dit getal even t. Dan:
$\left(\frac{1}{2}\right)^t = 8$
$2^{-t} = 2^3$
$t = 3$, dus $^{12}\log(8) = 3$

Voorbeeld
Bereken $^{\sqrt{27}}\log\left(\frac{1}{27}\sqrt{3}\right)$. Noem het getal weer t.
$\left(\sqrt{27}\right)^t = \frac{1}{27}\sqrt{3}$
$\left(\left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^t = 3^{-3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
$3^{1\frac{1}{2}t} = 3^{-2\frac{1}{2}}$
$1\frac{1}{2}t = -2\frac{1}{2}$
$t = -\frac{5}{3}$, dus $^{\sqrt{27}}\log\left(\frac{1}{27}\sqrt{3}\right) = -\frac{5}{3}$

43 Bereken zo ook de volgende logaritmen zonder rekenmachine.

$^{7}\log(1)$	$^{7}\log(7\sqrt{7})$	$^{7}\log\left(\frac{1}{49}\right)$
$^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{8}\right)$	$^{\frac{1}{2}}\log(32)$	$^{\frac{1}{2}}\log(1)$
$^{1\frac{1}{2}}\log\left(\frac{2}{3}\right)$	$^{1\frac{1}{2}}\log\left(\frac{4}{9}\right)$	$^{1\frac{1}{2}}\log\left(2\frac{1}{4}\right)$
$^{0,1}\log(10)$	$^{0,1}\log(0{,}001)$	$^{0,1}\log(\sqrt{10})$
$^{g}\log(1)$	$^{g}\log(g)$	$^{g}\log\left(\frac{1}{g}\right)$
$^{g}\log(\sqrt[3]{g})$	$^{g}\log\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)$	$^{g}\log(g^7)$

Opmerking
De functies **[MAAL 3]** en **[DEEL DOOR 3]** zijn elkaars **inverse**.
Dat betekent het volgende.

In woorden
Als je op een getal eerst de ene functie laat werken en daarna op de uitkomst de andere functie, dan krijg je het oorspronkelijke getal terug.

In machientjestaal
x → **[MAAL 3]** → **[DEEL DOOR 3]** → x
x → **[DEEL DOOR 3]** → **[MAAL 3]** → x

In formuletaal

$(x \cdot 3) : 3 = x$

$(x : 3) \cdot 3 = x$

44 Bereken zonder rekenmachine:

$\frac{2015}{3} \cdot 3$ $\quad\quad$ $\frac{\pi}{3} \cdot 3$

$\frac{2015 \cdot 3}{3}$ $\quad\quad$ $\frac{\pi \cdot 3}{3}$

45 **[3-de MACHTSWORTEL]** en **[TOT DE MACHT 3]** zijn elkaars inverse.

a Zeg op drie manieren wat dat betekent: in woorden, in machientjestaal en in formuletaal.

b Bereken exact zonder rekenmachine:

$(\sqrt[3]{2015})^3$ $\quad\quad$ $(\sqrt[3]{\pi})^3$

$\sqrt[3]{2015^3}$ $\quad\quad$ $\sqrt[3]{\pi^3}$

46 **[3 TOT DE MACHT _]** en **[3 LOG VAN _]** zijn elkaars inverse.

a Zeg op drie manieren wat dat betekent: in woorden, in machientjestaal en in formuletaal.

b Bereken exact zonder rekenmachine:

${}^{3}\log(3^{2015})$ $\quad\quad$ ${}^{3}\log(3^{\pi})$

$3^{{}^{3}\log(2015)}$ $\quad\quad$ $3^{{}^{3}\log(\pi)}$

Algemeen

$g^{{}^{g}\log(x)} = x$ en ${}^{g}\log(g^{x}) = x$.

g heet het **grondtal** van de logaritme.

47 We controleren deze twee formules nog eens voor drie gevallen die mooi uitkomen.

a Bereken zonder rekenmachine:

${}^{2}\log(8)$ $\quad\quad$ ${}^{2}\log(\frac{1}{4})$ $\quad\quad$ ${}^{0,1}\log(10)$

$2^{{}^{2}\log(8)}$ $\quad\quad$ $2^{{}^{2}\log(\frac{1}{4})}$ $\quad\quad$ $0,1^{{}^{0,1}\log(10)}$

b Bereken zonder rekenmachine:

2^5 $\quad\quad$ 2^{-3} $\quad\quad$ $0,1^2$

${}^{2}\log(2^5)$ $\quad\quad$ ${}^{2}\log(2^{-3})$ $\quad\quad$ ${}^{0,1}\log(0,1^2)$

48 Het grondtal van een logaritme kan niet elk getal zijn.

a Probeer maar eens uit te rekenen wat ${}^{1}\log(7)$, ${}^{0}\log(7)$ en ${}^{-7}\log(7)$ zouden moeten zijn. Waarom lukt dat niet?

Ook kun je niet van elk getal de logaritme nemen.

b Probeer maar eens uit te rekenen wat ${}^{2}\log(-4)$ en ${}^{2}\log(0)$ zouden moeten zijn.
Waarom lukt dat niet?

Afspraak
${}^{g}\log(x)$ bestaat alleen als $x > 0$ en $g > 0$ en $g \neq 1$.

John Napier, ook bekend onder de naam John Neper (Edinburgh, 1550-1617), was een Schotse wiskundige die vooral naam heeft gemaakt met zijn uitvinding van de logaritmen. John studeerde enige tijd aan de St Andrews universiteit maar verbleef ook geruime tijd in andere landen van Europa. Hij was een overtuigd protestant en vooral gepassioneerd door de theologie. In 1593 publiceerde hij een religieus werk met de titel *Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John* dat in het Nederlands, Frans en Duits werd vertaald zodat hij ook bekend werd op het vasteland. De wiskunde beoefende hij voornamelijk als een liefhebberij.

Bron: Wikipedia


John Napier

Tenslotte
Op je GR zit een functie om een logaritme met een grondtal ongelijk aan 10 uit te rekenen, maar met een 'gewone' rekenmachine kan dat (meestal) niet.
Op zo'n rekenmachine zit dan alleen een knopje met 'log', ofwel met de 10-log.
Hoe kun je dan toch bijvoorbeeld ${}^{2}\log(3)$ uitrekenen?
Zonder uit te leggen *waarom* deze manier werkt, geven wij een formule waarmee je dit op zo'n rekenmachine uit kunt rekenen.

Formule: ${}^{g}\log(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(g)}$

Dus om ${}^{2}\log(3)$ uit te rekenen, tik je in $\dfrac{\log(3)}{\log(2)}$.
Deze manier werkt natuurlijk ook op je GR!

49 Benader met je (gewone of grafische) rekenmachine in drie decimalen:

${}^{4}\log(5)$	${}^{0{,}25}\log(25)$
${}^{6}\log(\frac{1}{5})$	${}^{2}\log(\sqrt{3})$

50

a Bereken in één decimaal nauwkeurig: ${}^{2}\log(3)$, ${}^{2}\log(5)$ en ${}^{2}\log(15)$.

b Welk verband lijkt te bestaan tussen deze drie logaritmen?

c Iemand denkt dat ${}^{2}\log(3) + {}^{2}\log(5) = {}^{2}\log(8)$.
Wat denk jij?

d Als je vermoeden van vraag **b** juist is, wat staat er dan op de plaats van de puntjes hieronder?
${}^{3}\log(4) + {}^{3}\log(10) = {}^{3}\log(\ldots)$.
Controleer je vermoeden met je rekenmachine door de getallen op 2 decimalen af te ronden.

51

We korten even af: ${}^{2}\log(3) = a$, ${}^{2}\log(5) = b$ en ${}^{2}\log(15) = c$.

a Vul in.
Dan geldt: $2^a = \ldots$, $2^b = \ldots$ en $2^c = \ldots$.

b Leg uit hoe hier uit volgt dat $a + b = c$.

c Klopt dit met je vermoeden in **opgave 50b**?

52

Een bacteriekolonie groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

a In hoeveel uur wordt de kolonie 8 keer zo groot?
En in hoeveel uur 2 keer zo groot?
En in hoeveel uur $8 \cdot 2 = 16$ keer zo groot?

Conclusie

Als je de vergrotingen vermenigvuldigt: $8 \cdot 2 = 16$
dan moet je de tijdsduren optellen: $3 + 1 = 4$

b Leg uit hoe hier uit volgt dat $a + b = c$.

c In hoeveel uur wordt de kolonie 4 keer zo groot?
En in hoeveel uur $\sqrt{2}$ keer zo groot?
En in hoeveel uur $4 \cdot \sqrt{2}$ keer zo groot?

Conclusie

Als je de vergrotingen vermenigvuldigt: $4 \cdot \sqrt{2}$
dan moet je de tijdsduren optellen: $2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

d In x uur wordt de kolonie a en (daarna) in y uur b keer zo groot.
In hoeveel uur wordt de kolonie $a \cdot b$ keer zo groot?

Conclusie

${}^{2}\log(a) + {}^{2}\log(b) = {}^{2}\log(a \cdot b)$.

Algemeen: ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
Dit is de **hoofdeigenschap van logaritmen**.

10.5 Rekenregels logaritmen

53 We controleren de hoofdeigenschap voor enkele gevallen.

a Bereken ${}^{5}\log(625) + {}^{5}\log(\frac{1}{5})$ op twee manieren, beide zonder rekenmachine.
1. Door ${}^{5}\log(625)$ en ${}^{5}\log(\frac{1}{5})$ apart uit te rekenen.
2. Door ${}^{5}\log(625) + {}^{5}\log(\frac{1}{5})$ met de hoofdeigenschap eerst te schrijven als ${}^{5}\log(...)$.

b Bereken op twee manieren met je rekenmachine:
$\log(20) + \log(5)$ en $\log(5) + \log(\frac{1}{2})$.

54 Bereken zonder rekenmachine; gebruik de hoofdeigenschap.
Schrijf telkens minstens één tussenstap op.

${}^{3}\log(6) + {}^{3}\log(1\frac{1}{2})$

${}^{\frac{1}{4}}\log(0{,}4) + {}^{\frac{1}{4}}\log(10)$

${}^{2}\log(\frac{1}{4}x) + {}^{2}\log(\frac{1}{x})$

${}^{5}\log(2\frac{1}{2}) + {}^{5}\log(0{,}08)$

${}^{30}\log(2) + {}^{30}\log(3) + {}^{30}\log(5)$

${}^{2}\log(5^{x}) + {}^{2}\log(5^{-x})$

Opmerking

Uit de hoofdeigenschap kun je andere eigenschappen van logaritmen afleiden.
Aan het begin van de paragraaf hebben wij gezien dat
${}^{2}\log(3) + {}^{2}\log(5) = {}^{2}\log(15)$,
dus:
${}^{2}\log(15) - {}^{2}\log(3) = {}^{2}\log(5)$.

Algemeen: ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(\frac{a}{b})$

55 Bereken zonder rekenmachine. Schrijf telkens minstens één tussenstap op.

${}^{4}\log(640) - {}^{4}\log(10)$

${}^{0,7}\log(10) - {}^{0,7}\log(7)$

${}^{5}\log(6) - {}^{5}\log(5) - {}^{5}\log(3) - {}^{5}\log(2)$

${}^{5}\log(2\frac{1}{2}) - {}^{5}\log(\frac{1}{2})$

${}^{7}\log(84x) - {}^{7}\log(2x) - {}^{7}\log(6)$

${}^{3}\log(27^{100}) - {}^{3}\log(9^{100})$

Opmerking

Er volgt nog een interessante formule uit de hoofdeigenschap.
Kijk maar:
${}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(x \cdot x \cdot x)$,
dus: $3 \cdot {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(x^{3})$.

Algemeen: ${}^{g}\log(x^{p}) = p \cdot {}^{g}\log(x)$

En deze rekenregel geldt niet alleen voor gehele waarden van p, maar voor *alle* waarden van p.

56

a Controleer deze rekenregel met je rekenmachine in de volgende gevallen:
$\log(1000^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \log(1000)$
en $\log(7^4) = 4 \cdot \log(7)$.

b Bereken zonder rekenmachine; schrijf ook je tussenstappen op.

$^{4}\log(2^{11})$ $\qquad$ $^{3}\log\left((\frac{1}{9})^{11}\right)$

$^{\frac{1}{4}}\log(2^{11})$ $\qquad$ $^{\frac{1}{3}}\log\left((\frac{1}{9})^{11}\right)$

c Leg uit hoe uit de laatste rekenregel volgt:
$^{g}\log(\frac{1}{x}) = -{}^{g}\log(x)$.

57

Van de getallen a, b en c is gegeven:
$^{a}\log(b) = 5$ en $^{a}\log(c) = 3$.
Bereken met behulp van de rekenregels, schrijf tussenstappen op:

$^{a}\log(b^2)$ $\qquad$ $^{a}\log(bc)$

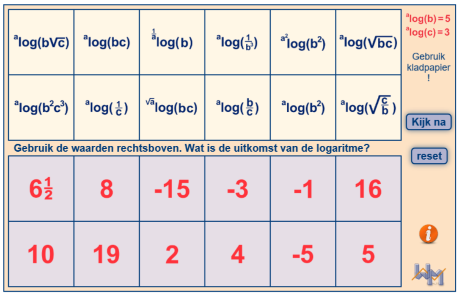
$^{a}\log(b\sqrt{c})$ $\qquad$ $^{a}\log(b^2c^3)$

$^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right)$ $\qquad$ $^{a}\log\left(\frac{1}{c}\right)$

$^{a}\log\left(\frac{1}{b^3}\right)$ $\qquad$ $^{a}\log\left(\sqrt{bc}\right)$

Opmerking
Je kunt nog meer (spelenderwijs) oefenen met de rekenregels van logaritmen met de volgende twee applets:

- ‘Mini-loco_groeifactor (1)’
- ‘Mini-loco_groeifactor (2)’



58

a, b en c zijn positieve getallen.

a Bewijs: $\log(ab) + \log(bc) + \log(ca) = 2\log(abc)$.

b Bewijs: $\log\left(\frac{a}{b}\right) + \log\left(\frac{b}{c}\right) + \log\left(\frac{c}{a}\right) = 0$.

59

a Bereken exact voor welke x geldt:

$^{2}\log(x) = 3$

$^{3}\log(x+1) = 3$

$^{4}\log(2x) = -3$

$^{5}\log(2x+1) = 3$

$^{3}\log(\sqrt{x}) = 2$

$^{2}\log(x^2-1) = 3$

$^{5}\log(\frac{1}{x}) = -2$

$^{2}\log(x^2-2x) = 3$

b Bereken exact voor welke x geldt:

$\log(x) = 3 \cdot \log(6)$

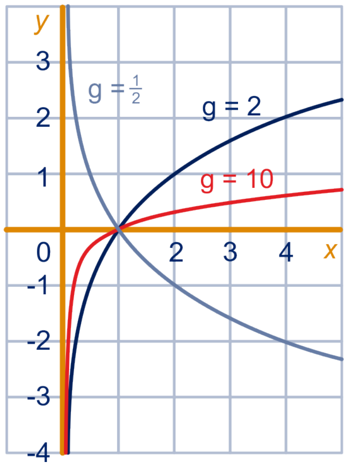
$3 \cdot \log(x) = \log(6)$

$2 \cdot \log\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \cdot \log(4)$

$\log(6) + \log\left(\frac{1}{x}\right) = \log(x)$

c Bereken exact voor welke x geldt:

- $^{2}\log(x) + {}^{2}\log(8) = {}^{2}\log(12)$
- $^{2}\log(95) - {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(5)$
- $^{5}\log(x) - {}^{5}\log(2) = {}^{5}\log(7)$
- $\log(x) + \log(40) = 4$
- $\log(x) - \log(5) = 1 + \log(7)$
- $^{2}\log(x) - {}^{2}\log(3) = {}^{2}\log(12) - {}^{2}\log(x)$



60 In de grafiek zijn de functies $y = {}^{g}\log(x)$ voor de grondtallen $g = \frac{1}{2}$, $g = 2$ en $g = 10$ getekend.

a Leg uit dat de grafieken voor elke waarde van g (met $g > 0$ en $g \neq 1$) door het punt $(1,0)$ gaan.

Je kunt zelf op je grafische rekenmachine de functies tekenen voor deze en andere waarden van g.

b Wat weet je van het grondtal g als de functie stijgend is? En wat als de functie dalend is?

c Welke lijn is asymptoot van elke functie $y = {}^{g}\log(x)$?

$y = {}^{g}\log(x)$ is de standaard logaritmische functie met grondtal g (met $g > 0$ en $g \neq 1$).
De y-as is verticale asymptoot van de grafiek.
Als $g > 1$, dan is de functie stijgend;
als $0 < g < 1$ dan is de functie dalend.
De grafiek gaat door het punt $(1,0)$.

We gaan in de volgende opgaven de formule van deze standaard logaritmische functie veranderen en bekijken dan wat er dan met de bijbehorende grafiek gebeurt. En andersom: als we de grafiek transformeren, wat gebeurt er dan met de formule?

61 Teken op je GR de grafiek van $f(x) = -4 + {}^{2}\log(x)$.
De grafiek van f is verwant met de grafiek van de logaritmische functie $y = {}^{2}\log(x)$.

a Hoe moet je de grafiek van $y = {}^{2}\log(x)$ verschuiven om de grafiek van f te krijgen?

b Is f stijgend of dalend?

c Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f?

d Welke getallen zitten in het bereik van f? En in het domein?

e Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

f Laat met de rekenregels voor logaritmen zien dat geldt $f(x) = {}^{2}\log(\frac{1}{16}x)$.

g Met welke vermenigvuldiging krijg je dus de grafiek van f uit de grafiek van $y = {}^{2}\log(x)$?

62 $g(x) = 2 \cdot {}^{3}\log(x + 5)$.

a Hoe onstaat de grafiek van g uit die van $y = {}^{3}\log(x)$?

b Welke lijn is asymptoot van de grafiek van g?

c Welke getallen zitten in het bereik van g? En in het domein?

d Bereken exact de x-coördinaat van het punt op de grafiek van g waarvoor geldt $y = -4$.

63
a Teken in één window de grafieken van $y = {}^2\log(4x)$ en $y = {}^2\log(16x)$.
b Hoe liggen de grafieken ten opzichte van elkaar? Verklaar dit met de rekenregels.
c Voor welke x geldt: ${}^2\log(4x) \leq 7$?

De grafiek van $y = b + a \cdot {}^g\log(x - d)$ krijg je uit de grafiek van $y = {}^g\log(x)$ door deze verticaal te vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor a, daarna b omhoog en d naar rechts te schuiven.
De lijn $x = d$ is verticale asymptoot van de grafiek.
De grafiek gaat door het punt $(d + 1, b)$.

De grafiek van $y = {}^g\log(cx)$ krijg je uit de grafiek van $y = {}^g\log(x)$ door deze horizontaal te vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor $\frac{1}{c}$.
Omdat ${}^g\log(c \cdot x) = {}^g\log(c) + {}^g\log(x)$ krijg je de grafiek ook door deze met ${}^g\log(c)$ omhoog te schuiven.

Opmerking
Net zoals je bij het transformeren van bijvoorbeeld sinusoïden en parabolen gezien hebt, zijn alle combinaties van horizontale en verticale transformaties mogelijk en is de volgorde vaak van belang.

Voorbeeld
Neem de grafiek van $y = \text{-}6 + 3 \cdot \log(\frac{1}{4}x - 5)$.
Eerst herschrijven: $y = \text{-}6 + 3 \cdot \log\left(\frac{1}{4}(x - 20)\right)$.
Je krijg deze grafiek uit de grafiek van $y = \log(x)$ door achtereenvolgens de volgende transformaties toe te passen:

- verticaal vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor 3
  $\rightarrow y = 3 \cdot \log(x)$
- 6 naar beneden schuiven
  $\rightarrow y = \text{-}6 + 3 \cdot \log(x)$
- horizontaal vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor 4
  $\rightarrow y = \text{-}6 + 3 \cdot \log(\frac{1}{4}x)$
- 20 naar rechts schuiven
  $\rightarrow y = \text{-}6 + 3 \cdot \log\left(\frac{1}{4}(x - 20)\right) = \text{-}6 + 3 \cdot \log(\frac{1}{4}x - 5)$

64
Bekijk nogmaals het voorbeeld hierboven met de functie $y = \text{-}6 + 3 \cdot \log(\frac{1}{4}x - 5)$.
In de uitwerking van het voorbeeld wordt eerst vermenigvuldigd en daarna verschoven (zowel horizontaal als verticaal).
a Wat zijn de verschuivingen (en vermenigvuldigingen) als je eerst verschuift en daarna vermenigvuldigt? Toon de

juistheid aan door de formule te geven na elke tussenstap, zoals in het voorbeeld.

b Wat is de asymptoot van deze grafiek?
En de exacte coördinaten van het snijpunt met de x-as?

c Beschrijf (met formules bij de tussenstappen) hoe je de grafiek van $y = 5 - 3 \cdot {}^{2}\log\,(4x + 10)$ krijgt uit de grafiek van $y = {}^{2}\log\,(x)$.

65 $h(x) = \log(4 - x)$

a Teken in één window de grafiek van h en die van $y = \log(x)$.

b Hoe krijg je de grafiek van h uit die van $y = \log(x)$?

c Welke getallen zitten in het bereik van h? En in het domein?

Logaritmische functies kunnen we (nog) niet differentiëren, maar benaderen van de helling in een punt lukt wel.

d Benader de helling van de grafiek van h in het snijpunt met de x-as. Rond je antwoord af op 3 decimalen.

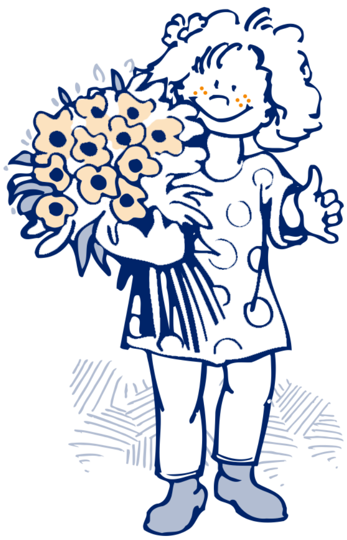
66 We bekijken de bundel functies $y = 1 - {}^{3}\log\,(2x - p)$.

a Hoe ontstaan de grafieken in de bundel uit elkaar?

b Bereken exact voor welke waarde van p de grafiek uit de bundel door het punt $(\frac{5}{12},2)$ gaat.

c Voor welke waarde van p is de lijn $x = -3$ asymptoot van de grafiek?

d Wat is de asymptoot van $y = 1 - {}^{3}\log\,(2x - p)$?



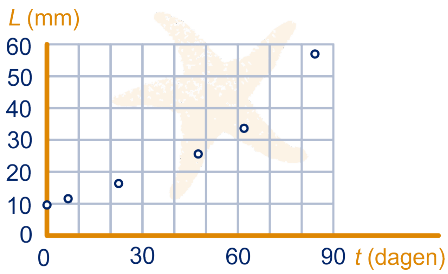
67

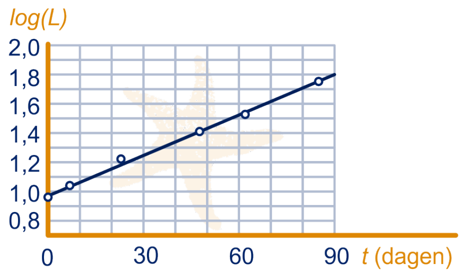
Zes momentopnamen van een zeester

Van een zeester is tijdens de groei in ongeveer 3 maanden de armlengte L gemeten (in mm), vanuit het midden van de ster. De resultaten staan in de tabel. In de tabel is ook de logaritme genomen van de armlengte.

dagen	0	7	23	48	62	85
L (mm)	9	11	16	26	34	57
$\log(L)$	0,9542	1,0414	1,2041	1,4150	1,5315	1,7559

Hieronder links is een grafiek getekend van de armlengte L als functie van de tijd t in dagen. De meetpunten liggen duidelijk niet op een rechte lijn.
Kennelijk groeit de armlengte *niet lineair* in de tijd.
Rechts ernaast is de grafiek getekend van $\log(L)$ als functie van de tijd t in dagen. De meetpunten liggen nu wel nagenoeg op een rechte lijn.





Een formule van de getekende rechte lijn door deze punten is:
$\log(L) = 0{,}0092t + 0{,}9717$.

a Bereken met deze formule de lengte op tijdstippen $t = 0$ en $t = 85$ en vergelijk de uitkomsten met de werkelijk gemeten waarden in de tabel.

b Bereken met de formule na hoeveel dagen de zeester een armlengte van 75 mm heeft.

De formule $\log(L) = 0{,}0092t + 0{,}9717$ kun je omschrijven naar $L = ...$, als volgt: $L = 10^{0{,}0092t+0{,}9717}$.

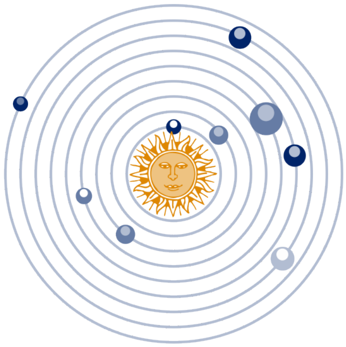
c Laat met rekenregels voor machten zien dat geldt:
$L = 9{,}369 \cdot 1{,}0214^t$

Blijkbaar is de groei van de armlengte van de zeester *exponentieel*.

d Met hoeveel procent groeit de armlengte per dag? Rond af op 1 decimaal.

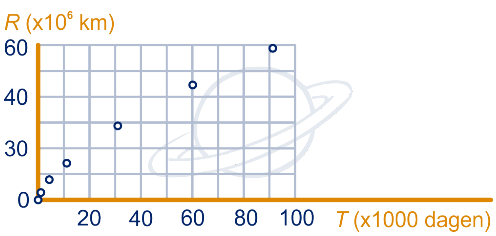
68 **De planetenbanen**

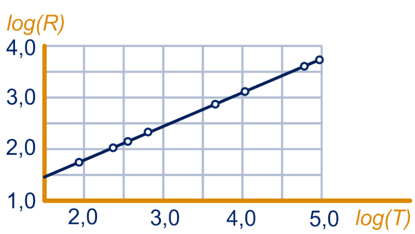
Tot voor kort waren er negen planeten: Aarde, Mars, Mercurius, Venus, Jupiter, Saturnus, Uranus, Neptunus en Pluto. In augustus 2006 veranderde dit. Pluto wordt nu geen planeet meer genoemd, maar dwergplaneet. Hoe lang de planeten over een omwenteling om de zon doen en hoe ver ze gemiddeld van de zon af staan, vind je in de tabel. In de laatste twee kolommen staan de 10-logaritmen van de omlooptijd en de afstand tot de zon.



planeet	omlooptijd T (in dagen)	gem. afstand R ($\times 10^6$ km)	$\log(T)$	$\log(R)$
Mercurius	88	57,9	1,94	1,76
Venus	225	108,2	2,35	2,03
Aarde	365	149,6	2,56	2,17
Mars	687	227,7	2,84	2,36
Jupiter	4329	778,3	3,64	2,89
Saturnus	10753	1427,0	4,03	3,15
Uranus	30660	2870,0	4,49	3,46
Neptunus	60150	4497,0	4,78	3,65
Pluto	90670	5907,0	3,96	3,77

Hieronder staat links de grafiek met het verband tussen R en T en rechts de grafiek met het verband tussen $\log(R)$ en $\log(T)$.





Uit de grafieken blijkt dat er duidelijk geen lineair verband is tussen T en R, maar wel (ongeveer) tussen $\log(T)$ en $\log(R)$.
Dus: $\log(R) = a \cdot \log(T) + b$ voor zekere constanten a en b.

a Uit de gegevens over Mercurius en Venus volgt dat:
$\log(57{,}9) = a \cdot \log(88) + b$ en $\log(108{,}2) = a \cdot \log(225) + b$.
Bereken hieruit a en b afgerond op 3 decimalen.

De getekende rechte lijn in de grafiek heeft formule:
$\log(R) = 0{,}667 \cdot \log(T) + 0{,}466$.

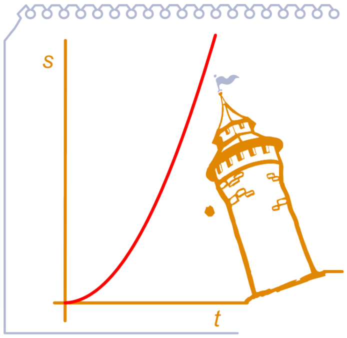
b Controleer of deze formule klopt voor Saturnus.

c Laat met rekenregels voor logaritmen zien dat geldt:
$\log(R) = \log(2{,}924 \cdot T^{0{,}667})$.

Blijkbaar geldt $R = 2{,}924 \cdot T^{0{,}667}$, dus er is sprake van een *machtsverband*.

d Bereken met deze machtsformule hoeveel keer zo groot de theoretische omlooptijd van een planeet wordt als de afstand tot de zon 8 keer zo groot wordt.

In de natuur en in de techniek is er vaak een lineair verband tussen de *logaritmen* van twee grootheden.



Voorbeeld
Een steen valt van een toren. Na t seconden is de steen s meter gevallen. Dan geldt: $s = 4{,}9 \cdot t^2$.
We gaan deze formule stapsgewijs anders schrijven:

$$s = 4{,}9 \cdot t^2$$

neem links en rechts de $\log(\ldots)$

$$\log(s) = \log(4{,}9 \cdot t^2)$$

rekenregel voor logaritme

$$\log(s) = \log(4{,}9) + \log(t^2)$$

rekenregel voor logaritme

$$\log(s) \approx 0{,}69 + 2 \cdot \log(t)$$

Opmerking: Je kunt de berekening ook van onder naar boven maken.

69

a Ga na dat elke stap in de afleiding hierboven correct is.
Kijk ook goed naar de weg van onderen naar boven.

Als je s tegen t uitzet in een grafiek, krijg je een (deel van een) parabool.

b Wat voor grafiek krijg je als je $\log(s)$ tegen $\log(t)$ uitzet?

70

a Schrijf de volgende formules zonder logaritmen.
- $\log(y) = 2 \cdot \log(x) + \log(3)$
- $\log(y) = 1\frac{1}{2} - \log(x)$
- $\log(y) = \frac{1}{2} \cdot \log(x) + 3$

b Schrijf de volgende formules in de gedaante $\log(y) = a \cdot \log(x) + b$.
- $y = 10 \cdot x^4$
- $y = 0{,}2 \cdot \sqrt{x}$
- $y = \frac{8}{x}$

71 De gemiddelde levensduur van een zoogdier in gevangenschap (bijvoorbeeld in dierentuinen) hangt af van de grootte van het dier. De onderzoeker Sachs vond de volgende formule: $\log(T) = 1{,}07 + 0{,}20 \cdot \log(G)$, waarbij T de levensduur is in jaren en G het gewicht in kg.

a Bereken met deze formule hoe oud olifanten (4000 kg) gemiddeld worden in een dierentuin.

De gemiddelde levensduur van gevangen giraffes is 44 jaar.

b Bereken met de formule het (gemiddelde) gewicht van een giraffe. Rond je antwoord af op een tiental kg.

De grafiek van het verband tussen $\log(T)$ en $\log(G)$ is een rechte lijn.

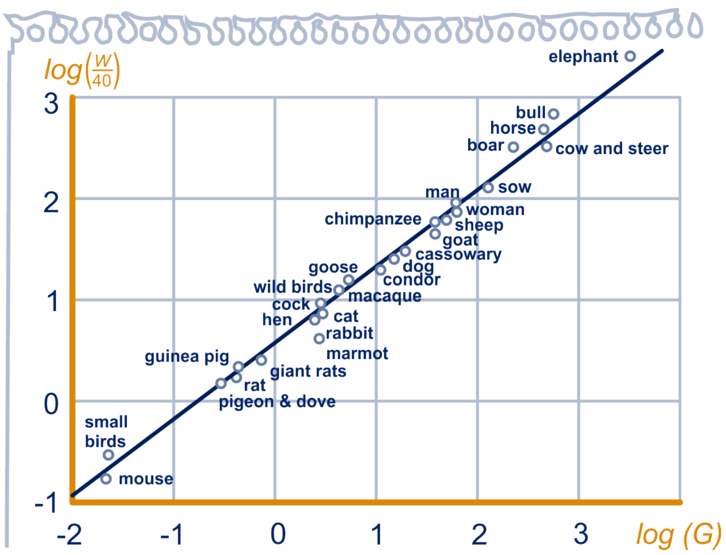
c Wat is de richtingscoëfficiënt van deze lijn?

d Laat algebraïsch zien dat een dier dat dubbel zo zwaar is gemiddeld 15% langer leeft.

Tussen T en G bestaat een machtsverband: $T = a \cdot G^b$.

e Bereken de waarden van a en b, afgerond op 2 decimalen.

72 Het lichaamsgewicht G van een warmbloedig dier (in kg) en zijn dagelijkse warmteproductie W (in joule) hangen samen. Hieronder staat daarvan een grafiek; op de horizontale as is $\log(G)$ uitgezet, op de verticale as $\log(\frac{W}{40})$.



Uit de grafiek kun je aflezen dat voor de cavia (Guinea pig) geldt: $\log(G) = -0{,}35$.

a Wat is het bijbehorende gewicht van de cavia (afgerond op tientallen grammen)?

b Bepaal uit de grafiek de warmteproductie van een cavia.

Een formule bij de getekende lijn is:
$\log(\frac{W}{40}) = 0{,}50 + 0{,}75 \cdot \log(G)$.

c Geef (stapsgewijs) een formule voor W als functie van G.

73 Geluid is een trilling in de lucht die door het gehoororgaan waargenomen wordt. De intensiteit I van geluid wordt uitgedrukt in watt per vierkante meter (W/m^2).
Uit experimenten blijkt dat geluid met een intensiteit van één biljoenste (10^{-12}) W/m^2 voor jonge mensen nog net hoorbaar is. Dit wordt de gehoorgrens genoemd. Het andere uiterste is de pijngrens: die ligt bij een geluidsintensiteit van 10 W/m^2.
De geluidsintensiteit van het tikken van een horloge op 1 meter afstand komt ongeveer overeen met de gehoorgrens; het geluid van een opstijgend straalvliegtuig met de pijngrens.
Uit de intensiteit I leidt men een meer praktische grootheid af, het geluidsdrukniveau L, volgens de formule:
$L = 10 \cdot \log(\frac{I}{I_0})$, waarbij I_0 de geluidsintensiteit is die hoort bij de gehoorgrens, dus $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.
De eenheid van geluidsdrukniveau heet decibel, afgekort dB, genoemd naar Alexander Graham Bell, de uitvinder van de telefoon.

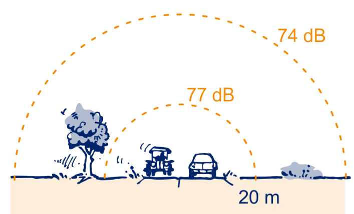
a Bereken exact de geluidsdrukniveaus die horen bij de gehoorgrens en de pijngrens.

Op een zekere afstand produceren twee personenauto's elk een geluidsdrukniveau van $80{,}0$ dB. De geluidsintensiteit is twee maal de geluidsintensiteit van één personenauto.

b Bereken de waarde van hun gezamenlijk geluidsdrukniveau in één decimaal nauwkeurig.

Het verkeerslawaai in de buurt van een verkeersweg is onder meer afhankelijk van de afstand tot de weg. Voor afstanden van 20 tot 1000 meter gebruikt men de volgende formule:
$L = L_0 - 10\log(2\pi R)$, waarbij

- R de afstand tot de as van de weg in meters is,
- L_0 het geluidsdrukniveau van het verkeer op de as van de weg is,
- L het geluidsdrukniveau op R meter afstand van de as van de weg is.



Bij een afstand van $R = 20$ m behoort een geluidsdrukniveau van 77 dB.

c Bereken in meters nauwkeurig welke afstand R behoort bij een geluidsdrukniveau van 74 dB.

Examen havo wiskunde B, 1995 tijdvak 1

10.7 Logaritmische verbanden

Nog meer rekentechniek

Voorbeeld

De hoeveelheid gas G in duizenden m^3 van een zeppelin wordt gegeven door de formule: $G = 128 \cdot 2^{-0,1t}$.

Vraag:

Geef een formule voor t uitgedrukt in G.

Antwoord:

$$G = 128 \cdot 2^{-0,1t}$$

links en rechts de ${}^2\log(...)$ nemen

$${}^2\log(G) = {}^2\log(128 \cdot 2^{-0,1t})$$

rekenregels gebruiken

$${}^2\log(G) = {}^2\log(128) + {}^2\log(2^{-0,1t}) = 7 + t \cdot {}^2\log(2^{-0,1})$$

vereenvoudigen

$${}^2\log(G) = 7 + t \cdot -0,1 = 7 - 0,1t$$

herschrijven naar $t = ...$

$$t = 70 - 10 \cdot {}^2\log(G)$$

74

a Schrijf telkens de formule om in de vorm $x = ...$
Gebruik daarbij de logaritme met hetzelfde grondtal als de exponentiële formule en schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

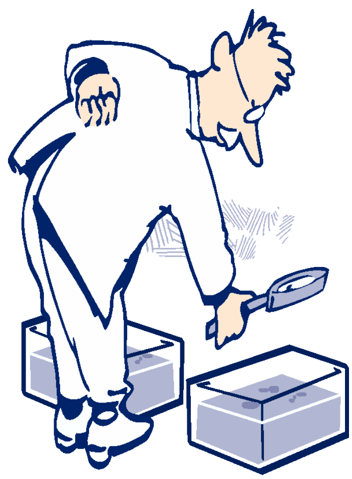
- $y = 4 \cdot 2^x$
- $y = 3 + 4 \cdot 2^x$
- $y = \frac{1}{3} \cdot 3^x$
- $y = 2 - 9 \cdot 3^x$

De lengte L (in mm) van de armen van een zeester groeit volgens de formule $L = 9,37 \cdot 1,02^t$ (t in dagen).

b Schrijf deze formule stapsgewijs in de vorm $t = a + b \cdot \log(L)$.
Rond de waarden van a en b af op 1 decimaal.

75

Een bioloog doet onderzoek naar de invloed van fosfaten in het water op de groei van algen. Om de groei te kunnen bestuderen, heeft hij twee bakken met algen genomen. De ene bak bevat water met veel fosfaten, de andere fosfaatarm water. Voor de bak met fosfaatrijk water geldt voor de hoeveelheid algen: $A = 10,0 \cdot 1,6^t$.
En voor de bak met fosfaatarm water geldt: $A = 10,0 \cdot 1,3^t$.
In beide formules is de tijd t in weken.

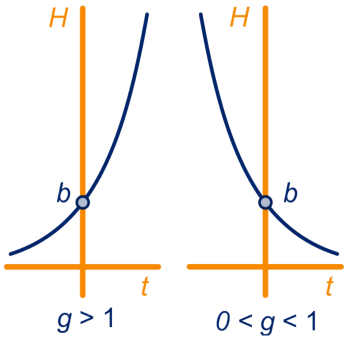


a Schrijf beide formules om in de vorm $t = ...$

b Bereken algebraïsch na hoeveel dagen de hoeveelheid algen in het fosfaatrijke water het dubbele is van de hoeveelheid in het fosfaatarme water.

Exponentiële groei

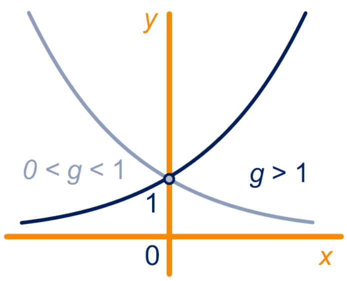
- Als je de hoeveelheid één tijdseenheid later (of één lengte-eenheid dieper of ...) krijgt door de hoeveelheid nú (of op deze hoogte of ...) met een vaste factor te vermenigvuldigen, spreken we van **exponentiële groei**.
  De factor waar je per tijdseenheid (of lengte-eenheid of ...) mee vermenigvuldigt, noemen we de **groeifactor**.
- Een hoeveelheid H groeit met factor g per uur.
  Als je met hoeveelheid b begint, dan is de hoeveelheid H na t uur:
  $H = b \cdot g^t$.
  Als $g > 1$ is H stijgend.
  Als $0 < g < 1$, dan is H dalend.
  De grafiek gaat door het punt $(0,b)$.



- Als een hoeveelheid met 2% per uur afneemt, groeit die hoeveelheid exponentieel met groeifactor $0{,}98$ per uur.
  Als een hoeveelheid met 2% per uur toeneemt, groeit die hoeveelheid exponentieel met groeifactor $1{,}02$ per uur.
- Stel: een hoeveelheid groeit exponentieel en wordt in 6 uur tijd 5 keer zo groot. Dan geldt voor de groeifactor g per uur: $g^6 = 5$. Dus $g = \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}}$.
- Veronderstel dat een hoeveelheid van een stof exponentieel af- of toeneemt. De tijd waarin die hoeveelheid *halveert*, is de **halfwaardetijd** of **halveringstijd** van die stof.
  De tijd waarin die hoeveelheid *verdubbelt*, is de **verdubbelingstijd** van die stof.

Exponentiële functies

- $y = g^x$ is de standaard exponentiële functie met grondtal g, met $g > 0$ en $g \neq 1$.
  De x-as is horizontale asymptoot van de grafiek.
  Als $g > 1$, dan is de functie stijgend;
  als $0 < g < 1$, dan is de functie dalend.
  De grafiek gaat door het punt $(0,1)$.



- De grafiek van $y = a \cdot g^x + b$ is verwant aan de grafiek van $y = g^x$.
  Je krijgt de grafiek van $y = a \cdot g^x + b$ door de grafiek van $y = g^x$ verticaal te vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor a en daarna b eenheden omhoog te schuiven.
  De lijn $y = b$ is horizontale asymptoot van de grafiek van $y = a \cdot g^x + b$.

- De grafiek van $y = g^{x-a}$ krijg je uit de grafiek van $y = g^x$ door deze a naar rechts te schuiven.
  Met behulp van een rekenregel zie je: $g^{x-a} = g^{-a} \cdot g^x$.
  Dus je kunt de grafiek van $y = g^{x-a}$ ook uit de grafiek van $y = g^x$ krijgen door deze verticaal t.o.v. de x-as met factor g^{-a} te vermenigvuldigen.
- Je krijgt de grafiek van $y = g^{cx}$ uit de grafiek van $y = g^x$ door deze horizontaal te vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor $\frac{1}{c}$.
  Omdat $g^{cx} = \left(g^c\right)^x$ is het ook de grafiek van de exponentiële functie met groeifactor g^c.
- Net zoals je bij het transformeren van bijvoorbeeld sinusoïden en parabolen gezien hebt, zijn alle combinaties van horizontale en verticale transformaties mogelijk en is de volgorde vaak van belang.

Vergelijkingen

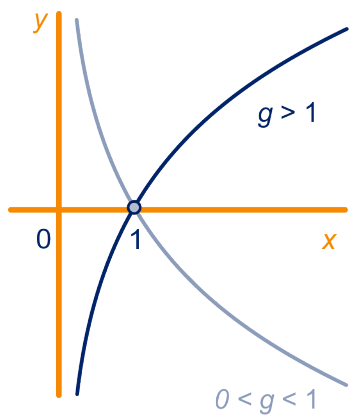
- Bij exponentiële vergelijkingen maak je eerst de grondtallen gelijk. En daarna laat je de grondtallen weg:
  $g^a = g^b \Leftrightarrow a = b$
  Voorbeeld:
  $\frac{1}{2} \cdot 2^{3x-1} = 8^{2x+1} \rightarrow 2^{-1} \cdot 2^{3x-1} = (2^3)^{2x+1} \rightarrow 2^{3x-2} = 2^{6x+3}$
  $\rightarrow 3x - 2 = 6x + 3 \rightarrow x = -\frac{5}{3}$
- Als $x^b = a$ dan $x = a^{\frac{1}{b}}$

Logaritmen

- Een hoeveelheid groeit exponentieel met groeifactor g.
  $^g\log(x)$ is de tijdsduur die nodig is om de hoeveelheid x keer zo groot te laten worden.
- $g^t = x$ is gelijkwaardig met $^g\log(x) = t$.
  We nemen de getallen g en x positief en $g \neq 1$.
  g heet het **grondtal** van de logaritme.
  $^g\log(x)$ bestaat alleen als $x > 0$ en $g > 0$ en $g \neq 1$.
- $\log(...)$ betekent $^{10}\log(...)$.
- **Rekenregels voor logaritmen:**
  - $^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$
    Dit is de **hoofdeigenschap van logaritmen**.
  - $^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
  - $^g\log(x^p) = p \cdot {}^g\log(x)$
  - $g^{^g\log(x)} = x$ en $^g\log(g^x) = x$
  - $^g\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(g)}$

Logaritmische functies

- $y = {}^{g}\log(x)$ is de standaard logaritmische functie met grondtal g (met $g > 0$ en $g \neq 1$).
  De y-as is verticale asymptoot van de grafiek.
  Als $g > 1$, dan is de functie stijgend;
  als $0 < g < 1$ dan is de functie dalend.
  De grafiek gaat door het punt $(1{,}0)$.
- De grafiek van $y = b + a \cdot {}^{g}\log(x - d)$ krijg je uit de grafiek van $y = {}^{g}\log(x)$ door deze verticaal te vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor a, daarna b omhoog en d naar rechts te schuiven.
  De lijn $y = d$ is verticale asymptoot van de grafiek.
  De grafiek gaat door het punt $(d + 1{,}0)$.
- De grafiek van $y = {}^{g}\log(cx)$ krijg je uit de grafiek van $y = {}^{g}\log(x)$ door deze horizontaal te vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor $\frac{1}{c}$.
  Omdat ${}^{g}\log(c \cdot x) = {}^{g}\log(c) + {}^{g}\log(x)$ krijg je de grafiek ook door deze met ${}^{g}\log(c)$ omhoog te schuiven.
- Net zoals je bij het transformeren van bijvoorbeeld sinusoïden en parabolen gezien hebt, zijn alle combinaties van horizontale en verticale transformaties mogelijk en is de volgorde vaak van belang.



1

Een meer bevat 10.000 m^3 water waarin 10% verontreiniging is opgelost. Dus dat meer heeft 1000 m^3 verontreiniging en 9000 m^3 schoon water.
Om het water te zuiveren wordt elke week aan de ene kant 1000 m^3 water uit het meer gepompt en aan de andere kant wordt er 1000 m^3 zuiver water ingepompt. Er ontstaat meteen een goed mengsel.

a Leg uit dat de hoeveelheid verontreiniging elke week 10% minder is dan de week ervoor.

Het aantal m^3 verontreiniging A neemt per dag exponentieel af.

b Geef een formule voor A uitgedrukt in t, hierbij is t het aantal dagen na het begin van de schoonmaak.

Na een aantal dagen is de hoeveelheid verontreiniging afgenomen tot 100 m^3.

c Bereken langs algebraïsche weg dit aantal dagen. Rond je antwoord af op een geheel aantal.

d Hoeveel duizenden m^3 water is er dan ongeveer in het meer gepompt? Rond je antwoord af op een geheel aantal.

2

Op grote hoogte is de luchtdruk veel lager dan op zeeniveau. Afgezien van kleine schommelingen is de luchtdruk op zeeniveau 1000 hectopascal. De luchtdruk is een exponentiële functie van de hoogte. Op 5 km hoogte is de luchtdruk ongeveer 500 hectopascal.

a Hoe groot is de luchtdruk op 1 km hoogte?

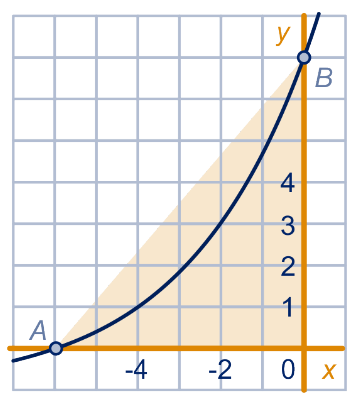
De luchtdruk op hoogte h km noemen we L (in hectopascal).

b Geef een formule voor L uitgedrukt in h.

c Herschrijf je formule uit onderdeel **b** tot een formule voor h uitgedrukt in L.

3

Gegeven is de functie $y = 8 \cdot \sqrt{2}^x - 1$.



De grafiek kun je uit de grafiek van $y = 2^x$ krijgen door twee vermenigvuldigingen en één verschuiving.

a Laat zien welke vermenigvuldigingen en verschuiving dat zijn en in welke volgorde ze worden toegepast.

b Geef een formule van de asymptoot van de grafiek.

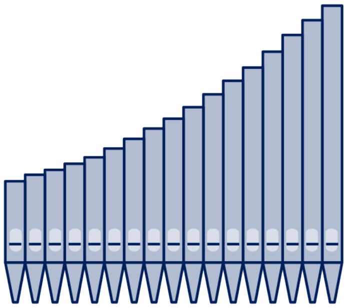
De grafiek snijdt de x-as in A en de y-as in B.

c Bereken exact de oppervlakte van driehoek OAB.

d Schrijf de formule stapsgewijs in de vorm $x = a + b \cdot {}^2\log(y - c)$.

4

Een groot kerkorgel telt soms wel enkele duizenden orgelpijpen. De pijpen zijn gegroepeerd in registers. Zo'n register is een rij van ruim 50 pijpen van verschillende lengte. Een register onderscheidt zich van andere registers door vorm en materiaal van de pijpen. Elk register klinkt daardoor anders. Bij het bouwen van een orgel moet voor elke pijp de juiste lengte bepaald worden. De berekening van de lengtes gaat per register en kan als volgt beschreven worden.
Nummer de pijpen van klein naar groot: 0, 1, 2, ...
Als de kleinste pijp lengte L_0 heeft, dan moet voor de lengte L van de pijp met nummer n gelden:
$L = L_0 \cdot 2^{\frac{n}{12}}$ (L en L_0 in mm).



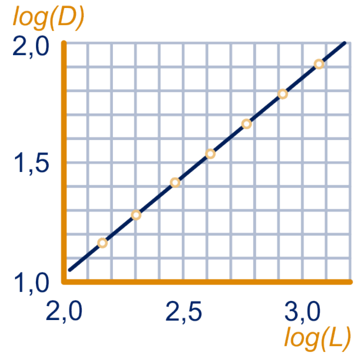
a Toon aan dat per register voor elke pijp (behalve de kleinste) geldt: de lengte van die pijp is ongeveer 6% groter dan de lengte van zijn voorganger.

Voor het verkrijgen van de juiste klank is onder andere het verband tussen de lengte (L) en de diameter (D) van de pijpen van belang. Voor elk register is dat verband anders. Sommige orgelbouwers hanteerden vroeger een vuistregel die neerkwam op: per register moet voor de pijpen het quotiënt $\frac{D}{L^{0,75}}$ dezelfde uitkomst hebben.

Van een zeker register heeft de pijp met nummer 16 een lengte van 500 mm en een diameter van 60 mm.

b Bereken welke diameter de pijp met nummer 30 uit hetzelfde register volgens de vuistregel moet hebben. Rond het antwoord af op gehele millimeters.

Onderzoekers hebben lengte en diameter van een aantal pijpen van een ander register opgemeten. De resultaten van $\log(D)$ hebben ze in een grafiek uitgezet tegen $\log(L)$ (met D en L in mm). Zie de figuur. De punten liggen op een rechte lijn.
Een van de onderzochte pijpen had een lengte van 410 mm.



c Welk punt uit de grafiek is deze pijp?
Lees zo nauwkeurig mogelijk de diameter van deze pijp af.

Een formule bij de lijn is $0{,}903 \log(D) - 0{,}741 \log(L) = 0{,}034$.
Deze formule kan worden herleid tot een formule van de vorm $D = a \cdot L^b$.

d Bereken langs algebraïsche weg de waarden van a en b, afgerond op 3 decimalen.

Hint 5.

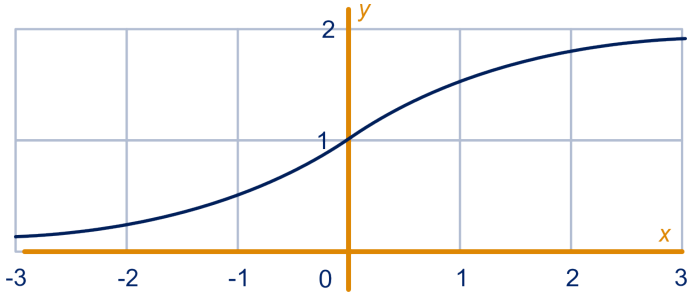
bewerking examenopgave wiskunde A Vwo 1995 tijdvak 2

5

Hieronder staat de grafiek van een functie f.

- Voor $x \leq 0$ geldt de formule $f(x) = 2^3$;
- Voor $x \geq 0$ geldt een andere formule.

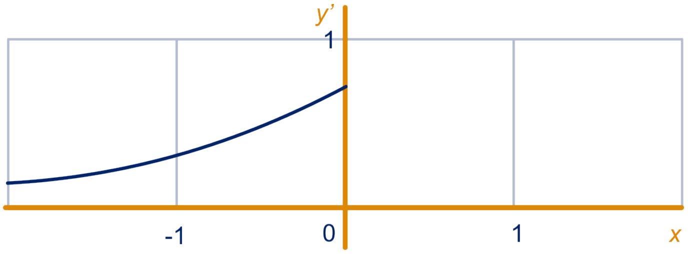
Gegeven is verder dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in het punt $(0,1)$, wat betekent dat bij spiegeling in het punt $(0,1)$ de grafiek van f in zichzelf overgaat.



a Bereken $f(1)$ en $f(5)$.

b Stel de formule van f op voor $x \geq 0$.

Hieronder is de grafiek getekend van de afgeleide functie f' voor $x \leq 0$.



c Neem de grafiek van f' over en voltooi de grafiek door er het gedeelte dat hoort bij $x \geq 0$ bij te tekenen. Licht je grafiek toe.

Hint 6.

Examen havo wiskunde B, 1994 tijdvak 2

6

Gegeven is de functie $f(x) = 2 + {}^{3}\log(x)$.

De grafiek van f gaat na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as door het punt $(3,6)$.

a Geef een vergelijking van deze nieuwe grafiek.

De grafiek van f gaat na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as door het punt $(9,2)$.

b Geef een vergelijking van deze nieuwe grafiek.

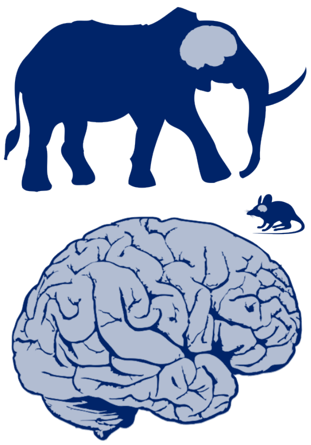
c Bewijs dat je de grafiek van onderdeel **b** ook kunt krijgen door de grafiek van f te verschuiven.

De grafiek van f wordt horizontaal en verticaal verschoven. De nieuwe grafiek heeft $x = -2$ als asymptoot en gaat door het punt $(7,10)$.

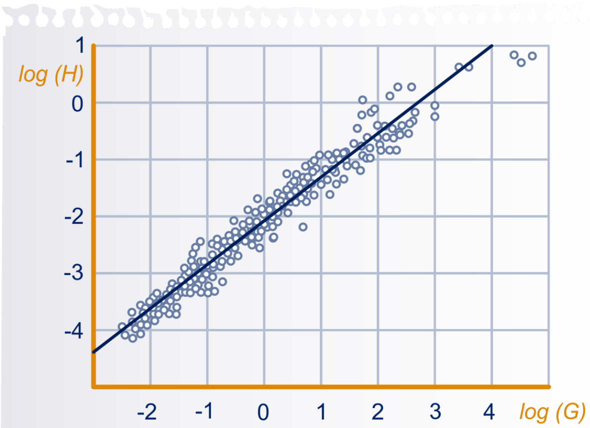
d Wat zijn de verschuivingen en wat is de vergelijking van de nieuwe grafiek?

7

Hersengewicht zoogdieren



Niet alle dieren hebben even zware hersenen. Zwaardere dieren hebben meestal zwaardere hersenen. Het gemiddelde lichaamsgewicht van volwassen dieren van een soort in kg, noemen we G. Het gemiddelde hersengewicht van volwassen dieren van die soort in kg, noemen we H. De grafiek hieronder geeft het verband weer tussen $\log(G)$ en $\log(H)$. In deze grafiek zijn meetpunten te zien die horen bij 477 soorten zoogdieren. De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn. Deze rechte lijn is ook in de figuur getekend.
Een formule die bij de rechte lijn hoort is
$\log(H) = -2{,}097 + 0{,}767 \cdot \log(G)$.



Het gemiddelde lichaamsgewicht van volwassen katten is 5 kg.

a Bereken met de formule het gemiddelde hersengewicht van volwassen katten.

Er zijn diersoorten waarvan de volwassen dieren een gemiddeld hersengewicht hebben dat 1% is van hun gemiddelde lichaamsgewicht.

b Bereken met de formule dit gemiddelde lichaamsgewicht.

De bovenstaande formule is ook te schrijven als $H = a \cdot G^b$.

c Toon dit aan en bereken de waarden van a en b in drie decimalen nauwkeurig.

8

Bereken exact, zonder rekenmachine, schrijf dus voldoende tussenstappen op.

$^{4}\log\left(\frac{1}{32}\right)$ $\quad$ $^{2}\log\left(16\sqrt[3]{4}\right)$

$^{4}\log\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $\quad$ $^{\frac{1}{2}}\log\left(16\sqrt[3]{4}\right)$

9

Los de volgende vergelijkingen in x exact op.

- $\log(x) + \log(x+5) = 1 + \log(5)$
- $\log(x) - \log(x-9) = 1$
- $^{x}\log(8x) = 3$

10

Gegeven zijn de twee functies

$f(x) = 2 + {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(4-2x)$.

a Wat zijn de asymptoten van de grafieken van beide functies?

b Wat is het domein van f? En van g?

De x-as snijdt de grafiek van f in punt P en de grafiek van g in punt Q.

c Bereken exact de afstand PQ.

d Bereken exact de x-coördinaat van het snijpunt van de grafieken van f en g.

e Beschrijf met welke transformaties, en in welke volgorde, je de grafiek van g kunt krijgen uit de grafiek van f.

f Benader de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van g bij $x = 1$. Rond je antwoord af op 2 decimalen.

11

Schaal van Richter

De energie die bij een aardbeving vrijkomt is uit te drukken in kJoules, maar seismologen geven de sterkte van een aardbeving liever aan met eenheden op de zogenaamde schaal van Richter: $R = 0{,}67\log(E) - 1{,}2$.

Hierbij is R de sterkte op de schaal van Richter en E de energie in kJoules.

a Laat langs algebraïsche weg zien wat het effect is van verdubbeling van de energie die vrijkomt bij een aardbeving op de bijbehorende waarde op de schaal van Richter.

b Schrijf deze formule stapsgewijs in de vorm $E = b \cdot g^{R}$. Rond b af op 1 decimaal en g af op 2 decimalen.

10.9 Extra opgaven

Exponentiële groeiprocessen

1
a $32 ; 64$
b Na 11 delingen.
c Na 20 delingen.
d $2^{40} \cdot \frac{1}{10^6} = 1.099.511{,}6\ \text{mm}^3 \approx 1{,}1\ \text{dm}^3$, dus klopt.

2
a $1000 \cdot 2^t$
b $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $1000 \cdot \sqrt{2}^t$
c $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$; $1000 \cdot \sqrt[4]{2}^t$

3
a $56{,}25\%$
b $y = 100 \cdot 0{,}75^x$
c $100 \cdot 0{,}75^x = 10$;
d $x \approx 8{,}0039$, dus op 8 m diepte

4
a $2^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{2} \approx 1{,}035$
b $3{,}5\%$

5
a $0{,}8$
b $A(t) = 125 \cdot 0{,}8^t$
c $125 \cdot 0{,}8^{-2} \approx 195{,}3$ gram
d Vergelijking: $125 \cdot 0{,}8^t = 1$;
Oplossing met de GR: $t = 21{,}6377...$; dat is na 21 minuten en 38 seconden.
e Groeifactor: $0{,}2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0{,}2}$;
Vergelijking: $125 \cdot \left(0{,}2^{\frac{1}{3}}\right)^t = 125 \cdot 0{,}2^{\frac{1}{3}t} = 1$;
Oplossing met de GR: $t = 9$; dat is na 9 minuten.

6
a De groeifactor per jaar is $g = 1{,}02$; de groeifactor per 10 jaar is $g^{10} = 1{,}2189\ldots$.
Dus het percentage waarmee de prijzen in 10 jaar stijgen is $21{,}9\%$.
b $H = 5 \cdot 0{,}97^t$
c De groeifactor per week is: $0{,}97^7 = 0{,}8079\ldots$, dus per week verdwijnt er $100 - 100 \cdot 0{,}97^7 = 19{,}2\ldots\%$.
d De groeifactor per week is $1{,}7$, de groeifactor per dag is dan: $1{,}7^{\frac{1}{7}} = 1{,}0787\ldots$, dus het groeipercentage per dag is $7{,}9\%$.

7
a Noem het percentage na t jaar: $P(t)$.
Dan: $P(t) = 100 \cdot 0{,}98^t$.
b Ongeveer 34 jaar.

8
a $12{,}5$ mg
b Per jaar is dit $100 - 100 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{9}} \approx 7{,}4\%$.

c Noem die hoeveelheid $Pu(t)$, dan $Pu(t) = 100 \cdot 0{,}926^t$,
nauwkeuriger: $Pu(t) = 100 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{9}t}$.

9

a $g^8 = 2 \rightarrow g = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2} \approx 1{,}0905$, dus de jaarlijkse procentuele groei is 9,1%
b Er moet gelden: $1{,}073^t = 2$;
Met de GR (intersect): $t \approx 9{,}83767$ jaar, dus 9 jaar en $0{,}83767 \cdot 12 \approx 10$ maanden (of 118 maanden).

10

a $\frac{70}{2} = 35$ jaar
b $1{,}02^{35} \approx 2$, klopt ongeveer.
c $14 = \frac{70}{x} \Leftrightarrow x = 5\%$.
d $\sqrt[14]{2} \approx 1{,}0508$, dus de groei is 5,08%

11

a $1{,}04^{20} \approx 2{,}1911$, dus toename van 119%
b $0{,}943^{20} \approx 0{,}3092$, dus afname van 69%
c $g^{40} = 1{,}6 \rightarrow g = 1{,}6^{\frac{1}{40}} \approx 1{,}012$, dus toename 1,2% per jaar
d $g^{12} = 0{,}76 \rightarrow g = 0{,}76^{\frac{1}{12}} \approx 0{,}977$, dus afname 2,3% per maand
e $g^7 = 2 \rightarrow g = 2^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}104$, dus de jaarlijkse groei is 10,4%
f $g^{\frac{29}{12}} = 0{,}5 \rightarrow g = 0{,}5^{\frac{12}{29}} \approx 0{,}751$, dus de jaarlijkse afname is 24,9%
g $g^{25} = \frac{6{,}8}{4{,}3} \rightarrow g = \left(\frac{6{,}8}{4{,}3}\right)^{\frac{1}{25}} \approx 1{,}019$, dus de jaarlijkse toename is 1,9%

Exponentiële functies

12

a $7^8 \cdot 7^6 = 7^{14}$ $\quad$ $7^8 : 7^6 = 7^2$
$(7^8)^6 = 7^{48}$ $\quad$ $7^8 \cdot 4^8 = (28)^8$
b $2^{1{,}23+1{,}77} = 2^3 = 8$ $\quad$ $2^{23{,}5-21{,}5} = 2^2 = 4$
$2^{0{,}125 \cdot 16} = 2^2 = 4$ $\quad$ $(2 \cdot 8)^{0{,}5} = \sqrt{16} = 4$
c $(2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ $\quad$ $(7^2)^{1\frac{1}{2}} = 7^3 = 343$ $\quad$ $(10^4)^{\frac{3}{4}} = 10^3 = 1000$
$(2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $(7^2)^{-1\frac{1}{2}} = 7^{-3} = \frac{1}{343}$ $\quad$ $(10^4)^{-\frac{3}{4}} = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$
d $5^3 \cdot 5^4 = 5^7$ $\quad$ $3^5 \cdot 4^5 = 12^5$
$5^3 \cdot 5^3 = 5^6$ $\quad$ $3^4 \cdot 4^5$ kan niet
e goed $\quad$ fout
fout $\quad$ goed
goed $\quad$ fout
goed $\quad$ fout
fout $\quad$ goed
goed $\quad$ fout

13

a A: $g = \frac{1}{2}$; B: $g = \frac{1}{4}$; C: $g = 4$; D: $g = 2$; E: $g = 1$
b Door spiegeling in de y-as (of: horizontale vermenigvuldiging t.o.v. de y-as met factor -1); $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x}$

c De grafiek van $y = \left(1\frac{1}{2}\right)^x$ loopt tussen de grafieken D en E door; de grafiek van $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ loopt tussen de grafieken A en E door (en beide gaan door het punt $(0,1)$).

d $y = \left(1\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

14

a Punt $(0,1)$; $g^0 = 1$ voor elke waarde van $g > 0$

b Stijgend: $g > 1$; dalend: $0 < g < 1$; horizontaal: $g = 1$

c $\sqrt{2} > 1$ dus stijgend $\quad$ $\frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$ dus dalend

$\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$ dus dalend $\quad$ $\pi > 1$ dus stijgend

d (Langzaam) dalend; (langzaam) stijgend

e Met de GR de vergelijking $1{,}01^x - 0{,}99^x = 1$ oplossen geeft $x = 48{,}2$; de vergelijking $0{,}99^x - 1{,}01^x = 1$ oplossen geeft $x = -48{,}0$; de grafieken lopen steeds verder uit elkaar als x toeneemt of afneemt, dus $x < -48{,}0$ of $x > 48{,}2$.

15

a Als $g > 1$, dan nadert g^x steeds meer tot 0 als x heel erg groot negatief wordt en als $g < 1$ dan nadert g^x tot 0 als x heel erg groot wordt.

b Bijvoorbeeld $f(x) = \frac{1}{x}$; de grafiek is een hyperbool.

c Met de GR oplossen $0{,}9^x = 0{,}000001$ geeft $x \approx 131{,}1$; dus $x > 131{,}1$.

16

a De grafiek van $y = 2^x$ is altijd stijgend, terwijl de grafiek van $y = x^2$ een parabool is en ook deels dalend is.

b Met de GR: $2 < x < 4$

c Zie tabel.

x-interval	$[2,3]$	$[3,4]$	$[4,5]$	$[10,11]$	$[100,101]$
Δy bij $y = 2^x$	4	8	16	1024	$1{,}27 \cdot 10^{30}$
Δy bij $y = x^2$	5	7	9	21	201

d Jazeker

e Zie tabel.

x-interval	$[2,3]$	$[3,4]$	$[4,5]$	$[10,11]$	$[100,101]$
bij $y = 2^x$	2	2	2	2	2
bij $y = x^2$	2,25	1,78	1,56	1,21	1,0201

f Bij $y = 2^x$ is de relatieve groei op elk interval steeds 2, terwijl bij $y = x^2$ die groei steeds kleiner wordt.

17

a Bij $y = x^2$: $y' = 2x$, dus de helling is $2 \cdot 3 = 6$;
Bij $y = 2^x$: helling $\approx \frac{2^{3{,}001} - 2^3}{0{,}001} \approx 5{,}55$ (of met de optie dy/dx op de GR).
Bij $x = 10$: hellingen zijn 20 en 710,03.

b Met de GR (met intersect) het snijpunt berekenen van $y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2^x)$ en $y' = 2x$ geeft $x \approx 0{,}49$ en $x \approx 3{,}21$.

18
- **a** Drie eenheden naar beneden schuiven.
- **b** Stijgend
- **c** De horizontale lijn $y = \text{-}3$
- **d** $y > \text{-}3$

19
- **a** f: 1 omhoog schuiven;
  g: eerst spiegelen in de x-as en dan 1 omhoog schuiven.
- **b** f is dalend en g is stijgend
- **c** Beide: $y = 1$
- **d** Bereik f: $y > 1$
  Bereik g: $y < 1$
- **e** De waarde van $f(x)$ ligt 3 boven de asymptoot $y = 1$, dus ligt de waarde $g(x)$ er 3 onder; $g(x) = 1 - 3 = \text{-}2$.

20
- **a** Vermenigvuldigen met factor -2 t.o.v. de x-as en daarna 5 omhoog schuiven.
- **b** Ja; $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ is dalend; $y = \text{-}2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ is dus stijgend en $y = \text{-}2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 5$ dus ook.
- **c** $y = 5$
- **d** $y < 5$

21
- **a** -
- **b** Ze zijn elkaars spiegelbeeld in de y-as. (Of: je krijgt de ene door de andere horizontaal te vermenigvuldigen met factor -1 ten opzichte van de y-as.)
- **c** Uit rekenregel 8: $a^{\text{-}p} = \frac{1}{a^p}$
- **d** $32 = 2^5$, dus $2^x \geq 32$ als $x \geq 5$;
  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{\text{-}x} \geq 2^5 \rightarrow \text{-}x \geq 5$, dus $x \leq \text{-}5$

22
- **a** -
- **b** 3 eenheden naar links verschuiven
- **c** Met factor 8 vermenigvuldigen t.o.v. de x-as
- **d** $2^{x+3} = 8 \cdot 2^x$;
  Rekenregel 1: $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 2^x \cdot 8 = 8 \cdot 2^x$
- **e** $2^{x+3} \geq 2^5 \rightarrow x + 3 \geq 5 \rightarrow x \geq 2$

23
- **a** -
- **b** Ze vallen samen
- **c** $\frac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{x-1}$;
  Rekenregels 8 en 1: $\frac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{\text{-}1} \cdot 2^x = 2^{x-1}$
- **d** $2^{x-1} \geq 2^5 \rightarrow x - 1 \geq 5 \rightarrow x \geq 6$

24
- **a** -
- **b** Horizontaal vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{3}$
- **c** $8^x = 2^{3x}$;
  Rekenregel 3: $8^x = \left(2^3\right)^x = 2^{3x}$
- **d** $2^{3x} \geq 2^5 \rightarrow 3x \geq 5 \rightarrow x \geq \frac{5}{3}$

25
a -
b De grafiek spiegelen in de y-as en daarna 1 naar rechts te verschuiven.
Spiegelen in de lijn $x = \frac{1}{2}$ kan ook.
c $y = 2^x \cdot 2^{1-x} = 2^{x+1-x} = 2$, dus de constante functie $y = 2$
d $2^x = 2^{1-x} \rightarrow x = 1 - x \rightarrow x = \frac{1}{2}$, dus snijpunt $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$

26
a Het zijn allemaal horizontale verschuivingen van elkaar.
b Invullen: $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3^{2-p} - 5 \rightarrow 4\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3^{2-p} \rightarrow 9 = 3^{2-p} \rightarrow 3^2 = 3^{2-p} \rightarrow 2 - p = 2$
$\rightarrow p = 0$

27
a Het zijn allemaal verticale verschuivingen van elkaar.
b Invullen: $1 = p - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \rightarrow 1 = p - 3 \cdot \left(2^{-1}\right)^{-1} \rightarrow 1 = p - 3 \cdot 2 \rightarrow p = 7$

Vergelijkingen

28
a $2^{x+7} = 2^3 \rightarrow x + 7 = 3 \rightarrow x = -4$
b $2^{7x} = 2^4 \rightarrow 7x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{7}$
c $2^{-x} = 2^6 \rightarrow -x = 6 \rightarrow x = -6$
d $2^{\frac{1}{x}} = 2^3 \rightarrow \frac{1}{x} = 3 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

29
a $3^x = 3^{-1} \rightarrow x = -1$
b $3^{x-5} = 3^{-1} \rightarrow x - 5 = -1 \rightarrow x = 4$
c $3^{5x} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2} \rightarrow 5x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{5}$
d $3^{5-2x} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4} \rightarrow 5 - 2x = -4 \rightarrow 2x = 9 \rightarrow x = 4\frac{1}{2}$
e $5^{\frac{1}{2}x} = 25 \rightarrow 5^{\frac{1}{2}x} = 5^2 \rightarrow \frac{1}{2}x = 2 \rightarrow x = 4$
f $5^{3x+1} = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} \rightarrow 5^{3x+1} = 5^{-1} \rightarrow 3x + 1 = -1 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$
g $\frac{6^x}{2^x} = \left(\frac{6}{2}\right)^x = 3^x = 9 \rightarrow 3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$
h $\frac{3^x}{1{,}5^x} = \left(\frac{3}{1{,}5}\right)^x = 2^x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 2^{-2} \rightarrow x = -2$

30
a -
b $x \approx -0{,}333$
c $f(-\frac{1}{3}) = 4^{\frac{1}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$; $g(-\frac{1}{3}) = 2^{-\frac{1}{3}+1} = 2^{\frac{2}{3}}$; dus ze zijn exact gelijk

31
a -
b $(-1{,}4)$
c $2^{x+3} = \left(2^{-2}\right)^x = 2^{-2x} \rightarrow x + 3 = -2x \rightarrow 3x = -3 \rightarrow x = -1$; $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$
d Kijk naar de grafieken: dat is links van het snijpunt, dus $x < -1$

32
a $3^{2x-1} = \frac{1}{3^{2x}} = 3^{-2x} \rightarrow 2x - 1 = -2x \rightarrow 4x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{4}$
b $2^{-3} \cdot 2^x = \left(2^{-2}\right)^{x+1} \rightarrow 2^{x-3} = 2^{-2x-2} \rightarrow x - 3 = -2x - 2 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

33
a -
b Ongeveer $(3{,}3; 6{,}2)$

c $3^{-1} \cdot \left(3^2\right)^{x-2} = (3^{\frac{1}{2}})^{x} \to 3^{-1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{\frac{1}{2}x} \to 3^{2x-5} = 3^{\frac{1}{2}x} \to 2x - 5 = \frac{1}{2}x \to$
$\frac{3}{2}x = 5 \to x = \frac{10}{3}$; invullen: $y = 3^{\frac{5}{3}}$, dus het snijpunt is $(\frac{10}{3}, 3^{\frac{5}{3}})$

d Kijk naar de grafieken: dat is rechts van het snijpunt, dus $x \geq \frac{10}{3}$

34

a 40 minuten is $\frac{2}{3}$ uur

b $g^{\frac{50}{60}} = g^{\frac{5}{6}} = 2 \to g = 2^{\frac{6}{5}} \approx 2{,}297$

c Invullen: $(7^{2\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}} = (7^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}} = 7^1 = 7$

d $7^{-\frac{2}{5}}$

35

$x = 2^{\frac{5}{4}} \approx 2{,}378$	$z = 2^{\frac{1}{1{,}4}} = 2^{\frac{5}{7}} \approx 1{,}641$
$a = 2^{\frac{1}{-0{,}3}} = 2^{-\frac{10}{3}} \approx 0{,}099$	$b = 5^{-\frac{3}{5}} \approx 0{,}381$
$c = 1^{-\frac{3}{5}} = 1$	kan niet
$p^{\frac{7}{3}} = 4 \to p = 4^{\frac{3}{7}} \approx 1{,}811$	$q^{1{,}2} = 20 \to q = 20^{\frac{1}{1{,}2}} = 20^{\frac{5}{6}} \approx 12{,}139$

36

a $g^{10} = \frac{1}{2} \to g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} = 2^{-\frac{1}{10}} = 2^{-0{,}1} \approx 0{,}933$

b $g^{12} = \left(2^{-0{,}1}\right)^{12} = 2^{-1{,}2} \approx 0{,}435$, dus 56,5% is verloren gegaan

c $100 \cdot 2^{-0{,}1t} = 75$, met de GR geeft $t \approx 4{,}15$, dus na 4 à 5 dagen

Logaritmen

37

a $t \approx 2{,}585$

b Casio: logab; TI: logBASE

c ${}^{5}\log(10) \approx 1{,}431$

d Het is de exacte oplossing van $3^t = 7{,}5$; ${}^{3}\log(7{,}5)$ is de tijdsduur waarin het aantal bacteriën 7,5 keer zo groot wordt, bij groeifactor 3 .

38

a Het is de exacte oplossing van $3^t = 81$; ${}^{3}\log(81)$ is de tijdsduur waarin het aantal bacteriën 81 keer zo groot wordt, bij groeifactor 3 .

b 4

39

a

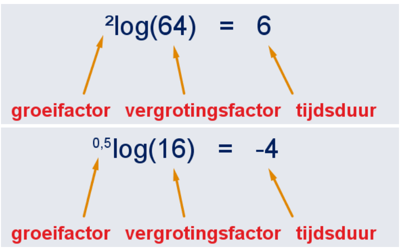
2	-1
5	-2
1	0
10	$\frac{1}{2}$

b Zie figuur.

40

a ${}^{0{,}5}\log(0{,}15)$; 274 cm diepte

b Dat is het aantal meters dat je moet duiken zodat bij groeifactor 0,5 de hoeveelheid licht nog maar 32% is.



c

1	-2
2	-5
0	-1

d Zie figuur.

41

a $x = 27$ en $p = 10$

b $x = 256$ | $x = 64$

$x = 3$ | $x = \frac{1}{3}$

$x = \sqrt[8]{2}$ | $x = \sqrt[2]{8}$

42

Geheel zijn: $\frac{12}{3}$, $\sqrt[3]{8}$, ${}^{3}\log(9)$, $\log(0{,}01)$, de andere niet.

43

0	$1\frac{1}{2}$	-2
3	-5	0
-1	-2	2
-1	3	$-\frac{1}{2}$
0	1	-1
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	7

44

2015	π
2015	π

45

a **In woorden**

Als je van een getal eerst de derde-machtswortel neemt en daarna van de uitkomst de derde macht, dan krijg je het oorspronkelijke getal weer terug. En omgekeerd.

In machientjestaal

x → **[3-de MACHTSWORTEL]** → **[TOT DE MACHT 3]** → x

x → **[TOT DE MACHT 3]** → **[3-de MACHTSWORTEL]** → x

In formuletaal

$\sqrt[3]{x}^{3} = x$ en $\sqrt[3]{x^3} = x$

b 2015 π

2015 π

46

a **In woorden**

Als je drie tot de macht een getal berekent en daarna van de uitkomst de ${}^{3}\log$ neemt, dan krijg je het oorspronkelijke getal weer terug. En omgekeerd.

In machientjestaal

x → **[3 TOT DE MACHT _]** → **[3 LOG VAN _]** → x en

x → **[3 LOG VAN _]** → **[3 TOT DE MACHT _]** → x

In formuletaal

${}^{3}\log(3^x) = x$ en $3^{{}^{3}\log(x)} = x$

b 2015 π

2015 π

47

a 3 | -2 | -1

$2^3 = 8$ | $2^{-2} = \frac{1}{4}$ | $0{,}1^{-1} = 10$

b 32 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{100}$

${}^{2}\log(32) = 5$ | ${}^{2}\log(\frac{1}{8}) = -3$ | ${}^{0,1}\log(\frac{1}{100}) = 2$

48
a $1^x = 1$ voor elk getal x;
$0^x = 0$ voor $x > 0$;
$(-7^x) = 7$ heeft geen oplossing.
b $2^x > 0$ voor elk getal x, dus niet gelijk aan -4 of 0.

49

1,161	-2,322
-0,898	1,585

Rekenregels logaritmen

50
a ${}^2\log(3) \approx 1{,}6$; ${}^2\log(5) \approx 2{,}3$; ${}^2\log(15) \approx 3{,}9$
b ${}^2\log(3) + {}^2\log(5) = {}^2\log(15)$
c Zeker fout, want ${}^2\log(8) = 3$
d Vermoeden: ${}^3\log(4) + {}^3\log(10) = {}^3\log(40)$;
$1{,}26 + 2{,}10 = 3{,}36$, dus lijkt te kloppen.

51
a $2^a = 3$, $2^b = 5$ en $2^c = 15$
b $3 \cdot 5 = 15$, dus $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b} = 2^c$, dus $a + b = c$
c -

52
a 3 uur; 1 uur; $3 + 1 = 4$ uur
b $3 \cdot 5 = 15$, dus $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b} = 2^c$, dus $a + b = c$
c 2 uur; $\frac{1}{2}$ uur; $3 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ uur
d In $x + y$ uur

53
a 1. ${}^5\log(625) + {}^5\log(\frac{1}{5}) = 4 + -1 = 3$
2. ${}^5\log(625) + {}^5\log(\frac{1}{5}) = {}^5\log(125) = 3$
b $\log(20) + \log(5) \approx 1{,}3 + 0{,}7 = 2$
$\log(20) + \log(5) = \log(100) = 2$ en
$\log(5) + \log(\frac{1}{2}) \approx 0{,}7 + -0{,}3 = 0{,}4$
$\log(5) + \log(\frac{1}{2}) = \log(2{,}5) \approx 0{,}4$

54

$= {}^3\log(9) = 2$	$= {}^5\log(\frac{1}{5}) = -1$
$= {}^{\frac{1}{4}}\log(4) = -1$	$= {}^{30}\log(30) = 1$
$= {}^2\log(\frac{1}{4}) = -2$	$= {}^2\log(1) = 0$

55

$= {}^4\log(64) = 3$	$= {}^5\log(5) = 1$
$= {}^{0{,}7}\log(\frac{1}{0{,}7}) = -1$	$= {}^7\log(\frac{84x}{12x}) = {}^7\log(7) = 1$
$= {}^5\log(\frac{6}{5 \cdot 3 \cdot 2}) = {}^5\log(\frac{1}{5}) = -1$	$= {}^3\log\left(\frac{27^{100}}{9^{100}}\right) = {}^3\log(3^{100}) = 100$

56
a In beide gevallen vind je 1,5 respectievelijk 3,38039...
b ${}^4\log(2^{11}) = 11 \cdot {}^4\log(2) = 11 \cdot \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$
${}^{\frac{1}{4}}\log(2^{11}) = 11 \cdot {}^{\frac{1}{4}}\log(2) = 11 \cdot -\frac{1}{2} = -5\frac{1}{2}$
${}^3\log\left((\frac{1}{9})^{11}\right) = 11 \cdot {}^3\log(\frac{1}{9}) = 11 \cdot -2 = -22$
${}^{\frac{1}{3}}\log\left((\frac{1}{9})^{11}\right) = 11 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{9}) = 11 \cdot 2 = 22$
c ${}^g\log(\frac{1}{x}) = {}^g\log(x^{-1}) = -1 \cdot {}^g\log(x) = -{}^g\log(x)$

57

- ${}^a\log(b^2) = 2 \cdot {}^a\log(b) = 10$
- ${}^a\log(bc) = {}^a\log(b) + {}^a\log(c) = 5 + 3 = 8$
- ${}^a\log(b\sqrt{c}) = {}^a\log(b) + {}^a\log(\sqrt{c}) = 5 + \frac{1}{2} \cdot {}^a\log(c) = 5 + 1\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$
- ${}^a\log(b^2c^3) = 2 \cdot {}^a\log(b) + 3 \cdot {}^a\log(c) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19$
- ${}^a\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^a\log(b) - {}^a\log(c) = 5 - 3 = 2$
- ${}^a\log\left(\frac{1}{c}\right) = {}^a\log(1) - {}^a\log(c) = 0 - 3 = \text{-}3$
- ${}^a\log\left(\frac{1}{b^3}\right) = {}^a\log(1) - {}^a\log(b^3) = 0 - 3 \cdot {}^a\log(b) = 0 - 3 \cdot 5 = \text{-}15$
- ${}^a\log\left(\sqrt{bc}\right) = \frac{1}{2}\left({}^a\log(b) + {}^a\log(c)\right) = \frac{1}{2}(5+3) = 4$

58

a $\log(ab) + \log(bc) + \log(ca) = \log(ab \cdot bc \cdot ca) = \log\left((abc)^2\right) = 2\log(abc)$

b $\log\left(\frac{a}{b}\right) + \log\left(\frac{b}{c}\right) + \log\left(\frac{c}{a}\right) = \log\left(\frac{abc}{abc}\right) = \log(1) = 0$

59

a
- ${}^2\log(x) = 3 \rightarrow x = 2^3 \rightarrow x = 8$
- ${}^3\log(x+1) = 3 \rightarrow x + 1 = 3^3 = 27 \rightarrow x = 28$
- ${}^4\log(2x) = \text{-}3 \rightarrow 2x = 4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow x = \frac{1}{128}$
- ${}^5\log(2x+1) = 3 \rightarrow 2x + 1 = 5^3 = 125 \rightarrow x = 62$
- ${}^3\log(\sqrt{x}) = 2 \rightarrow \sqrt{x} = 3^2 = 9 \rightarrow x = 81$
- ${}^2\log(x^2 - 1) = 3 \rightarrow x^2 - 1 = 2^3 = 8 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \text{-}3$ of $x = 3$
- ${}^5\log(\frac{1}{x}) = \text{-}2 \rightarrow \frac{1}{x} = 5^{-2} = \frac{1}{25} \rightarrow x = 25$
- ${}^2\log(x^2-2x) = 3 \rightarrow x^2-2x = 2^3 = 8 \rightarrow x^2-2x-8 = 0 \rightarrow (x-4)(x+2) = 0$
  $\rightarrow x = 4$ of $x = \text{-}2$

b
- $\log(x) = 3 \cdot \log(6) \rightarrow \log(x) = \log(6^3) = \log(216) \rightarrow x = 216$
- $3 \cdot \log(x) = \log(6) \rightarrow \log(x^3) = \log(6) \rightarrow x^3 = 6 \rightarrow x = \sqrt[3]{6}$
- $2 \cdot \log\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \cdot \log(4) \rightarrow \log\left((\frac{1}{x})^2\right) = \log(4^3) \rightarrow \frac{1}{x^2} = 64 \rightarrow x^2 = \frac{1}{64} \rightarrow$
  $x = \text{-}\frac{1}{8}$ (vervalt!) of $x = \frac{1}{8}$, dus $x = \frac{1}{8}$
- $\log(6) + \log\left(\frac{1}{x}\right) = \log(x) \rightarrow \log\left(\frac{6}{x}\right) = \log(x) \rightarrow \frac{6}{x} = x \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow$
  $x = \text{-}\sqrt{6}$ (vervalt!), of $x = \sqrt{6}$, dus $x = \sqrt{6}$

c
- ${}^2\log(8x) = {}^2\log(12) \rightarrow 8x = 12 \rightarrow x = 1\frac{1}{2}$
- ${}^2\log\left(\frac{95}{x}\right) = {}^2\log(5) \rightarrow \frac{95}{x} = 5 \rightarrow x = 19$
- ${}^5\log\left(\frac{x}{2}\right) = {}^5\log(7) \rightarrow \frac{x}{2} = 7 \rightarrow x = 14$
- $\log(40x) = 4 \rightarrow 40x = 10^4 = 10000 \rightarrow x = 250$
- $\log\left(\frac{x}{5}\right) = \log(10) + \log(7) = \log(70) \rightarrow \frac{x}{5} = 70 \rightarrow x = 350$
- ${}^2\log\left(\frac{x}{3}\right) = {}^2\log\left(\frac{12}{x}\right) \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{12}{x} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \text{-}6$ (vervalt!) of
  $x = 6$, dus $x = 6$

Logaritmische functies

60

a ${}^g\log(1) = 0$ voor elke x, want $g^0 = 1$

b Stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.

c De y-as, ofwel $x = 0$

61
a Vier eenheden naar beneden schuiven
b Stijgend
c De y-as
d Bereik: alle getallen;
Domein: $x > 0$
e $-4 + {}^{2}\log(x) = 0 \rightarrow {}^{2}\log(x) = 4 \rightarrow x = 2^4 = 8$, dus $(8{,}0)$
f $-4 + {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(2^{-4}) + {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(\frac{1}{16}) + {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(\frac{1}{16}x)$
g Horizontale vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor 16

62
a Verticaal vermenigvuldigen met factor 2 ten opzichte van de x-as en 5 naar links schuiven
b De lijn $x = -5$
c Bereik: alle getallen;
Domein: $x > -5$
d $2 \cdot {}^{3}\log(x+5) = -4 \rightarrow {}^{3}\log(x+5) = -2 \rightarrow x + 5 = 3^{-2} = \frac{1}{9} \rightarrow x = -4\frac{8}{9}$

63
a -
b Je krijgt de grafiek van $y = {}^{2}\log(16x)$ uit de grafiek van $y = {}^{2}\log(4x)$ door deze 2 omhoog te schuiven.
$y = {}^{2}\log(16x) = {}^{2}\log(16) + {}^{2}\log(x) = 4 + {}^{2}\log(x)$
$y = {}^{2}\log(4x) = {}^{2}\log(4) + {}^{2}\log(x) = 2 + {}^{2}\log(x)$, dus deze ligt 2 lager
c ${}^{2}\log(4x) = 7 \rightarrow 4x = 2^7 = 128 \rightarrow x = 32$, dus $0 < x \leq 32$

64
a
- 2 naar beneden schuiven
  $\rightarrow y = -2 + \log(x)$
- verticaal vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor 3
  $\rightarrow y = 3 \cdot (-2 + \log(x)) = -6 + 3 \cdot \log(x)$
- 5 naar rechts schuiven
  $y = -6 + 3 \cdot \log(x - 5)$
- horizontaal vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor 4
  $y = -6 + 3 \cdot \log(\frac{1}{4}x - 5)$

b Verticale asymptoot: $\frac{1}{4}x - 5 = 0 \rightarrow x = 20$;
Snijpunt x-as: $-6 + 3 \cdot \log(\frac{1}{4}x - 5) = 0 \rightarrow \log(\frac{1}{4}x - 5) = 2 \rightarrow \frac{1}{4}x - 5 = 10^2 = 100$
$\rightarrow x = 420$, dus $(420{,}0)$
c Meerdere mogelijkheden, bijvoorbeeld:
- verticaal vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor -3
  $\rightarrow y = -3 \cdot {}^{2}\log(x)$
- 5 omhoog schuiven
  $\rightarrow y = 5 + -3 \cdot {}^{2}\log(x)$
- horizontaal vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor $\frac{1}{4}$
  $\rightarrow y = 5 + -3 \cdot {}^{2}\log(4x)$
- $2\frac{1}{2}$ naar links schuiven
  $\rightarrow y = 5 + -3 \cdot {}^{2}\log\left(4(x + 2\frac{1}{2})\right) = 5 + -3 \cdot {}^{2}\log(4x + 10)$

65

a -

b Eerst spiegelen in de y-as (ofwel vermenigvuldigen met factor -1 t.o.v. de y-as) en daarna 4 naar rechts schuiven.
Of: eerst 4 naar links schuiven en dan spiegelen in de y-as.
(Spiegelen in de lijn $x = 2$ kan ook.)

c Bereik: alle getallen;
Domein: $x < 4$

d Snijpunt x-as: $\log(4 - x) = 0 \rightarrow 4 - x = 1 \rightarrow x = 3$;
Helling met de GR: -0,434

66

a Het zijn allemaal horizontale verschuivingen van elkaar.

b Invullen: $2 = 1 - {}^3\log\left(\frac{5}{6} - p\right) \rightarrow {}^3\log\left(\frac{5}{6} - p\right) = -1 \rightarrow \frac{5}{6} - p = 3^{-1} = \frac{1}{3} \rightarrow$
$p = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

c $2 \cdot -3 - p = 0 \rightarrow p = -6$

d $2x - p = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}p$

Logaritmische verbanden

67

a $t = 0$: $\log(L) = 0{,}9717 \rightarrow L = 10^{0{,}9717} \approx 9{,}369$;
$t = 85$: $\log(L) = 1{,}7537 \rightarrow L = 10^{1{,}7537} \approx 56{,}715$;
De berekende waarden komen goed overeen met de gemeten waarden.

b $\log(75) \approx 1{,}875...$, dus $1{,}875... = 0{,}0092t + 0{,}9717 \rightarrow t \approx 98{,}2$, dus na 98 dagen.

c $L = 10^{0{,}0092t+0{,}9717} = 10^{0{,}9717} \cdot \left(10^{0{,}0092}\right)^t \approx 9{,}369 \cdot 1{,}0214^t$

d $g = 10^{0{,}0092} \approx 1{,}021$, dus de groei is 2,1% per dag

68

a $\log(108{,}2) - \log(57{,}9) = a \cdot (\log(225) - \log(88)) \rightarrow 0{,}2715... = a \cdot 0{,}4076... \rightarrow$
$a = \frac{0{,}2715...}{0{,}4076...} \approx 0{,}666$
Invullen geeft: $b = \log(57{,}9) - 0{,}666... \times \log(88) \approx 0{,}468$

b Klopt.

c $\log(R) = \log(T^{0{,}667}) + \log(10^{0{,}466}) = \log(10^{0{,}466} \cdot T^{0{,}667}) \approx \log(2{,}924 \cdot T^{0{,}667})$

d $8^{0{,}667} \approx 4$ keer zo groot.

69

a -

b Een rechte lijn

70

a
- $\log(y) = \log(x^2) + \log(3) = \log(3x^2) \rightarrow y = 3x^2$
- $\log(y) = \log(10^{1\frac{1}{2}}) - \log(x) = \log\left(\frac{10^{1\frac{1}{2}}}{x}\right) = \log\left(\frac{10\sqrt{10}}{x}\right)$
  $\rightarrow y = \frac{10\sqrt{10}}{x}$ (of: $y = 10\sqrt{10} \cdot x^{-1}$)
- $\log(y) = \log(x^{\frac{1}{2}}) + \log(10^3) \rightarrow \log(y) = \log(10^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}) = \log(1000\sqrt{x})$
  $\rightarrow y = 1000\sqrt{x}$

b
- $\log(y) = \log(10 \cdot x^4) = \log(10) + \log(x^4) = 4 \cdot \log(x) + 1$
- $\log(y) = \log(0{,}2 \cdot \sqrt{x}) = \log(0{,}2) + \log(x^{\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{2} \cdot \log(x) - 0{,}699$
- $\log(y) = \log\left(\frac{8}{x}\right) = \log(8) - \log(x) \approx -\log(x) + 0{,}903$

71

a $\log(T) = 1{,}07 + 0{,}20 \cdot \log(4000) \approx 1{,}790... \rightarrow T = 10^{1{,}790...} \approx 61{,}7$ (of 62) jaar

b $\log(44) = 1{,}07 + 0{,}20 \cdot \log(G) \rightarrow \log(G) = 2{,}867... \rightarrow G = 10^{2{,}867...} \approx 736{,}7$, dus 740 kg.

c richtingscoëfficiënt $= 0{,}20$

d $\log(T) = 1{,}07 + 0{,}20 \cdot \log(2G) = 1{,}07 + 0{,}20 \cdot \log(G) + 0{,}20 \cdot \log(2)$, dus $\log(T)$ neemt toe met $0{,}20 \cdot \log(2) \approx 0{,}0602$; dan wordt T vermenigvuldigd met $10^{0{,}0602...} \approx 1{,}15$, ofwel neemt met 15% toe

e $\log(G) = \log(10^{1{,}07}) + \log(G^{0{,}20}) = \log(10^{1{,}07} \cdot G^{0{,}20}) \approx \log(11{,}75 \cdot G^{0{,}20})$, dus $G = 11{,}75 \cdot G^{0{,}20}$; $a = 11{,}75$ en $b = 0{,}20$

72

a $10^{-0{,}35} \approx 0{,}45$ kg, dus 450 gram

b Aflezen: $\log(\frac{W}{40}) = 0{,}30$, dus $\frac{W}{40} = 10^{0{,}30} \approx 1{,}995...$; $W \approx 79$ (joules)

c $\log(\frac{W}{40}) = \log(10^{0{,}50}) + \log(G^{0{,}75}) = \log(10^{0{,}50} \cdot G^{0{,}75}) \rightarrow \frac{W}{40} = 10^{0{,}50} \cdot G^{0{,}75}$ $\rightarrow W = 40 \cdot 10^{0{,}50} \cdot G^{0{,}75} \approx 126{,}5 \cdot G^{0{,}75}$

73

a Bij de gehoorgrens hoort geluidsdrukniveau $L = 10 \cdot \log(\frac{I_0}{I_0}) = 0$, want $\log(1) = 0$;
Bij de pijngrens hoort geluidsdrukniveau $10 \cdot \log(\frac{10}{10^{-12}}) = 10 \cdot \log(10^{13}) = 130$

b $10 \cdot \log(\frac{2I}{I_0}) = 10 \cdot \log(2) + 10 \cdot \log(\frac{I}{I_0}) = 10 \cdot \log(2) + 80 = 83{,}0$

c Noem de gezochte afstand x, dan:
$74 = L_0 - 10\log(2\pi x)$ en $77 = L_0 - 10\log(40\pi)$,
dus (trek de twee vergelijkingen van elkaar af en deel door 10)
$0{,}3 = \log(2\pi x) - \log(40\pi) \rightarrow \log(2\pi x) = \log(40\pi) + 0{,}3 = \log(40\pi \cdot 10^{0{,}3})$,
dus $x = 20 \cdot 10^{0{,}3} \approx 40$ meter

74

a
- ${}^2\log(y) = {}^2\log(4 \cdot 2^x) = {}^2\log(4) + {}^2\log(2^x) = {}^2\log(4) + x \cdot {}^2\log(2) = 2 + x$ $\rightarrow x = {}^2\log(y) - 2$
- $y - 3 = 4 \cdot 2^x \rightarrow {}^2\log(y-3) = {}^2\log(4 \cdot 2^x) = {}^2\log(4) + {}^2\log(2^x) = {}^2\log(4) + x \cdot {}^2\log(2) = 2 + x \rightarrow x = {}^2\log(y-3) - 2$
- ${}^3\log(y) = {}^3\log(\frac{1}{3} \cdot 3^x) = {}^3\log(\frac{1}{3}) + {}^3\log(3^x) = -1 + x \cdot {}^3\log(3) = -1 + x \rightarrow$ $x = {}^2\log(y) + 1$
- $9 \cdot 3^x = 2 - y \rightarrow {}^3\log(2-y) = {}^3\log(9 \cdot 3^x) = {}^3\log(9) + {}^3\log(3^x) = 2 + x$ $\rightarrow x = {}^3\log(2-y) - 2$

b $\log(L) = \log(9{,}37 \cdot 1{,}02^t) = \log(9{,}37) + t \cdot \log(1{,}02) \rightarrow t = -\frac{\log(9{,}37)}{\log(1{,}02)} + \frac{1}{\log(1{,}02)} \cdot$ $\log(L) \approx -113{,}0 + 116{,}3 \cdot \log(L)$ (dus $a \approx -113{,}0$ en $b \approx 116{,}3$)

75

a Fosfaatrijk: $\log(A) = \log(10{,}0 \cdot 1{,}6^t) = \log(10{,}0) + t \cdot \log(1{,}6) = 1 + t \cdot \log(1{,}6)$
$\rightarrow t = \frac{1}{\log(1{,}6)} \cdot \log(A) - \frac{1}{\log(1{,}6)} \approx 4{,}90 \cdot \log(A) - 4{,}90$
Fosfaatarm: $\log(A) = \log(10{,}0 \cdot 1{,}3^t) = \log(10{,}0) + t \cdot \log(1{,}3) = 1 + t \cdot \log(1{,}3)$
$\rightarrow t = \frac{1}{\log(1{,}3)} \cdot \log(A) - \frac{1}{\log(1{,}3)} \approx 8{,}78 \cdot \log(A) - 8{,}78$

b $\frac{10{,}0 \cdot 1{,}6^t}{10{,}0 \cdot 1{,}3^t} = 2 \rightarrow \frac{1{,}6^t}{1{,}3^t} = 2 \rightarrow \left(\frac{1{,}6}{1{,}3}\right)^t = 2 \rightarrow 1{,}23...^t = 2 \rightarrow t = {}^{1{,}23...}\log(2) \approx$ 3,338 weken, dus na 23,4 dagen.

Extra opgaven

1

a 10% van het 'gemengde' water verdwijnt elke week, dus ook 10% van de verontreiniging.

b De groeifactor per week is $0{,}9$, dus per dag $\sqrt[7]{0{,}9} = 0{,}9^{\frac{1}{7}}$;
dus $A(t) = 1000 \cdot \left(0{,}9^{\frac{1}{7}}\right)^{t} = 1000 \cdot 0{,}9^{\frac{t}{7}}$ $(\approx 1000 \cdot 0{,}985^{t})$

c $1000 \cdot 0{,}9^{\frac{t}{7}} = 100 \rightarrow 0{,}9^{\frac{t}{7}} = 0{,}1 \rightarrow \frac{t}{7} = {}^{0{,}9}\log(0{,}1) \approx 21{,}854... \rightarrow t = 7 \cdot 21{,}854... \approx 153{,}0$, dus 153 dagen

d het aantal weken is (afgerond) $21{,}85$, dus ongeveer 22.000 m^{3}.

2

a $1000 \cdot g^{5} = 500 \rightarrow g^{5} = \frac{500}{1000} = 0{,}5 \rightarrow g = \sqrt[5]{0{,}5}$,
dus $\sqrt[5]{0{,}5} \cdot 1000 \approx 871$ hectopascal

b $L = 1000 \cdot \left(\sqrt[5]{0{,}5}\right)^{h} = 1000 \cdot 0{,}5^{0{,}2h} \approx 1000 \cdot 7{,}325^{h}$

c $\log(L) = \log(1000 \cdot 7{,}325^{h}) = \log(1000) + h \cdot \log(7{,}325) = 3 + h \cdot \log(7{,}325)$
$\rightarrow h = -\frac{3}{\log(7{,}325)} + \frac{1}{\log(7{,}325)} \cdot \log(L) \approx -3{,}469 + 1{,}156\log(L)$

3

a De formule herschrijven tot $y = 8 \cdot \sqrt{2}^{x} - 1 = 8 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{x} - 1 = 8 \cdot 2^{\frac{1}{2}x} - 1$;
horizontale vermenigvuldiging t.o.v. de y-as met factor $2 \rightarrow y = 2^{\frac{1}{2}x}$
verticale vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met factor $8 \rightarrow y = 8 \cdot 2^{\frac{1}{2}x}$
1 naar beneden schuiven $y = 8 \cdot 2^{\frac{1}{2}x} - 1$

b $y = -1$

c Snijpunt x-as: $8 \cdot 2^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0 \rightarrow 2^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{8} = 2^{-3} \rightarrow \frac{1}{2}x = -3 \rightarrow x = -6$, dus $A(-6,0)$; snijpunt y-as: $8 \cdot \sqrt{2}^{0} - 1 = 7$, dus $B(0,7)$;
oppervlakte driehoek $OAB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21$

d $y + 1 = 8 \cdot 2^{\frac{1}{2}x} \rightarrow 2^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{8}(y+1) \rightarrow {}^{2}\log(2^{\frac{1}{2}x}) = {}^{2}\log\left(\frac{1}{8}(y+1)\right)$
$\rightarrow \frac{1}{2}x = {}^{2}\log(\frac{1}{8}) + {}^{2}\log(y+1) \rightarrow x = 2 \cdot -3 + 2 \cdot {}^{2}\log(y+1)$
dus $x = -6 + 2 \cdot {}^{2}\log(y+1)$ (en dus $a = -6$, $b = 2$, $c = -1$)

4

a $L = L_{0} \cdot \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{n}$, dus de lengtes nemen exponentieel toe met factor $2^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}059$, dus nemen met 5,9% toe.

b Voor het register geldt: $\frac{D}{L^{0{,}75}} = \frac{60}{500^{0{,}75}} \approx 0{,}5674...$;
De pijp met nummer 30 heeft lengte $500 \cdot 2^{\frac{14}{12}} \approx 1122{,}46...$ mm;
Dus: $\frac{D}{1122{,}46...^{0{,}75}} = 0{,}5674... \rightarrow D = 0{,}5674... \times 1122{,}46...^{0{,}75} \approx 110$ mm.

c $\log(410) \approx 2{,}6$, dus het is het vierde punt vanaf links gezien;
aflezen: $\log(D) \approx 1{,}54$, dus $D = 10^{1{,}54} \approx 35$ mm

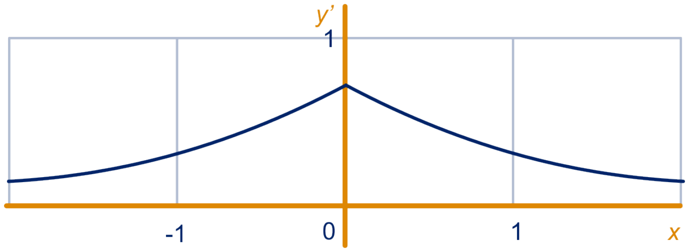
d $\log(D) = \frac{0{,}741}{0{,}903}\log(L) + \frac{0{,}034}{0{,}903} = \log\left(L^{\frac{0{,}741}{0{,}903}}\right) + \log\left(10^{\frac{0{,}034}{0{,}903}}\right) = \log\left(10^{\frac{0{,}034}{0{,}903}} \cdot L^{\frac{0{,}741}{0{,}903}}\right) \approx \log(1{,}091 \cdot L^{0{,}821}) \rightarrow D = 1{,}091 \cdot L^{0{,}821}$, dus $a = 1{,}091$ en $b = 0{,}821$

5

a Gebruik de symmetrie:
$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ en dat ligt $\frac{1}{2}$ onder $y = 1$, dus $f(1) = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$;
$f(-5) = 2^{-5} = \frac{1}{32}$ en dat ligt $\frac{31}{32}$ onder $y = 1$, dus $f(5) = 1 + \frac{31}{32} = 1\frac{31}{32}$

b $f(x) = 1 + 2^{-x}$ $(= 1 + \frac{1}{2^x})$ voor $x \geq 0$

c Het rechter deel van de grafiek van f' vind je door het linker deel te spiegelen in de y-as. Zie figuur.



6

a $f(3) = 3$, dus de vermenigvuldigingsfactor is 2;
$y = 2 \cdot \left(2 + {}^3\log(x)\right) = 4 + 2 \cdot {}^3\log(x)$

b $f(x) = 2$ geeft $2 + {}^3\log(x) = 2 \rightarrow {}^3\log(x) = 0 \rightarrow x = 3^0 = 1$, dus de factor is 9;
$y = 2 + {}^3\log(\frac{1}{9}x)$

c $y = 2 + {}^3\log(\frac{1}{9}x) = 2 + {}^3\log(\frac{1}{9}) + {}^3\log(x) = 2 - 2 + {}^3\log(x) = f(x) - 2$, dus de grafiek van f is 2 naar beneden geschoven

d Vanwege de asymptoot: 2 naar links geschoven, dus $y = 2 + {}^3\log(x + 2)$;
$x = 7$ invullen: $y = 2 + {}^3\log(7 + 2) = 4$, dus ook nog 6 omhoog;
formule: $y = 8 + {}^3\log(x + 2)$

7

a $\log(H) = -2{,}097 + 0{,}767 \cdot \log(5) \approx -1{,}56...$
$\rightarrow H = 10^{-1{,}56...} \approx 0{,}027$ kg, ofwel 27 gram

b $H = 0{,}01G$ invullen: $\log(0{,}01G) = -2{,}097 + 0{,}767 \cdot \log(G)$;
met de GR (solver of intersect) geeft $G \approx 0{,}383$ kg (ofwel 383 gram)
Opmerking: oplossen van deze vergelijking kan ook algebraïsch!

c $H = 10^{-2{,}097 + 0{,}767 \cdot \log(G)} = 10^{-2{,}097} \cdot \left(10^{\log(G)}\right)^{0{,}767} = 10^{-2{,}097} \cdot G^{0{,}767}$ dus
$H \approx 0{,}008 \cdot G^{0{,}767}$ (ofwel $a \approx 0{,}008$ en $b \approx 0{,}767$)

8

- $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{-5} = 4^{-2\frac{1}{2}}$, dus ${}^4\log(\frac{1}{32}) = -2\frac{1}{2}$
- $16\sqrt[3]{4} = 2^4 \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{4\frac{2}{3}}$, dus ${}^2\log(16\sqrt[3]{4}) = 4\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = 4^{-\frac{1}{4}}$, dus ${}^4\log(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$
- ${}^{\frac{1}{2}}\log(16\sqrt[3]{4}) = -4\frac{2}{3}$, want ${}^2\log(16\sqrt[3]{4}) = 4\frac{2}{3}$

9

- $\log(x(x + 5)) = \log(10) + \log(5) \rightarrow \log(x(x + 5)) = \log(50) \rightarrow x^2 + 5x = 50$
$\rightarrow (x + 10)(x - 5) = 0 \rightarrow x = -10$ of $x = 5$, maar alleen $x = 5$ voldoet
- $\log(x) - \log(x - 9) = 1 \rightarrow \log\left(\frac{x}{x - 9}\right) = 1 \rightarrow \frac{x}{x - 9} = 10 \rightarrow x = 10x - 90$
$\rightarrow 9x = 90 \rightarrow x = 10$ (voldoet)
- ${}^x\log(8x) = 3 \rightarrow x^3 = 8x \rightarrow x^3 - 8x = x(x^2 - 8) = 0 \rightarrow x = 0$ of $x = -\sqrt{8}$ of $x = \sqrt{8}$, maar alleen $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ voldoet (want $x > 0$)

10

a asymptoot f: $x = 0$; asymptoot g: $4 - 2x = 0 \rightarrow x = 2$

b domein f: $x > 0$; domein g: $4 - 2x > 0 \rightarrow x < 2$

c $2 + {}^2\log(x) = 0 \rightarrow {}^2\log(x) = -2 \rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, dus $P(\frac{1}{4},0)$;
${}^2\log(4 - 2x) = 0 \rightarrow 4 - 2x = 2^0 = 1 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = 1\frac{1}{2}$, dus $Q(1\frac{1}{2},0)$;
$PQ = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$

d $2 + {}^2\log(x) = {}^2\log(4 - 2x) \rightarrow {}^2\log(4) + {}^2\log(x) = {}^2\log(4 - 2x)$
$\rightarrow {}^2\log(4x) = {}^2\log(4 - 2x) \rightarrow 4x = 4 - 2x \rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

e Bijvoorbeeld:
- grafiek van f eerst 2 naar beneden schuiven $\rightarrow y = {}^2\log(x)$
- horizontaal vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met factor $-\frac{1}{2} \rightarrow y = {}^2\log(-2x)$
- 2 naar rechts schuiven $\rightarrow y = {}^2\log(-2(x - 2)) = {}^2\log(-2x + 4) = g(x)$

f Met de juiste optie op de GR: richtingscoëfficiënt $\approx -1{,}44$

11

a Verdubbeling van de energie geeft $R = 0{,}67\log(2E) - 1{,}2 = 0{,}67\log(2) + 0{,}67\log(E) - 1{,}2$, dus R neemt met $0{,}67\log(2) \approx 0{,}20$ toe

b $\log(E) = \frac{1}{0{,}67} \cdot R + \frac{1{,}2}{0{,}67} \rightarrow E = 10^{\frac{1}{0{,}67} \cdot R + \frac{1{,}2}{0{,}67}} = 10^{\frac{1{,}2}{0{,}67}} \cdot \left(10^{\frac{1}{0{,}67}}\right)^R \approx 61{,}8 \cdot 31{,}08^R$
(dus $b \approx 61{,}8$ en $g \approx 31{,}08$)

10 Exponenten en logaritmen

1 Teken op je GR de functies $y = 1{,}01^x - 0{,}99^x$ en $y = 0{,}99^x - 1{,}01^x$.
2 Teken beide grafieken en gebruik de symmetrie t.o.v. de asymptoot.
3 Deel links en rechts door 2^x en gebruik een rekenregel.
4 Gebruik de rekenregels voor machten.
5 Schrijf de formule eerst om in de vorm $\log(D) = ...$
6 Gebruik de puntsymmetrie.