Inleiding complexe getallen

Inhoudsopgave

Inleiding complexe getallen

experimentele uitgave, juni 2009

Colofon

© 2009	Stichting De Wageningse Methode
Auteurs	Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen
Illustraties	Wilson Design, Uden
Distributie	Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede
ISBN	
Homepage	www.wageningse-methode.nl

Vergelijkingen van graad 3

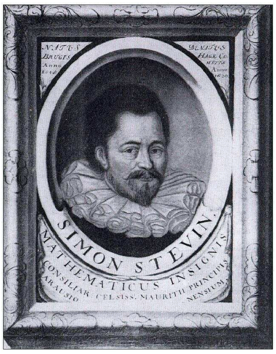
De Babylonische godin Ishtar

Een kwadratische vergelijking is van de vorm:
$ax^2 + bx + c = 0$, waarbij $a \neq 0$.
De Babyloniërs (2000 voor Chr.) hielden zich al bezig met kwadratische vergelijkingen en waren in staat om deze op te lossen.
In de derde klas heb je de zogenaamde *wortelformule* gehad om een kwadratische vergelijkingen op te lossen. Als je de getallen *a*, *b* en *c* kent, geeft die formule je onmiddellijk de oplossingen:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Je moet natuurlijk wel de wortel van het getal $b^2 - 4ac$ kunnen trekken, dus moet $4ac \leq b^2$, anders zijn er geen oplossingen.

1 Wat kun je zeggen als $b^2 - 4ac = 0$?



Simon Stevin
1548-1620

Tot nu toe reken je vaak met negatieve getallen, breuken of wortels; het zijn vertrouwde getallen geworden .
Als kleuter begin je te tellen (1, 2, 3,…). Naarmate je ouder (en wijzer) wordt, wordt het soort getallen dat je kent en waarmee je kunt werken steeds groter. De kennis van getallen die jij in enkele jaren opdoet, heeft de mensheid in eeuwen opgebouwd. Alleen al de manier waarop getallen genoteerd worden, is belangrijk. Egyptenaren gebruikten voor zover wij nu weten bijvoorbeeld alleen stam-breuken (breuken met teller 1, zie hoofdstuk 6 van brugklasdeel 1a van de *Wageningse Methode*). Pas Simon Stevin (1548-1620), stelde voor om breuken decimaal te schrijven, in zijn werk *De Thiende*).

De verzameling getallen waarmee je hebt leren werken, is in de loop der jaren groter geworden:
$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

Hierbij staat
$\mathbb{N}$ voor de verzameling **natuurlijke** getallen:
0, 1, 2, 3, …
$\mathbb{Z}$ voor de verzameling **gehele** getallen:
…, -3, -2, -1, 0, 1, 2,…
$\mathbb{Q}$ voor de verzameling **rationale** getallen:
alle gehele getallen met de positieve en negatieve breuken.
$\mathbb{R}$ voor de verzameling **reële** getallen:
alle getallen, inclusief wortels, π, e, ${}^2\log 3$ en nog veel meer.

De behoefte aan ‘nieuwe’ getallen diende zich steeds ‘vanzelf’ aan.

Voorbeeld
Een bacteriekolonie verdubbelt elk uur. In hoeveel tijd wordt deze kolonie 3 keer zo groot? Als je deze tijdsduur *x* uur noemt, dan is *x* oplossing van de vergelijking:
$2^x = 3$.
Deze vergelijking heeft geen oplossing in $\mathbb{Q}$, dat wil zeggen: er is geen rationaal getal *x* te vinden, zó dat $2^x = 3$.
De oplossing in $\mathbb{R}$ is: ${}^2\log 3$.

2 **a.** Geef een vergelijking die geen oplossing in $\mathbb{N}$ heeft, maar wel in $\mathbb{Z}$.
b. Geef een vergelijking die geen oplossing in $\mathbb{Z}$ heeft, maar wel in $\mathbb{Q}$.

Er zijn kwadratische vergelijkingen die oplossingen in $\mathbb{Q}$ hebben, maar niet in $\mathbb{Z}$.
c. Geef een voorbeeld van zo'n vergelijking.
d. Zijn er rationale getallen *x* die oplossing zijn van de vergelijking $x^2 - 2x - 2 = 0$. En reële getallen *x*?
e. Zijn er rationale getallen *x* die oplossing zijn van de vergelijking $x^2 - 2x + 2 = 0$. En reële getallen *x*?


Niccolo Fontana Tartaglia
1499?-1557

Uit *wikipedia*
Een derdegraadsvergelijking is een vergelijking die herleid kan worden tot de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, waarin *a*, *b*, *c* en *d* constanten zijn en *a* niet gelijk is aan 0. Het oplossen van vergelijkingen van dit type bleek wezenlijk moeilijker te zijn dan het oplossen van kwadratische vergelijkingen, waarvoor al in de oudheid een algemene oplossing gevonden is (al werd toen alleen naar positieve oplossingen gezocht). De Italiaan Niccolo Fontana Tartaglia (de stotteraar) vond als eerste een formule om derdegraadsvergelijkingen op te lossen.

3 **a.** Waarom zou men in de oudheid alleen naar positieve oplossingen gezocht hebben?
b. Waarom wordt in wikipedia geeist dat *a* niet gelijk is aan 0 in de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$?

Elke derdegraadsvergelijking is te reduceren (terug te voeren) tot een vergelijking van de vorm:
$x^3 + ux^2 + vx + w = 0$, met *u*, *v* en *w* constanten.
c. Hoe?

Bekijk de vergelijking $x^3 - 12x^2 - 4x + 48 = 0$.
We vervangen in deze vergelijking *x* door $y + 4$.
Dan krijg je de vergelijking: $y^3 = 52y + 96$.

d. Reken dat na. Het is hierbij wel handig om het volgende te weten.

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1$$

De oplossingen van de vergelijking $y^3 = 52y + 96$ zijn:
$y = -2$, $y = -6$ en $y = 8$.
e. Controleer dat -2, -6 en 8 oplossingen zijn.
Met de GR kun je zien dat er niet meer oplossingen zijn door bijvoorbeeld de grafiek van: $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^3 - 52\mathrm{X} - 96$ te tekenen.
f. Welke oplossingen heeft nu de oorspronkelijke vergelijking: $x^3 - 12x^2 - 4x + 48 = 0$?

We hebben hierboven, door substitutie een vergelijking van de vorm $x^3 + ux^2 + vx + w = 0$ omgezet in een vergelijking van de vorm: $y^3 = py + q$.

Door een substitutie van de vorm $x = y + \_\_$ kun je de vergelijking $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$ ook omzetten in een vergelijking van de vorm: $y^3 = py + q$, voor zekere p en q.
g. Welke substitutie $x = y + \_\_$ en wat zijn dan de getallen p en q?
h. Welke oplossingen heeft de vergelijking
$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$?


Cardano 1501-1576

Cardano heeft een formule opgeschreven voor een oplossing van een derdegraadsvergelijking van de vorm: $x^3 = px + q$.
Die formule is:
$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} .$$
In de volgende opgaven bekijken we de formule nader.

4 **a.** Wat vind bij de vergelijking $x^3 = 52x + 96$ met de formule van Cardano?
Waarom vind je geen oplossing?

Bekijk de functie $f(x) = x^3 - 52x - 96$.
Je kunt $f(x)$ zo groot krijgen als je wil door x groot genoeg te kiezen, we noteren dat zó: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
Verder: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b. Verklaar dat met de formule van $f(x)$.
c. Leg uit dat hieruit volgt dat $f(x)$ een nulpunt heeft.

Bekijk de functie $g(x) = -2x^3 + 1000x^2 + 100x + 9$.

Dan $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \infty$.

d. Leg uit dat hieruit volgt dat $g(x)$ een nulpunt heeft.

Elke derdegraadsvergelijking heeft minstens een (reëel) getal als oplossing.

5 Bekijk de vergelijking $x^3 = 12x + 20$.
Met de GR kun je zien dat de vergelijking drie oplossingen heeft.
a. Leg uit hoe.
b. Laat zien dat de formule van Cardano de oplossing $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}$ oplevert.
c. Leg uit dat $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$ en $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} = 4$.
d. Controleer door in te vullen dat $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}$ aan de vergelijking $x^3 = 12x + 20$ voldoet.

6 Gegeven is de vergelijking $x^3 = 9x + 28$.
a. Bereken een oplossing met de formule van Cardano.
b. Heeft de vergelijking nog andere oplossingen?

In sommige gevallen levert de formule van Cardano niets op, in andere gevallen wel, maar dan vind je misschien niet alle oplossingen.
Om met de formule van Cardano oplossingen van een derdegraadsvergelijking te vinden, moet je wortels van negatieve getallen trekken en accepteren dat de vergelijking $x^3 = 1$ meer dan één oplossing heeft.


Bombelli 1526-1572

Rafaël Bombelli (1526-1572) kwam op het idee met wortels uit negatieve getallen te rekenen in zijn boek *Algebra*.
In opgave **2** hebben we de volgende vergelijking bekeken: $x^2 - 2x + 2 = 0$.
Als we de wortelformule gebruiken, vinden we als oplossingen: $x = 1 + \sqrt{-1}$ en $x = 1 - \sqrt{-1}$.

Dat $1+\sqrt{-1}$ oplossing is controleer je, *rekenend als Bombelli*, zó:

$\left(1+\sqrt{-1}\right)^2-2\left(1+\sqrt{-1}\right)+2=$

$1+2\cdot1\cdot\sqrt{-1}+\left(\sqrt{-1}\right)^2-2-2\sqrt{-1}+2=$

$1+2\sqrt{-1}-1-2-2\sqrt{-1}+2=0$

Bombelli behandelde $\sqrt{-1}$ net als alle andere getallen.

7 **a.** Controleer, rekenend als Bombelli, dat $1-\sqrt{-1}$ oplossing van de vergelijking $x^2-2x+2=0$ is.
b. Laat, rekenend als Bombelli, zien dat
$\sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}}\cdot\sqrt[3]{-1-\sqrt{-7}}=2$.

Bekijk de vergelijking $x^3=6x-2$.
c. Geef de oplossing die je met de formule van Cardano krijgt.
d. Controleer, rekenend als Bombelli, dat je antwoord uit vraag **c** aan de vergelijking $x^3=6x-2$ voldoet.

We introduceren het getal i met de eigenschap $i^2=-1$. Als je hiermee wilt gaan rekenen, heb je ook 2i nodig, en $1+2i$, enzovoort. We werken dus met getallen van de vorm $a+bi$, waarbij a en b gewone reële getallen zijn. De reële getallen maken ook deel uit van de getallen van de vorm $a+bi$; je krijgt ze door $b=0$ te nemen. De manier waarop we getallen van de vorm $a+bi$ optellen en vermenigvuldigen, moet zó gaan dat rekenregels zoals de commutatieve, distributieve en associatieve wet blijven gelden.

8 Als $x=2+3i$ en $y=1-4i$, wat zou dan $x+y$ en $x\cdot y$ volgens jou moeten zijn?

We spreken de volgende **optelling** en **vermenigvuldiging** af voor de getallen $x=a+bi$ en $y=c+di$:
$x+y=(a+c)+(b+d)i$
$x\cdot y=(ac-bd)+(ad+bc)i$

De verzameling getallen $a+bi$ met a en b reëel met de optelling en de vermenigvuldiging zoals hierboven, noemen we de verzameling van **complexe getallen**, die we met $\mathbb{C}$ noteren. In $\mathbb{C}$ gedraagt de optelling en vermenig-

vuldiging zich net zo als in $\mathbb{R}$. Zo geldt bijvoorbeeld de distributieve wet: $z \cdot (w+u) = z \cdot w + z \cdot u$.
Dat deze rekenregel geldt, zie je door uitschrijven.
Voor complexe variabelen gebruiken we vaak de letters z en w, enzovoort, in plaats van x en y enzovoort, die we meestal voor reële variabelen reserveren.

In het bijzonder gelden de zogenaamde **merkwaardige producten** voor complexe getallen.

$$(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$$

$$(z-w)^2 = z^2 - 2zw + w^2$$

$$(z+w)(z-w) = z^2 - w^2$$

Merkwaardig moet hier in een oude betekenis gelezen worden: waard om te merken = onthouden.
Dat bijvoorbeeld $(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$ volgt uit de distributieve wet als volgt:

$$(z+w)^2 = (z+w)(z+w) = (z+w)z + (z+w)w = z^2 + wz + zw + w^2 = z^2 + 2zw + w^2$$

9 **a.** Ga na of je antwoorden van opgave **8** kloppen met de optelling en vermenigvuldiging zoals hierboven gedefinieerd is.
b. Bereken (dat wil zeggen: schrijf in de vorm __ + __i):

$(2\mathrm{i})^3$	$2\mathrm{i}^3$	i^{10}
$(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$	$(2+\mathrm{i})^2$	$(2+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})$
$(4+3\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})$	$(1+\mathrm{i})^2$	$(1+\mathrm{i})^3$

c. Geef twee complexe getallen waarvan het kwadraat -4 is.
d. Bereken $z \cdot 1$.

10 De wortelformule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen volgt uit kwadraatafsplitsen, zoals je in de derde klas gezien hebt. Dat gaat ook met complexe getallen.
We bekijken nog eens de vergelijking $z^2 - 2z + 2 = 0$, zie opgave **2**, maar nu zoeken we complexe oplossingen. Die vergelijking is gelijkwaardig met de vergelijking $(z-1)^2 = -1$
a. Laat dit zien.
b. Welke twee complexe getallen kan $z-1$ dus zijn? En welke z?
c. Zoek twee oplossingen in $\mathbb{C}$ voor de volgende vergelijkingen. Schrijf die oplossingen in de vorm __ + __i.

$(z-3)^2 = -25$	$z^2 - 10z + 29 = 0$
$z^2 - 10z + 27 = 0$	$z^2 - 2\mathrm{i}z + 3 = 0$

Opmerking
De oplossingen van de kwadratische vergelijkingen die je hierboven gevonden hebt, kun je ook met de wortelformule vinden, bijvoorbeeld van de laatste:

$$z = \frac{2\mathrm{i} + \sqrt{(\text{-}2\mathrm{i})^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2\mathrm{i} + \sqrt{\text{-}4 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2\mathrm{i} + 4\mathrm{i}}{2} = 3\mathrm{i} \text{ of}$$

$$z = \frac{2\mathrm{i} - \sqrt{(\text{-}2\mathrm{i})^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2\mathrm{i} + \sqrt{\text{-}4 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2\mathrm{i} - 4\mathrm{i}}{2} = \text{-}\mathrm{i}$$

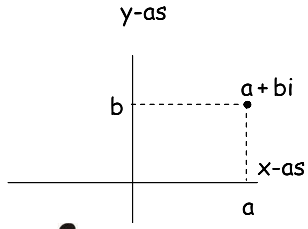
11 a. Bereken $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^3$ en $(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^3$.
b. Geef drie verschillende complexe oplossingen van de vergelijking $z^3 = \text{-}8$.
c. Bereken $(\text{-}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})^3$ en $(\text{-}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})^3$.
Van welke derdegraadsvergelijking zijn $\text{-}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$ en $\text{-}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$ oplossingen?
d. Kun je nu ook drie oplossingen van de vergelijking $z^3 = 8$ geven?

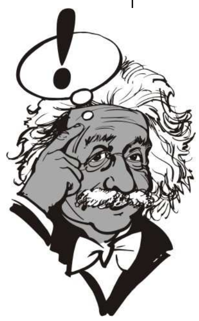
12 We bekijken de vergelijking $z^3 = 6z + 4$. De formule van Cardano geeft: $z = \sqrt[3]{2 + 2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{2 - 2\mathrm{i}}$.
a. Ga dat na.
b. Ga na dat $(\text{-}1 + \mathrm{i})^3 = 2 + 2\mathrm{i}$ en $(\text{-}1 - \mathrm{i})^3 = 2 - 2\mathrm{i}$.

Als je nu uit **b** concludeert dat $\sqrt[3]{2 + 2\mathrm{i}} = \text{-}1 + \mathrm{i}$ en dat $\sqrt[3]{2 - 2\mathrm{i}} = \text{-}1 - \mathrm{i}$, dan geeft de formule van Cardano de oplossing $z = \text{-}2$.

Als je met complexe getallen werkt en complex derdemachtswortels kunt trekken, werkt de formule van Cardano! Hoe je complex derdemachtswortels trekt, zullen we in het volgende zien.

2 Het complexe vlak



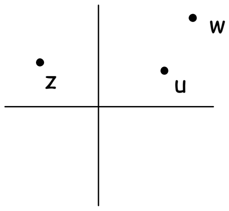


De verzameling van de reële getallen stellen we ons voor op een getallenlijn. Bij elk punt van de getallenlijn hoort een reëel getal en omgekeerd.
Om de complexe getallen voor te stellen, gebruiken we het platte vlak waarin een assenstelsel is gekozen. Het getal $a+b\text{i}$ laten we corresponderen met het punt (a,b).
Bij elk punt van het platte vlak hoort zodoende een complex getal en omgekeerd. We spreken van het **complexe vlak**.

> Van het getal $z=a+b\text{i}$ noemen we a het **reële deel** en b het **imaginaire deel**.
> We noteren dat zo: $\text{Re}(z)=a$ en $\text{Im}(z)=b$.

We kunnen de verzameling van de reële getallen opvatten als een deel van de complexe getallen: het zijn namelijk de getallen $z=a+b\text{i}$ met $b=0$.
Zoals al opgemerkt, gedragen zich de complexe getallen met de gedefinieerde optelling en vermenigvuldiging net zoals de reële getallen.
Zo is er een zogenaamd **neutraal getal voor de optelling** $0=0+0\cdot\text{i}$ waarvoor geldt: $z+0=0+z=z$ voor elk complex getal z.
En er is een **neutraal getal voor de vermenigvuldiging** $1=1+0\cdot\text{i}$ waarvoor geldt: $z\cdot 1=1\cdot z=z$ voor elk complex getal z.
Verder heeft elk getal complex getal z een **tegengestelde**; dat is het getal waarvan de som met z gelijk is aan 0. Het tegengestelde van z noteren we met -z. Als $z=a+b\text{i}$, dan -z = $-a+-b\text{i}$**.**
We zullen nog zien dat elk complex getal $z\neq 0$ een **omgekeerde** heeft; dat is het complexe getal waarvan het product met z gelijk is aan 1. Het omgekeerde van z noteren we als z^{-1} of als $\frac{1}{z}$.

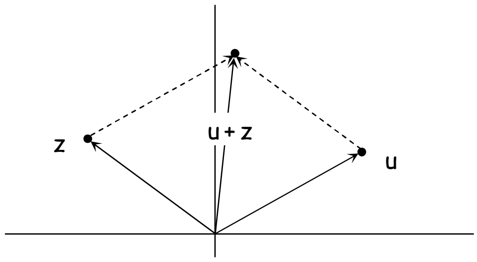
1 Teken in het complexe vlak de volgende verzamelingen.
a. De getallen z met $\text{Re}(z)=0$.
b. De getallen z met $\text{Im}(z)=2$.
c. De getallen z met $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$.
d. De getallen z met $\text{Re}(z)+\text{Im}(z) > 1$.



2 In het plaatje hiernaast zijn de getallen z, w en u aangegeven.
a. Neem het plaatje over en geef erin de getallen $-u$, $u+w$, $z+w$, $2w$, $-2z$ aan.

Vermenigvuldigen gaat wat moeilijker.
Teken in het complexe vlak de getallen $a=1+\mathrm{i}$, $b=2-\mathrm{i}$ en $c=-3+2\mathrm{i}$.
b. Geef $\mathrm{i}\cdot a$, $\mathrm{i}\cdot b$ en $\mathrm{i}\cdot c$ aan.
c. Geef nu $\mathrm{i}\cdot z$, $\mathrm{i}\cdot w$ en $\mathrm{i}\cdot u$ aan.

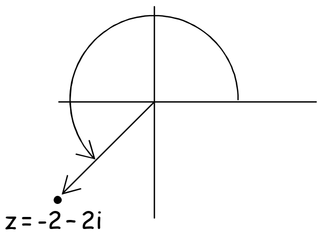
> Twee complexe getallen optellen gaat in het complexe vlak 'vectorieel'.



Met de **bij** z **horende vector** bedoelen we de vector die van 0 naar z wijst.
In de vorige opgave heb je (misschien) gezien dat vermenigvuldigen met i in het complexe vlak draaien over 90° tegen de klok in om de oorsprong 0 is.

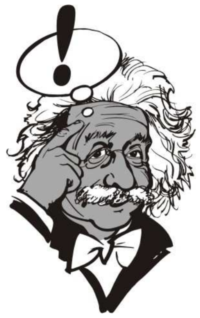
In het volgende bekijken we algemener wat vermenigvuldigen met een complex getal in het complexe vlak voorstelt.
Hiervoor zijn wat nieuwe begrippen handig.

Met de **positieve reële as** bedoelen we de halve lijn waarop de getallen z met $\mathrm{Im}(z)=0$ en $\mathrm{Re}(z)>0$.



3 Gegeven $z=-2-2\mathrm{i}$, $w=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ en $u=-10$.
a. Bereken de afstand van z, w en u tot 0.
b. Bereken exact de hoeken die de vectoren horend bij z, w en u met de positieve reële as maken.
c. Bereken in radialen de hoek die de vector bij $2-3\mathrm{i}$ met de positieve reële as maakt in één decimaal nauwkeurig.

De **absolute waarde** van het getal $z = a + b\text{i}$ met a en b reëel is de afstand van z tot de oorsprong. Het **argument** van z is de hoek in radialen die de bij z horende vector met de positieve reële as maakt($z \neq 0$). De absolute waarde van z noteren we met $|z|$ en het argument van z met arg(z).



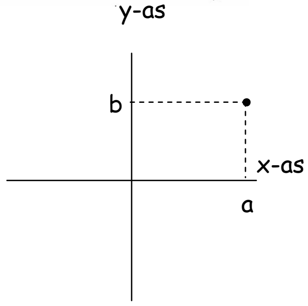
In de vorige opgave hebben we gezien dat $|-2-2\text{i}| = 2\sqrt{2}$ en $\arg(-2-2\text{i}) = 1\frac{1}{4}\pi$. Je zou ook kunnen zeggen: $\arg(-2-2\text{i}) = -\frac{3}{4}\pi$, misschien zelfs $\arg(-2-2\text{i}) = 3\frac{1}{4}\pi$. Eigenlijk zijn we alleen maar geïnteresseerd in het antwoord op een veelvoud van 2π na.
Indien nodig, kiezen we arg(z) zó, dat $-\pi < \arg(z) \leq \pi$.

Als $z = a + b\text{i}$ met a en b reëel, dan $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

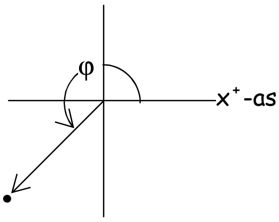
4 Wat kun je zeggen over arg(z) als
a. $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$?
b. $\text{Im}(z) = \sqrt{3} \cdot \text{Re}(z)$?
c. Welke punten z voldoen aan $|z| = 4$ en $\arg(z) = \frac{5}{6}\pi$?
d. Geef het exacte reële en imaginaire deel van z als $|z| = 2$ en $\arg(z) = 1\frac{1}{3}\pi$.

Intermezzo

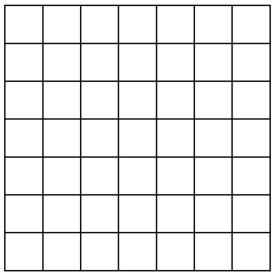
Poolcoördinaten
Op het radarscherm van een schip lees je af welke afstand r een voorwerp tot het schip heeft en ook de richting waarin je het voorwerp ziet. Die richting kun je bijvoorbeeld aangeven met de hoek φ die de verbindingslijn schip-voorwerp met de oostelijke windstreek maakt.



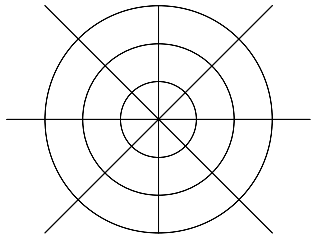
Vaak is het handig om een punt in het vlak met behulp van een getallenpaar weer te geven. Tot nu toe hebben we dat zó gedaan: we kiezen een punt, de oorsprong, (ons uitgangspunt) nemen hierdoor twee lijnen die loodrecht op elkaar staan, de x-as en de y-as enzovoort.
Het getallenpaar bij een punt dat je zo krijgt, noemen we **rechthoekscoördinaten** van dat punt.



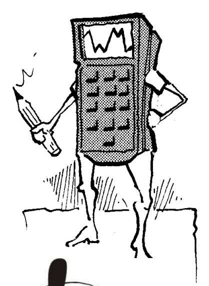
Je zou het ook anders kunnen doen. Je kiest vanuit de oorsprong een richting (bij ons valt die steeds samen met de richting van de positieve x-as). Een punt ligt dan vast door zijn afstand r tot de oorsprong en de richting waarin het punt ligt. Die richting geven we aan met een hoek, de hoek die die richting met de positieve x-as maakt. Het getallenpaar (r,φ) bij een punt dat je nu krijgt, noemen we de **poolcoördinaten** van dat punt.
Meestal kiezen we hoek φ zó, dat $-\pi < \varphi \leq \pi$.
Bij rechthoekscoördinaten hoort vierkantjespapier en bij poolcoördinaten poolroosterpapier.



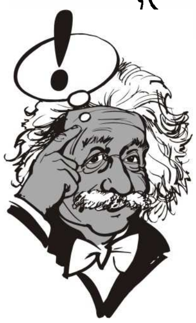
vierkantjespapier



poolroosterpapier



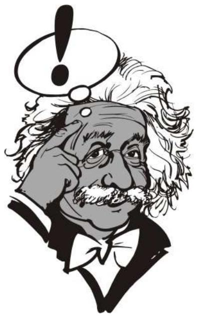
Uit het hoofdstuk goniometrie vwo5 wiskunde b, zal duidelijk zijn dat een punt met poolcoördinaten (r,φ) rechthoekscoördinaten (a,b) heeft met:
$a = r\cdot\cos\phi$ en $b = r\cdot\sin\phi$.
Je kunt met MODE: POL op de GR in poolcoördinaten werken.



Als $|z| = r$ en $\arg(z) = \varphi$, dan $z = r\cos\varphi + r\sin\varphi\cdot i$

5 **a.** Ga na dat bovenstaande juist is.
b. Teken de punten z met:
- $|z| = 1$
- $\arg(z) = \frac{3}{4}\pi$

We bekijken nu de punten met de volgende eigenschap:
$\arg(z) = \frac{1}{2}\pi\cdot|z|$ op een veelvoud van 2π na ($z\neq 0$).
Zij vormen een kromme.
c. Bereken exact de snijpunten van de kromme met de reële as, de imaginaire as en de lijnen $x = y$ en $x = -y$, voor zover de afstand tot 0 niet groter dan 4 is.
d. Schets de kromme.
Je kunt de kromme ook op de GR tekenen.



Complexe getallen z met $|z| = 1$ noemen we **unitaire** getallen. Deze getallen liggen op eenheidscirkel in het complexe vlak.

Voor twee complexe getallen z en w geldt:
$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ en $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ (op een veelvoud van 2π na).

6 Neem aan $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ en $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$.
a. Laat met een berekening zien dat $z \cdot w =$
$rs(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta))$.
b. Hoe volgt hieruit:
$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ en $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ op een veelvoud van 2π na?

Tip. Gebruik de somformules uit het hoofdstuk goniometrie vwo5 wiskunde b.

7 **a.** Hoe kun je met de formules hierboven zien dat het product van twee unitaire getallen weer unitair is?
b. Wat is het verband tussen $|z|^2$ en $|z^2|$?
c. Wat is het verband tussen $\arg(z^2)$ en $\arg(z)$?
En tussen $\arg(-z)$ en $\arg(z)$? (Op veelvouden van 2π na.)
d. Wat kun je van z zeggen als $|z \cdot w| = |w|$ voor elk getal w?
e. Voor welke getallen z geldt: $|z \cdot w| = z \cdot |w|$ voor elk complex getal w?
En voor welke getallen z geldt: $|z \cdot w| = -z \cdot |w|$ voor elk complex getal w?
f. In opgave **2** heb je gezien dat vermenigvuldigen met i draaien over 90° is. Hoe volgt dat uit de regels $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ en $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$?

8 We bekijken de vergelijking $z^3 = 1$.
a. Laat zien dat z unitair is.
b. Uit $z^3 = 1$ volgt dat $3 \cdot \arg(z)$ op een veelvoud van 2π na gelijk is aan 0. Leg dat uit.
c. Welke drie complexe getallen zijn dus oplossing van de vergelijking $z^3 = 1$?
d. Teken de vier oplossingen van de vergelijking $z^4 = 1$ in het complexe vlak en geef de oplossingen.
e. Hoe liggen de oplossingen van de vergelijking $z^8 = 1$ in het complexe vlak?
Geef de exacte oplossingen van de vergelijking $z^8 = 1$.

De oplossingen van de vergelijking $z^n = 1$, met $n = 3$, 4, 5, … vormen een regelmatige n-hoek op de eenheidscirkel in het complexe vlak. Ze zijn van de vorm: $\cos\frac{2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi k}{n}$, met $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

9 We bekijken de vergelijking $z^6 = 1$.
a. Teken de oplossingen van deze vergelijking in het complexe vlak.
Eén van de oplossingen heeft argument $\frac{1}{3}\pi$, die oplossing noemen we ε.
b. Schrijf ε in de vorm _ + _ · i (exact).
c. Wat is de meetkundige betekenis van de vermenigvuldiging met ε?
d. Druk de andere oplossingen van de vergelijking $z^6 = 1$ in ε uit.
e. Hoeveel is: $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5$? (Gebruik **a.**)
Tip. Neem telkens twee machten van ε handig samen.
f. De volgende getallen zijn machten van ε: $-\varepsilon$ en $\varepsilon^2 + 1$. Welke? Bewijs je bewering.

10 We bekijken de vergelijking $z^3 = -8$.
a. Wat kun je zeggen van $\arg(z)$?
b. Bereken $|z|$.
c. Geef de oplossingen van de vergelijking $z^3 = -8$.

11 **a.** Geef de exacte oplossingen van de vergelijking $z^3 = i$.
b. Ook van de vergelijking $z^3 = -i$.

12 In opgave **12** van de vorige paragraaf zochten we naar oplossingen van de vergelijking $z^3 = 2 + 2i$.
Er zijn drie oplossingen.
a. Geef van de drie oplossingen het argument en de absolute waarde.
b. Eén van de oplossingen heeft argument $\frac{3}{4}\pi$. Welke oplossing is dat?

Eén van de oplossingen van de vergelijking $z^3 = 2 - 2i$ heeft argument $-\frac{3}{4}\pi$.
c. Ga dat na en bepaal die oplossing.

In opgave **12b** van de vorige paragraaf stond:
$(-1 + i)^3 = 2 + 2i$ en $(-1 - i)^3 = 2 - 2i$.
De getallen $-1 + i$ en $-1 - i$ ‘kwamen uit de lucht vallen’. Nu begrijp je hoe ze gevonden zijn.

Abraham de Moivre
1667-1754

13 Veronderstel $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.

a. Geef $|z|$ en $\arg(z)$.

b. Wat is $|z^n|$? En wat is $\arg(z^n)$?

> **Formule van de Moivre**
> $(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi$

c. Wat levert deze formule op voor $n = 2$, als je de linkerkant zonder haakjes schrijft?

14 a. Bereken met de formule van de Moivre:

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{10}$, $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{10}$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^{10}$

b. Bereken nu $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{10}$ met behulp van de eerste uitkomst van **a**.

> Als $z = r\cos\varphi + \mathrm{i}\,r\sin\varphi$, dan $z^n = r^n\cos n\varphi + \mathrm{i}\,r^n\sin n\varphi$

In het volgende bekijken de complex geconjungeerde van een complex getal, onder andere nodig bij het berekenen van het omgekeerde van een complex getal.

> Als $z = a + b\mathrm{i}$, dan heet $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ de **complex geconjungeerde** van z.
> Er geldt:
> $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
> $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
> $\bar{z} \cdot z = |z|^2$

15 Bewijs de drie regels hierboven.

16 Als je de plaats van z weet in het complexe vlak, hoe vind je dan de plaats van $\bar{z}$?

17 In het voorgaande hebben we gezien: $\bar{z} \cdot z = |z|^2$.

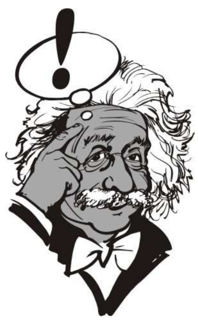
a. Laat zien dat hieruit volgt: $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \cdot z = 1$.

De **inverse** of **omgekeerde** van z is dus: $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

b. Geef de inverse van $1 + \mathrm{i}$ in de vorm: $\_\_ + \_\_ \cdot \mathrm{i}$ en reken na dat het door jou gegeven getal vermenigvuldigd met $1 + \mathrm{i}$ inderdaad 1 oplevert.
Doe hetzelfde voor het getal $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.
c. Als z op de eenheidscirkel ligt, hoe vind je dan de plaats van z^{-1}?
d. Hoe ziet de formule voor de inverse van $a + b\mathrm{i}$ eruit, geschreven in de vorm $\_\_ + \_\_ \cdot \mathrm{i}$?

De inverse van z is: $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Dus de inverse van $a + b\,\mathrm{i}$ is: $\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{a}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$.



Zoals al eerder opgemerkt, heeft in $\mathbb{R}$ elk getal x een tegengestelde $-x$ met de eigenschap: $x + -x = 0$.
Elk getal $x \neq 0$, heeft een omgekeerde x^{-1} of $\frac{1}{x}$ met de eigenschap: $x \cdot x^{-1} = 1$.
Zo is de inverse van $3\frac{1}{2}$ gelijk aan $\frac{2}{7}$, dus $(3\frac{1}{2})^{-1} = \frac{2}{7}$.

In $\mathbb{R}$ is delen door een getal $b \neq 0$ hetzelfde als vermenigvuldigen met b^{-1}.
Immers met $a : b$ bedoelen we het getal x dat met b vermenigvuldigd a oplevert; in formule: $b \cdot x = a$. Dus beide kanten met b^{-1} vermenigvuldigen geeft:
$b^{-1} \cdot b \cdot x = b^{-1} \cdot a$, dus $1 \cdot x = b^{-1} \cdot a$.

In $\mathbb{C}$ is het net zo: elk getal z heeft een tegengestelde $-z$ met de eigenschap: $z + -z = 0$.
Elk getal $z \neq 0$, heeft een inverse z^{-1} met de eigenschap: $z \cdot z^{-1} = 1$.
Bij het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{R}$ gebruiken we de volgende regel:
als $a \cdot b = 0$, dan $a = 0$ of $b = 0$.
De regel geldt ook in $\mathbb{C}$. Want als $z \cdot w = 0$ en $z \neq 0$, dan $z^{-1} \cdot z \cdot w = 1 \cdot w = 0$, dus $w = 0$.

In opgave **10** van paragraaf 1 hebben we voor de vergelijking $z^2 - 2z + 2 = 0$ twee oplossingen gevonden, namelijk $1+\mathrm{i}$ en $1-\mathrm{i}$. Meer oplossingen heeft de vergelijking ook niet. Dat zie je als volgt:

$z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -1 \Leftrightarrow (z-1)^2 - \mathrm{i}^2 = 0 \Leftrightarrow$
$(z-1-\mathrm{i})(z-1+\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow z-1-\mathrm{i} = 0$ of $z-1+\mathrm{i} = 0$,
dus $z = 1+\mathrm{i}$ of $z = 1-\mathrm{i}$.

18 Los de volgende vergelijkingen in z op.

a. $2z = 1+\mathrm{i}$

b. $(2+\mathrm{i})z = 4+3\mathrm{i}$

c. $(2+3\mathrm{i})z + 3 + \mathrm{i} = -2 + 13\mathrm{i}$

19 De getallen z met $\mathrm{Re}(z) = 1$ liggen op een rechte lijn. We bekijken waar die rechte lijn op afgebeeld wordt door de afbeelding $z \rightarrow \frac{1}{z}$.

Drie getallen op die lijn zijn: 1, $1+\mathrm{i}$ en $1-\mathrm{i}$.

a. Bepaal de beelden van die getallen onder de afbeelding $z \rightarrow \frac{1}{z}$.

De bewering is dat de getallen op die rechte lijn afgebeeld worden op een cirkel. Uit de drie beelden uit **a** volgt wat de straal en het middelpunt van die cirkel zijn.

b. Wat zijn de straal en het middelpunt van die cirkel?

c. Bewijs de bewering.

Tip. $\mathrm{Re}(z) = 1 \Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}x$, voor zeker reëel getal x.

d. Krijg je de hele cirkel als beeld van de lijn? Licht je antwoord toe.

20 Complex worteltrekken 1

Veronderstel: $b = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, met $-\pi < \varphi \le \pi$ en $r > 0$.

We bekijken hierbij het getal $c = \sqrt{r}\,(\cos\frac{1}{2}\varphi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\varphi)$.

a. Wat is het verband tussen c^2 en b?

b. Kun je nog een getal bedenken met hetzelfde verband?

Opmerking

Elke kwadratische vergelijking in z heeft twee oplossingen in $\mathbb{C}$. Je kunt zo'n vergelijking (kwadraatafsplitsen) namelijk schrijven als: $(z-a)^2 = b$, voor zekere complexe getallen a en b. Er is een complex getal c zó, dat $b = c^2$, zie de voorgaande opgave. Dan geldt:

$(z-a)^2 = b \Leftrightarrow (z-a)^2 = c^2 \Leftrightarrow (z-a-c)(z-a+c) = 0 \Leftrightarrow$
$z = a-c$ of $z = a+c$.

Carl Friedrich Gauss
1777-1855

Als $c = 0$ (en dus $b = 0$), vind je maar één oplossing.
Meer algemeen is de volgende stelling te bewijzen.
Voor elke n-de graads veelterm in z zijn er complexe getallen a en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ te vinden zó, dat die n-de graads veelterm te ontbinden is in: $a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$.
Deze stelling staat bekend als **de hoofdstelling van de algebra**. Een bewijs hiervan werd gegeven door Gauss.

Om een kwadratische vergelijking op te kunnen lossen, moet je complex wortel kunnen trekken.
Hoe je dat theoretisch doet, staat in opgave **20**.

21 Complex worteltrekken 2

Veronderstel: $b = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

a. Zoek twee getallen z met $z^2 = b$. Schrijf ze in de vorm ___ + __ · i
Controleer je antwoord door invullen.

b. Doe hetzelfde als $b = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

c. Ook als $b = -\mathrm{i}$.

In opgave **21** ging het complex worteltrekken tamelijk eenvoudig omdat $\frac{1}{2}\cdot\arg(b)$ daar een veelvoud van $\frac{1}{6}\pi$ of $\frac{1}{4}\pi$ is, en dan krijg je een mooie sinus en cosinus.

Anders kun je de volgende formules gebruiken.

$|\cos\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}$ en $|\sin\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha}$

22 Laat zien dat die formules volgen uit de verdubbelingsformules uit de goniometrie.

23 Complex worteltrekken 3

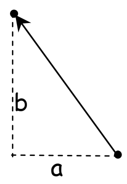
We zoeken twee getallen z met $z^2 = b$ waarbij $b = -7 - 24\mathrm{i}$.
We noemen $\arg(b) = \alpha$, waarbij $-\pi < \alpha \le \pi$.

a. Bereken $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$.

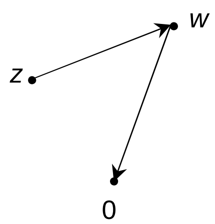
b. Bereken een mogelijke waarde voor $\cos\frac{1}{2}\alpha$ en $\sin\frac{1}{2}\alpha$.

c. Voor welke getallen z geldt: $z^2 = b$?

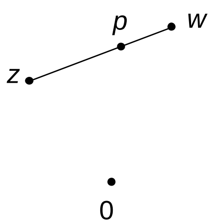
3 Meetkunde met complexe getallen



Rekenen met complexe getallen kent vele toepassingen. In veel gevallen werk je met complexe e-machten en moet je complex differentiëren. Wiskundig gezien is dit niet eenvoudig. Een toepassingsgebied waarbij je minder theorie over complexe getallen nodig hebt, is de meetkunde.
Eerst even het volgende. Af en toe komt het ons goed uit een complex getal als een pijl weer te geven; zie blz.9. Waar die pijl in het vlak getekend wordt, is niet van belang. Het gaat alleen om zijn grootte en richting (net als bij vectoren). Het getal $a+b\,\mathrm{i}$ stellen we voor door een pijl die een verplaatsing van a eenheden in de 'reële' richting en b eenheden in de 'imaginaire' richting aangeeft. De plaats van de pijl doet niet ter zake. (In de getekende situatie is a negatief en b postitief).



1 z en w zijn twee getallen in het complexe vlak.
a. Welk complex getal wordt voorgesteld door de pijl die van z naar w wijst? En die van w naar 0 wijst? Uitdrukken in z en w.
b. Neem het plaatje hiernaast over en teken hierin (als punten) de complexe getallen $z+w$, $z-w$, $w-z$, $z+\frac{1}{2}w$.
c. Druk het getal dat midden tussen z en w ligt uit in z en w.
d. Wat merk je op over de ligging van de complexe getallen $t\cdot w$, waarbij t alle mogelijke reële waarden aanneemt?



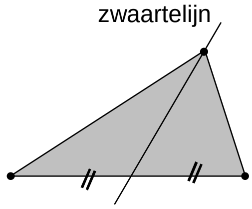
Het getal p ligt op het verbindingslijnstuk van z en w zó, dat het twee keer zo ver van z als van w ligt, zie plaatje.
e. Druk p uit in z en w.

We bekijken alle complexe getallen $z+t\cdot(w-z)$, waarbij t alle mogelijke reële waarden aanneemt.
f. Wat kun je zeggen over de ligging van die complexe getallen?
g. Wat kun je zeggen over de ligging als $0\le t\le 1$?

$z+t\cdot(w-z)=(1-t)\cdot z+t\cdot w$, dus uit **f** en **g** volgt:

> Gegeven twee complexe getallen w en z.
> De complexe getallen $s\cdot w+t\cdot z$ met s en t reëel en $s+t=1$ vormen de lijn door w en z. Voor $s\ge 0$ en $t\ge 0$, (en $s+t=1$) krijg je de punten op het lijnstuk met eindpunten w en z.

2 Het zwaartepunt van een driehoek



Zoals bekend is een **zwaartelijn in een driehoek** de lijn door een hoekpunt en het midden van de tegenoverliggende zijde.

Gegeven is een driehoek *ABC*. De complexe getallen bij de hoekpunten van de driehoek zijn a, b en c. Het midden van het verbindingslijnstuk van A en B is M en het complexe getal dat bij M hoort is m.

a. Druk m uit in a en b.

b. Toon aan dat $w = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{3}c$ op de zwaartelijn vanuit C ligt.

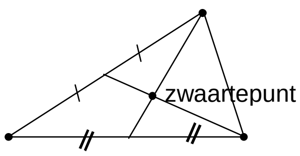
c. Schrijf w zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

d. Hoe zie je met behulp van **c** dat w ook op de andere zwaartelijnen van driehoek *ABC* ligt?

Het bij w horende punt is W.

e. Bereken $CW : WM$.

We hebben nu de volgende stelling bewezen. (In vwo5 wiskunde b heb je deze stelling ook al bewezen.)



Stelling

De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt. Dat punt heet het **zwaartepunt** van de driehoek. Het zwaartepunt ligt twee keer zo ver van een hoekpunt als van het midden van de tegenoverliggende zijde.

Stelling

Gegeven een driehoek. De complexe getallen bij de hoekpunten noemen we a, b en c en die bij het zwaartepunt z.

Dan geldt: $z = \frac{1}{3}(a+b+c)$.

3 **a.** Teken een willekeurige vierhoek.

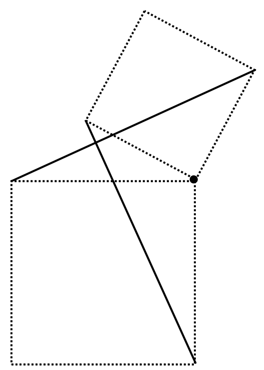
Teken het verbindingslijnstuk van de middens van de diagonalen van de vierhoek en de twee medianen van de vierhoek (een mediaan verbindt de middens van twee tegenover elkaar liggende zijden).

De medianen en het verbindingslijnstuk gaan door één punt.

b. Bewijs dat.

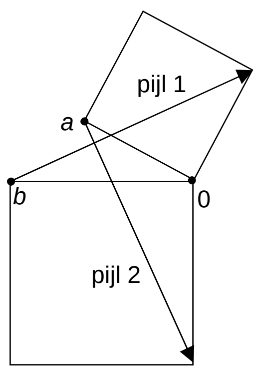
Tip. Je kunt met complexe getallen bewijzen dat het midden van een mediaan ook op de andere mediaan ligt én op de verbindingslijn van de middens van de diagonalen.

4 **a.** Teken een getal z in het complexe vlak. Teken hierbij het getal $\mathrm{i}\,z$, en $z+\mathrm{i}\,z$.
b. Wat kun je zeggen over de vierhoek met hoekpunten: 0, z, $\mathrm{i}\,z$ en $z+\mathrm{i}\,z$?
c. En wat kun je zeggen over de vierhoek met hoekpunten: 0, z, $-\mathrm{i}\,z$ en $z-\mathrm{i}\,z$?



5 **Twee vierkanten**
Hiernaast zijn twee vierkanten getekend met een gemeenschappelijk hoekpunt. Twee hoekpunten van het kleine vierkant zijn verbonden met twee hoekpunten van het grote vierkant, zie het plaatje hiernaast.

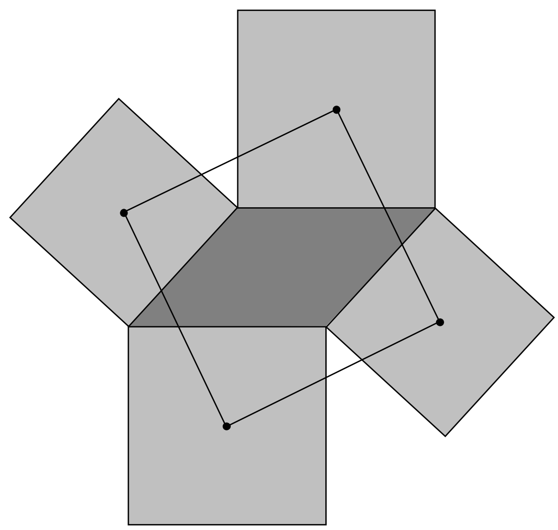
De verbindingslijnstukken zijn even lang en staan loodrecht op elkaar. Je kunt een bewijs geven met congruentie.
Het kan ook met complexe getallen. Dat gebeurt nu.
Kies de oorsprong in het gemeenschappelijke hoekpunt van de vierkanten en de getallen a en b als in het tweede plaatje.

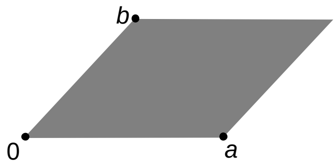


a. Druk de getallen bij de start- en eindpunten van de pijlen uit in a en b.
b. Welke getal p hoort dus bij pijl 1? En welk getal q bij pijl 2?

In de tekening kun je 'zien' dat $\mathrm{i}\,q=p$.
c. Reken na dat dat juist is.
d. Waarom heb je het bewijs nu gegeven?

6 **Een Sangaku uit Pythagoras**
In Pythagoras, jaargang 48, nummer 5 staat de volgende Sangaku op de achterkant.





Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit. De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.

Deze Sangaku is ontworpen door Hans van Lint, de winnaar van de NWD-sangakuwedstrijd 2009.

a. Welke stelling?

Hiernaast is het parallellogram in het midden van de sangaku getekend. We kiezen de getallen 0, *a* en *b* als in het plaatje hiernaast.

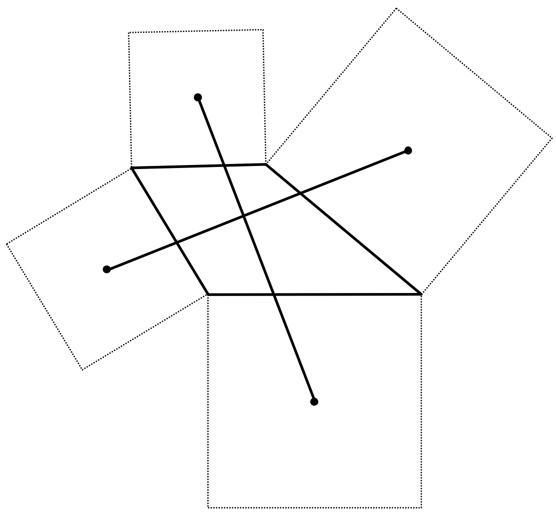
b. Laat zien dat $b+\frac{1}{2}(a+a\,\mathrm{i})$ één van middens van de vierkanten op de zijden van het parallellogram is.

c. Druk de middens van de andere vierkanten ook in *a* en *b* uit.

d. Bewijs de stelling.

7 De stelling van Aubel

Op de zijden van een willekeurige vierhoek zijn vierkanten gezet. De middens van de vierkanten op tegenover elkaar liggende zijden worden met elkaar verbonden, zie plaatje.

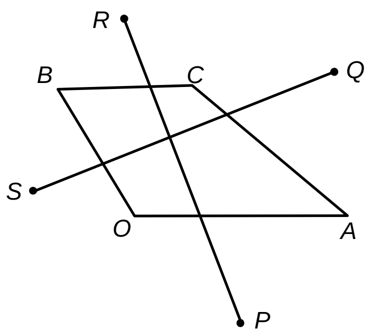


De verbindingslijnstukken zijn even lang en staan loodrecht op elkaar.

De stelling is genoemd naar **Henricus Hubertus van Aubel** (geboren op 20 november 1830 te Maastricht; overleden op 3 februari 1906 te Antwerpen), oa. leraar wiskunde aan het Koninklijk Atheneum van Antwerpen. Bron Wikipedia

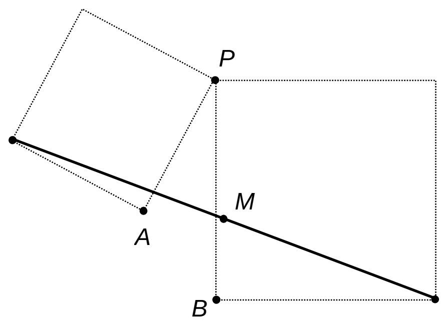
We gaan de stelling bewijzen.

We geven de hoekpunten van de vierhoek en de middens van de vierkanten namen, zie het plaatje op de volgende bladzijde.



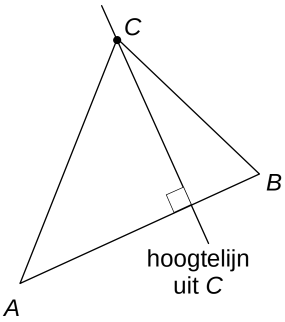
De complexe getallen bij de punten noemen we 0, a, b, c, p, q, r en s.
a. Druk p, q, r en s uit in a, b en c.
Je vindt bijvoorbeeld: $q=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\mathrm{i}\,a-\frac{1}{2}\mathrm{i}\,c$
b. Laat zien dat het complexe getal bij de pijl die van P naar R wijst gelijk is aan:
$\frac{1}{2}(-a+b+c)+\frac{1}{2}\mathrm{i}(a-b+c)$.
c. Druk het complexe getal bij de pijl die van Q naar S wijst uit in a, b en c.
d. Bewijs nu de stelling.

8 De stelling van Bottema



Op de lijnstukken PA en PB worden vierkanten gezet, zie plaatje. Het hoekpunt tegenover P van het ene vierkant wordt verbonden met het hoekpunt tegenover P van het andere vierkant. Het midden van het verbindingslijnstuk noemen we M.
De plaats van M hangt niet van P af.
Dit kun je mooi zien in een applet.
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Bottema.shtml
Misschien kun je zo'n applet zelf wel maken.

Bewijs de stelling.



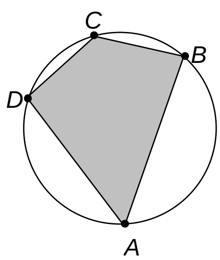
Een hoogtelijn van een driehoek gaat door een hoekpunt en staat loodrecht op de zijde tegenover dat hoekpunt.
In vwo5 wiskunde b is bewezen dat de drie hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan. Dit punt heet het hoogtepunt van de driehoek.

9 De rechte van Euler

a. Teken een willekeurige driehoek, met het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek.
Het lijkt wel of de drie punten op één lijn liggen. Dit gaan we in het volgende bewijzen. De lijn door de drie punten heet de rechte van Euler.
We kiezen het middelpunt van de omgeschreven cirkel als de oorsprong van het complexe vlak. Noem de hoekpunten van de driehoek A, B en C en de bijbehorende complexe getallen a, b en c.
Stel $h = a + b + c$.
b. Waarom staat de verbindingslijn van 0 met $a + b$ loodrecht op AB?
c. Leg uit dat hieruit volgt dat de lijn die h met c verbindt, loodrecht op AB staat.
d. Hoe volgt nu dat h bij het hoogtepunt van driehoek ABC hoort?

Het hoogtepunt van driehoek ABC noemen we H en het zwaartepunt Z.
e. Hoe volgt dat de punten O, Z en H op een lijn liggen en dat $OZ : ZH = 1 : 2$?

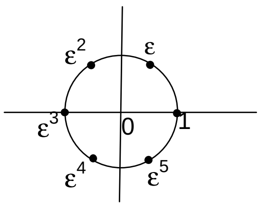
10 Gegeven een driehoek ABC. Het hoogtepunt van driehoek ABC noemen we H. De getallen bij A, B, C en H noemen we a, b, c en h.
In opgave **9** heb je bewezen dat $h = a + b + c$ als je het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC als oorsprong neemt.



Gegeven een koordenvierhoek $ABCD$. Als oorsprong nemen we het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de vierhoek. De bij A, B, C en D horende complexe getallen noemen we a, b, c en d.
We bekijken de hoogtepunten van de driehoeken ABC, ABD, ACD en BCD.
a. Druk de complexe getallen bij die hoogtepunten uit in a, b, c en d.
b. Bewijs dat vierhoek met als hoekpunten de vier hoogtepunten congruent is met vierhoek $ABCD$.

11 a. Teken een vierhoek *ABCD* en de zwaartepunten van de driehoeken *ABC*, *ABD*, *ACD* en *BCD*. Het lijkt erop dat deze vierhoek gelijkvormig is met de oorspronkelijke vierhoek *ABCD*. Dit moet je in de volgende onderdelen bewijzen.
b. Druk de complexe getallen bij die zwaartepunten uit in *a*, *b*, *c* en *d*.
c. Bewijs dat vierhoek met als hoekpunten de vier zwaartepunten gelijkvormig is met vierhoek *ABCD*.
Bepaal de bijbehorende verkleiningsfactor.

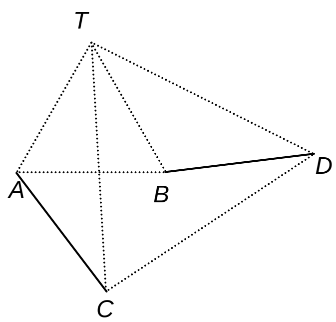
In de voorgaande bewijzen werd vaak gebruik gemaakt van de draaiingover 90°, dus in de complexe getallen met de vermenigvuldiging met i. In de laatste opgaven heb je de draaiing over 60° nodig, dus vermenigvuldigen met ε. Hierover moet je eerst nog wat meer weten.



12 Gegeven het getal $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, zie opgave **9** van paragraaf 2 en een complex getal $z \neq 0$.
a. Laat zien de getallen 1, ε, ε^2, $\varepsilon^3 = -1$, ε^4,ε^5, $\varepsilon^6 = 1$ in het complexe vlak hoekpunten van een regelmatige zeshoek op de eenheidscirkel zijn.
b. Wat stelt vermenigvuldigen met ε^5 meetkundig voor?
c. Leg uit dat $\varepsilon^2 + 1 = \varepsilon$.
d. Druk ε^4 en ε^5 uit in ε, zonder machten van ε te gebruiken.

13 a. Teken de driehoek met hoekpunten 0, *a* en εa.
b. Welke bijzonderheid heeft deze driehoek?
c. Welk punt krijg je als je *O* spiegelt in de lijn door de punten *a* en εa (uitdrukken in ε en *a*)?

Gegeven de getallen *a* en *b*. Er zijn twee getallen *c* zodat driehoek *ABC* gelijkzijdig is. (*A*, *B* en *C* zijn de punten die bij *a*, *b* en *c* horen.)
c. Druk *c* uit in *a* en *b* met behulp van ε.

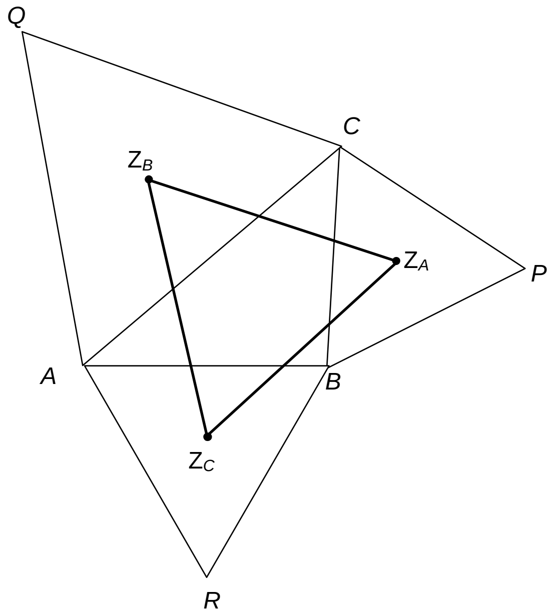


14 De driehoeken *ABT* en *CDT* zijn gelijkzijdig.
Toon met een berekening met complexe getallen aan:
De lijnen *AC* en *BD* snijden elkaar onder een hoek van 60° en de lijnstukken *AC* en *BD* zijn even lang.

15 De stelling van Napoleon

Napoleon Bonaparte 1769-1821
keizer der Fransen

Hij werd de machtigste man van Europa en een van de bekendste en meest invloedrijke figuren in de wereldgeschiedenis.
Napoleon bleek als militair in opleiding uitzonderlijk goed te zijn in rekenen en kaartlezen.Het rekenen paste hij o.a. toe in de artillerie bij het berekenen van de baan van een kanonskogel, het kaartlezen gebruikte hij zijn leven lang om vanaf (vaak slordige en foute) kaarten een goede positie en opstelling na te streven. Bron: Wikipedia



ABC is een willekeurige driehoek. De driehoeken *BCP*, *CAQ* en *ABR* zijn gelijkzijdig met zwaartepunten Z_A, Z_B en Z_C.
Dan is driehoek $Z_AZ_BZ_C$ gelijkzijdig.
Bewijs de stelling met een berekening met complexe getallen.
Gebruik hierbij opgave **12**.

Antwoorden

Paragraaf 1 Vergelijkingen van graad 3

1 Dan is er één oplossing.

2 **a.** $x+1=0$
b. $2x=1$
c. $4x^2=1$
d. Nee, ja
e. Nee, nee

3 **a.**
b. Anders heb je hooguit een kwadratische vergelijking.
c. Linker en rechter lid van de vergelijking delen door *a*.
f. 2, -2, 12
g. $x=y-1$, $p=0$ en $q=-8$
h. $-2-1=-3$ en verder geen

4 **a.** $\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3$ is negatief.
b. Als $x\to\infty$ of $x\to-\infty$, dan domineert de term x^3 in $x^3-52x-96$.
c. De grafiek van *f* ligt 'ver naar links onder de *x*-as en ver naar rechts erboven'. Ergens moet de grafiek door de *x*-as gaan.
d. Nu domineert de term $-2x^3$. De grafiek van *g* ligt 'ver naar links boven de *x*-as en ver naar rechts eronder'. Ergens moet de grafiek door de *x*-as gaan.

5 **a.** Als je de grafiek van $Y=X^3-12x-20$ tekent, zie je dat hij drie keer door de *x*-as gaat.
b. $\left(\sqrt[3]{16}\right)^3=16$ en $\left(2\sqrt[3]{2}\right)^3=2^3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=8\cdot 2=16$, dus $\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$ en $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{64}=4$
c. Als $x=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}$, dan $x^3=\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}\right)^3=$
$16+3\cdot\left(\sqrt[3]{16}\right)^2\cdot\sqrt[3]{4}+3\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\left(\sqrt[3]{4}\right)^3=$
$16+12\cdot\sqrt[3]{16}+12\cdot\sqrt[3]{4}+4=20+12\cdot(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4})=$
$20+12x$.

6 **a.** $\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3=196-27=169$, dus

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}=$$

$$\sqrt[3]{14+13}+\sqrt[3]{14-13}=3+1=4$$

b. We tekenen de grafiek van de functie $y = x^3 - 9x - 28$ op de GR en krijgen het vermoeden dat de grafiek maar één keer de x-as snijdt.
Het kan ook anders.

Met de afgeleide vind je een maximum $12\sqrt{3} - 28$ (negatief) voor $f(x)$ als $x = -\sqrt{3}$ en een minimum $-12\sqrt{3} - 28$ voor $x = \sqrt{3}$. Dus ligt de grafiek van f links van $\sqrt{3}$ onder de x-as. Rechts van $\sqrt{3}$ stijgt de grafiek van f (want de afgeleide is positief). Dus kan de grafiek hooguit één keer door de x-as gaan.

7 **a.** $\left(1-\sqrt{-1}\right)^2 - 2\left(1-\sqrt{-1}\right) + 2 =$

$1 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{-1} + \left(\sqrt{-1}\right)^2 - 2 + 2\sqrt{-1} + 2 =$

$1 - 2\sqrt{-1} - 1 - 2 + 2\sqrt{-1} + 2 = 0$

b. $\sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{-1-\sqrt{-7}} = \sqrt[3]{1-\sqrt{-7}^{\,2}} = \sqrt[3]{1--7} = 2.$

c. Met Cardano vind je: $x = \sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{-7}}$.

d. $x^3 = -1+\sqrt{-7} + 3\,(\sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}}\,)^2 \cdot \sqrt[3]{-1-\sqrt{-7}}\ +$

$3\sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}} \cdot (\sqrt[3]{-1-\sqrt{-7}}\,)^2 - 1 - \sqrt{-7}$ = (gebruik **c**) =

$-1+\sqrt{-7} + 6\cdot\sqrt[3]{-1-\sqrt{-7}} + 6\cdot\sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}} + -1-\sqrt{-7} =$

$-2 + 6\cdot(\sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{-7}}\,) = -2 + 6x$

8 **a.** $x + y = 2 + 3\text{i} + 1 - 4\text{i} = 3 - \text{i}$ en $x \cdot y = (2+3\text{i})\cdot(1-4\text{i}) =$
$2\cdot 1 + 3\text{i}\cdot 1 - 2\cdot 4\text{i} - 3\text{i}\cdot 4\text{i} = 2 + 3\text{i} - 8\text{i} + 12 = 14 - 5\text{i}$

9 **b.**

-8i	-2i	-1
2	$3+4\text{i}$	$4-3\text{i}$
25	2i	$-2+2\text{i}$

c. 2i en -2i
d. z

10 **a.** $(z-1)^2 = -1 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 = -1 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$
b. $z - 1 = \text{i}$ of $z - 1 = -\text{i}$, dus $z = 1 + \text{i}$ of $z = 1 - \text{i}$
c. $3+5\text{i},\ 3-5\text{i}$ $5+2\text{i},\ 5-2\text{i}$
$5+\text{i}\sqrt{2},\ 5-\text{i}\sqrt{2}$ $\text{i}+2\text{i} = 3\text{i},\ \text{i}-2\text{i} = -\text{i}$

11 **a.** $(1+\text{i}\sqrt{3}\,)^3 = 1 + 3\text{i}\sqrt{3} + 3(\text{i}\sqrt{3}\,)^2 + (\text{i}\sqrt{3}\,)^3 =$

$1 + 3\text{i}\sqrt{3} - 9 - 3\text{i}\sqrt{3} = -8$

En $(1-\text{i}\sqrt{3}\,)^3 = 1 - 3\text{i}\sqrt{3} + 3(\text{i}\sqrt{3}\,)^2 - (\text{i}\sqrt{3}\,)^3 =$

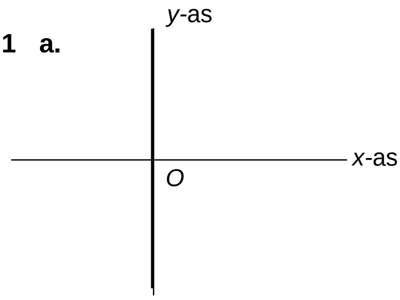
$1 - 3\text{i}\sqrt{3} - 9 + 3\text{i}\sqrt{3} = -8$

b. $1+\text{i}\sqrt{3},\ 1-\text{i}\sqrt{3},\ -2$

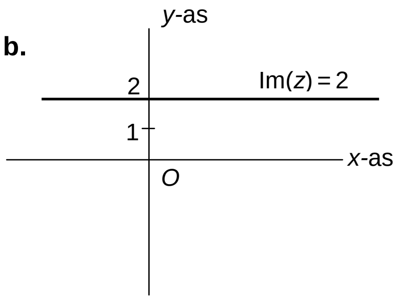
c. $\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$, -1
d. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$, 2

Paragraaf 2 Het complexe vlak

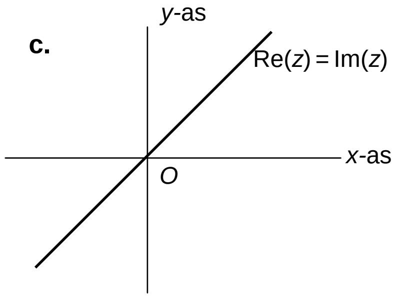
1 a.

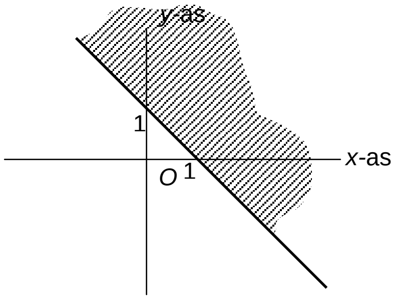


b.

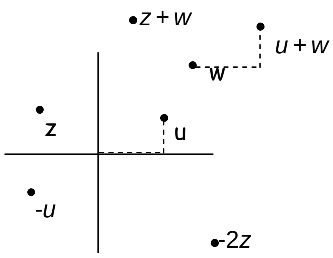


c.

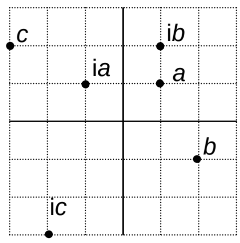




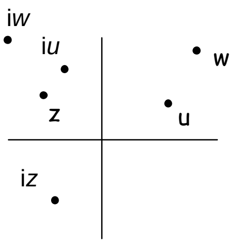
2 a.



b.



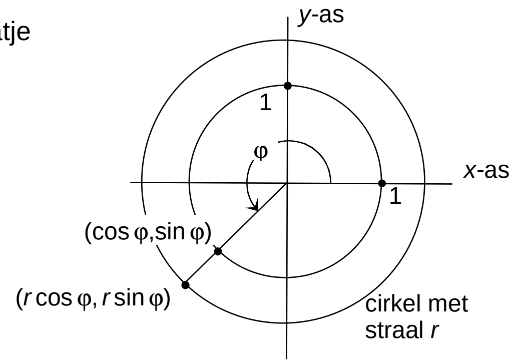
c.



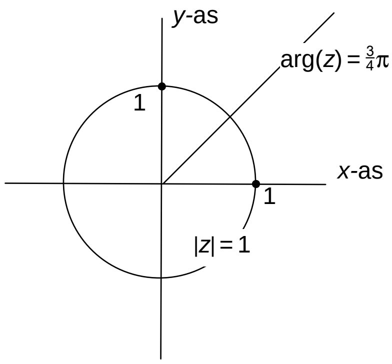
3 a. $2\sqrt{2}$, 2, 10
b. 225°, 300°, 180° en in radialen: $1\frac{1}{4}\pi$, $1\frac{2}{3}\pi$, π
c. $2\pi - \text{inv}\tan 1\frac{1}{2} \approx 5{,}3$ rad

4 **a.** $\frac{1}{4}\pi$ of $1\frac{1}{4}\pi$
b. $\frac{1}{3}\pi$ of $1\frac{1}{3}\pi$
c. $-2\sqrt{3} + 2i$
d. $\text{Re}(z) = 2 \cdot \cos 1\frac{1}{3}\pi = -1$ en $\text{Im}(z) = 2 \cdot \sin 1\frac{1}{3}\pi = -2\sqrt{3}$

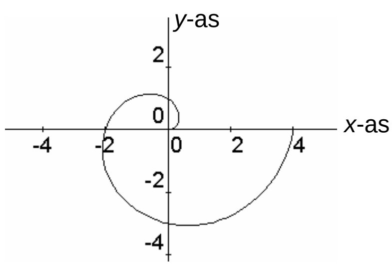
5 **a.** Zie plaatje



b.



c. $|z| \le 4$, dus $0 \le \arg(z) \le 2\pi$.
Dus $\arg z = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ 1\frac{1}{4}\pi,\ 1\frac{1}{2}\pi,\ 1\frac{3}{4}\pi,\ 2\pi$.
Dan $z = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}i\sqrt{2}$, $z = i$, $z = -\frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{4}i\sqrt{2}$, $z = -2$,
$z = -1\frac{1}{4}\sqrt{2} - 1\frac{1}{4}i\sqrt{2}$, $z = -3i$, $z = 1\frac{3}{4}\sqrt{2} - 1\frac{3}{4}i\sqrt{2}$, $z = 4$.
d.

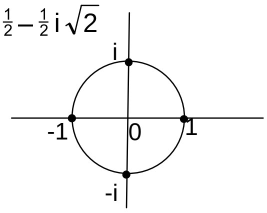


6 **a.** $z \cdot w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot s(\cos\beta + i\sin\beta) =$
$r \cdot s \cdot ((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$
$+ i(\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta))$
b. Wat in a staat is volgens de somformules goniometrie gelijk aan:

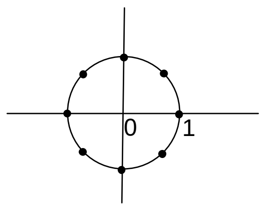
$r \cdot s \cdot (\cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha + \beta))$
De absolute waarde hiervan is $r \cdot s$ en het argument $\alpha + \beta$.

7 **a.** Als je twee getallen met absolute waarde 1 vermenigvuldigt is de absolute waarde van het product $1 \cdot 1 = 1$.
b. $|z|^2 = |z^2|$
c. $\arg(z^2) = 2\arg(z)$
d. Dan $|z| = 1$, dus z is unitair.
e. $|z \cdot w| = z \cdot |w|$ voor alle $w \Leftrightarrow z = 0$ of $|z| = z$, dus $z = 0$ of z moet positief reëel zijn.
$|z \cdot w| = \text{-}z \cdot |w|$ voor alle $w \Leftrightarrow z = 0$ of $|z| = \text{-}z$, dus $z = 0$ of z moet negatief reëel zijn.
f. Als je z met i vermenigvuldigt verandert de absolute waarde van z niet (want $|\mathrm{i}| = 1$).
Verder geldt: $\arg(\mathrm{i}\,z) = \arg(\mathrm{i}) + \arg(z) = \arg(z) + \frac{1}{2}\pi$.

8 **a.** Dan $|z|^3 = 1$, dus $|z| = 1$.
b. $\arg(z^3) = \arg(z) + \arg(z) + \arg(z) = \arg(1) = 0$ op een veelvoud van 2π na.
c. Dan $|z| = 1$ en $\arg(z) = 0$, $\frac{2}{3}\pi$ of $\text{-}1\frac{1}{3}\pi$, dus:
$z = 1$, $z = \text{-}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$ of $z = \text{-}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$.
d. 1, -1, i, -i
e. Dan $8 \cdot \arg(z) = 0$ op een veelvoud van 2π na, dus $z = 1$, $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$, i, $\text{-}\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$, -1, $\text{-}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$, -i en $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$

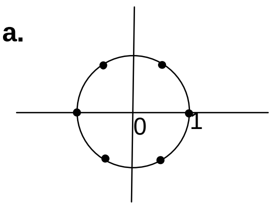


oplossingen van $z^4 = 1$

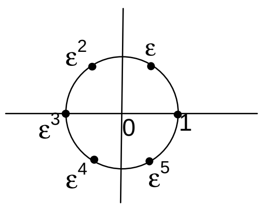


oplossingen van $z^8 = 1$

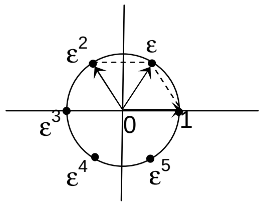
9 **a.**



oplossingen van $z^6 = 1$
b. $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$
c. Draaien over 60° (tegen de wijzers van de klok in)
d. ε^2, $\varepsilon^3 = \text{-}1$, $\varepsilon^4 = \text{-}\varepsilon$, $\varepsilon^5 = \text{-}\,\varepsilon^2$



e. $\varepsilon + \varepsilon^4 = 0$, $\varepsilon^2 + \varepsilon^5 = 0$, dus $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 = \varepsilon^3 = -1$
f. $-\varepsilon = \varepsilon^4$, $\varepsilon^2 + 1 = \varepsilon$, zie hieronder:



10 a. $3 \cdot \arg(z) = \pi$ op een veelvoud van 2π na, dus $\arg(z) = \frac{1}{3}\pi$ op een veelvoud van $\frac{2}{3}\pi$ na, dus $\arg(z) = \frac{1}{3}\pi$, π of $-\frac{1}{3}\pi$
b. $|z|^3 = 8$, dus $|z| = 2$
c. $1 + i\sqrt{3}$, -2, $1 - i\sqrt{3}$

Opmerking
Je kunt ook ook zeggen: je krijgt de oplossingen door die van $z^3 = 1$ met -2 te vermenigvuldigen.

11 a. $3 \cdot \arg(z) = \frac{1}{2}\pi$ op een veelvoud van 2π na, dus $\arg(z) = \frac{1}{6}\pi$ op een veelvoud van $\frac{2}{3}\pi$ na, dus $\arg(z) = \frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ of $-\frac{1}{2}\pi$, dus $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ of $-i$.
b. $3 \cdot \arg(z) = -\frac{1}{2}\pi$ op een veelvoud van 2π na, dus $\arg(z) = -\frac{1}{6}\pi$ op een veelvoud van $\frac{2}{3}\pi$ na, dus $\arg(z) = -\frac{1}{6}\pi$, $-\frac{5}{6}\pi$ of $\frac{1}{2}\pi$, dus $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$, $z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ of i.
Je kunt ook zeggen: het zijn de tegengestelden van de oplossingen uit **a**.

12 a. $\arg(2 + 2i) = \frac{1}{4}\pi$, dus $\arg(z) = \frac{1}{12}\pi$ op een veelvoud van $\frac{2}{3}\pi$ na, dus $\arg(z) = \frac{1}{12}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$ of $-\frac{7}{12}\pi$.
b. $|z|^3 = 2\sqrt{2}$, dus $|z| = \sqrt{2}$, dus $z = \sqrt{2} \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}) = -1 + i$.
c. $\arg(2 - 2i) = -\frac{1}{4}\pi$, dus $\arg(z) = -\frac{1}{12}\pi$ op een veelvoud van $\frac{2}{3}\pi$ na, dus $\arg(z) = -\frac{1}{12}\pi$, $\frac{7}{12}\pi$ of $-\frac{3}{4}\pi$.
Verder $|z| = \sqrt{2}$, dus $z = \sqrt{2} \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}) = -1 - i$.

13 a. $|z| = 1$ en $\arg(z) = \varphi$ op een veelvoud van 2π na
b. $|z^n| = 1$, $\arg(z^n) = n \cdot \varphi$ op een veelvoud van 2π na
c. Enerzijds:
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i(2\sin\varphi\cos\varphi)$
Anderzijds $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$
Dus: $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$ en $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$.

14 a. $\arg(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$, dus $\arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10} = -\frac{2}{3}\pi$

Verder: $|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}|=1$, dus $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)^{10}=i$

b. $2^{10}\cdot(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3})=-512-512i\sqrt{3}$

15 1^{ste} regel is flauw.

2^{de} regel:

stel $z=a+bi$ en $w=c+di$, dan $z\cdot w=(ac-bd)+(ad+bc)i$,

dus $\overline{z\cdot w}=(ac-bd)-(ad+bc)i$,

$\bar{z}\cdot\bar{w}=(a-bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$

Dus $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$.

3^{de} regel:

$\bar{z}\cdot z=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$, dus $\bar{z}\cdot z=|z|^2$

16 Spiegelen in de y-as

17 a. Deel beide leden door $|z|^2$.

b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; $\frac{12}{13}+1\frac{5}{13}i$

c. Spiegelen in de y-as

d. $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{a}{a^2+b^2}i$

18 a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

b. $\frac{4+3i}{2+i}=(4+3i)\cdot\frac{2-i}{5}=2\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

c. $(2+3i)z+3+i=-2+13i \Leftrightarrow (2+3i)z=-5+12i \Leftrightarrow$

$z=(-5+12i)\cdot\frac{2-3i}{13}=\frac{26+39i}{13}=2+3i$

19 a. $1, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

b. Middelpunt $\frac{1}{2}$ en straal $\frac{1}{2}$.

c. $z=1+ix$, dus $\frac{1}{z}=\frac{1-ix}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}i$.

We moeten dus bewijzen dat

$\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2=\frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2=\frac{1-2x^2+x^4}{4(x^2+1)^2}-\frac{4x^2}{4(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{1+2x^2+x^4}{4(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}$$

d. Nee, (0,0) krijg je niet, je komt er wel van twee kanten dichtbij als $x\to\infty$ of als $x\to-\infty$

20 a. c^2 heeft absolute waarde r en argument $2 \cdot \frac{1}{2}\varphi = \varphi$, dus $c^2 = b$.

b. $-c$

21 a. $\arg(b) = \frac{1}{3}\pi$, dus $\arg(z) = \frac{1}{6}\pi$ of $1\frac{1}{6}\pi$.
Verder $|b| = 4$, dus $|z|^2 = 4$, dus $|z| = 2$, dus $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ of $z = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

b. $\arg(b) = \frac{2}{3}\pi$, dus $\arg(z) = \frac{1}{3}\pi$ of $1\frac{1}{3}\pi$.
Verder $|b| = 2$, dus $|z|^2 = 2$, dus $|z| = \sqrt{2}$,
dus $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{6}$ of $z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{6}$.

c. $\arg(b) = -\frac{1}{2}\pi$, dus $\arg(z) = -\frac{1}{6}\pi$ of $\frac{5}{6}\pi$.
Verder $|b| = 1$, dus $|z|^2 = 1$, dus $|z| = 1$,
dus $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ of $z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

22 De verdubbelingsformules zijn:
$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$ en $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$.
De eerste formule kun je schrijven als:
$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ of als $\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ (want $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)
Vervang hierin φ door $\frac{1}{2}\alpha$, en trek de wortel.

23 a. $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ en $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$

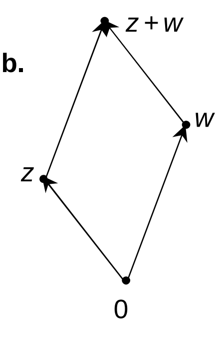
b. $|\cos\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{7}{25}} = \frac{3}{5}$ en
$|\sin\frac{1}{2}\alpha| = \frac{4}{5}$. $\mathrm{Arg}(b) < -\frac{1}{2}\pi$, dus een mogelijke waarde voor $\cos\frac{1}{2}\alpha = -\frac{3}{5}$ en $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{4}{5}$.

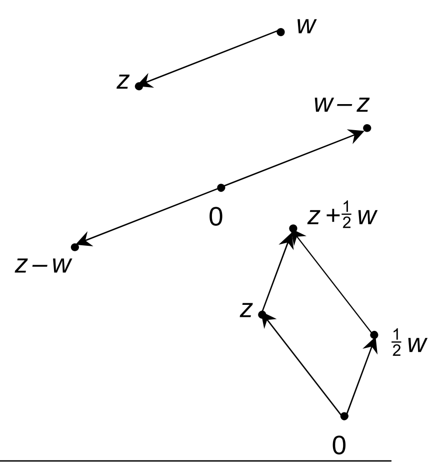
c. $|z| = 5$, dus een mogelijkheid voor $z = -3 + 4\mathrm{i}$. De andere mogelijkheid is dan $z = 3 - 4\mathrm{i}$.

Paragraaf 3 Meetkunde met complexe getallen

1 a. $w - z$, $-w$

b.



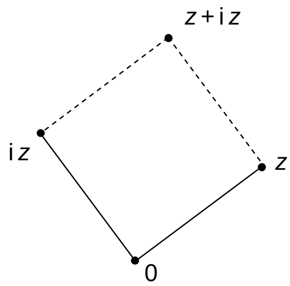


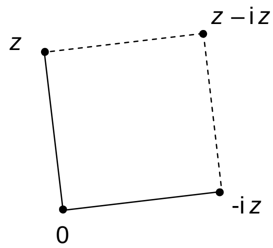
c. $z+\frac{1}{2}(w-z)=\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}z$
d. Die punten liggen op de lijn door 0 en w.
e. $p=z+\frac{2}{3}(w-z))=\frac{2}{3}w+\frac{1}{3}z$
f. Die liggen op de lijn door z en w.
g. Die liggen op het lijnstuk dat z met w verbindt.

2 **a.** $m=\frac{1}{2}(a+b)$
b. Het is van de vorm $s\cdot m+t\cdot c$ met $s+t=1$.
c. $\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c$
d. Omdat de uitdrukking symmetrisch is in a, b en c.
e. $2:1$, want $w=\frac{2}{3}\cdot m+\frac{1}{3}\cdot c$

3 **b.** Noem de hoekpunten a, b, c en d en de bijbehorende punten A, B, C en D. Dan hoort bij het midden van AB het getal $m=\frac{1}{2}(a+b)$ en bij het midden van CD hoort $n=\frac{1}{2}(c+d)$. Bij het midden van M en N hoort dan:
$\frac{1}{2}(m+n)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d$.
Het getal bij het midden van diagonaal AC is $\frac{1}{2}(a+c)$ en bij BD: $\frac{1}{2}(b+d)$. Het getal bij het midden van deze twee is:
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(b+d)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d$

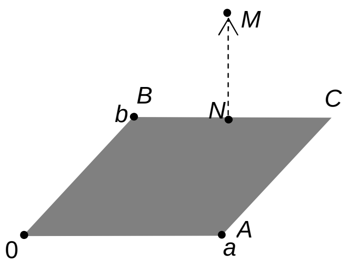
4 **a.**





b. Het is een vierkant.
c. Ook een vierkant

5 **a.** startpunt pijl 1 b en eindpunt -i a;
startpunt pijl 2 a en eindpunt i b;
b. $p=\text{-i}\,a-b$ en $q=\text{i}\,b-a$
c. $\text{i}\,q=\text{i}\,(\text{i}\,b-a)=-b-i\,\text{a}=p$
d. Pijl 2 draaien over 90° tegen de wijzers van de klok in geeft pijl 1 (want dat is vermenigvuldigen met i).



6 **a.** Zet op de zijden van een parallellogram vierkanten. De middens van die vierkanten zijn hoekpunten van een vierkant.
b. Zie plaatje. N hoort bij $b+\frac{1}{2}a$.
De pijl van N naar M representeert het etal $\frac{1}{2}\text{i}a$.
Dus $m=b+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\text{i}a=b+\frac{1}{2}(a+a\,\text{i})$.

Het midden K van het vierkant op zijde OA hoort bij $\frac{1}{2}a + \mathrm{i} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(a + \mathrm{i}\,a)$ en het midden P van het vierkant op zijde OB bij $p = \frac{1}{2}b + \mathrm{i} \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(b + \mathrm{i}\,b)$.
Het midden L van het vierkant op AC hoort bij: $l = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\mathrm{i}b = a + \frac{1}{2}(b + b\,\mathrm{i})$.
d. Dus de pijl van K naar L representeert het getal
$x = a + \frac{1}{2}(b + b\,\mathrm{i}) - \frac{1}{2}(a + \mathrm{i}\,a) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\mathrm{i}\,a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,b.$
En de pijl van L naar M representeert het getal
$y = b + \frac{1}{2}(a + a\,\mathrm{i}) - a - \frac{1}{2}(b + b\,\mathrm{i}) = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,a - \frac{1}{2}\mathrm{i}\,b.$
Er geldt: $\mathrm{i}\,y = x$, dus $KL = LM$ en KL en LM staan loodrecht op elkaar.
Enzovoort.

7 **a.** $p = \frac{1}{2}(a - \mathrm{i}\,a)$, $q = \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(a - c)$, $s = \frac{1}{2}(b + \mathrm{i}\,b)$,
$r = b + \frac{1}{2}(c - b) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(c - b) = \frac{1}{2}(b + c) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(c - b)$
b. $r - p = \frac{1}{2}(b + c) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(c - b) - \frac{1}{2}(a - \mathrm{i}\,a) =$
$\frac{1}{2}(-a + b + c) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(a - b + c)$.
c. $s - q = \frac{1}{2}(b + \mathrm{i}\,b) - \frac{1}{2}(a + c) - \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(a - c) =$
$\frac{1}{2}(-a + b - c) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(-a + b + c)$
d. Er geldt: $\mathrm{i}\,(r - p) = s - q$, dus lijnstuk RP gaat bij draaiing over 90° over in lijnstuk SQ.

8 Het hoekpunt tegenover P in het kleine vierkant noemen we X en het hoekpunt tegenover P in het kleine vierkant noemen we Y. Dan:
$x = a - \mathrm{i}\,(a - p)$ en $y = b + \mathrm{i}\,(b - p)$.
$m = \frac{1}{2}(x + y) = = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}\mathrm{i}(a + b)$, onafhankelijk van p!

9 **b.** Het punt in het vlak bij $a + b$ noemen we D. Dan is $OADB$ een ruit omdat $OA = OB$. Het gevraagde volgt uit het feit dat de diagonalen in een ruit loodrecht op elkaar staan.
c. De pijl van H naar C representeert $c - h = a + b$, dus uit **a** volgt dat CH loodrecht op AB staat.
d. Omdat de formule voor h symmetrisch is in a, b en c, is H het hoogtepunt van driehoek ABC.
e. De punten bij 0, $h = a + b + c$ en $z = \frac{1}{3}(a + b + c)$ liggen op één lijn en $z = \frac{1}{3}h$.

10 **a.** We noemen de hoogtepunten achereenvolgend H_1, H_2, H_3 en H_4. Dan: $h_1 = a + b + c$, $h_2 = a + b + d$,
$h_3 = a + c + d, h_4 = b + c + d$
b. Bijvoorbeeld $h_1 - h_2 = c - d$, dus H_1H_2 is evenwijdig met CD en even lang, enzovoort.

11 **b.** We noemen de zwaartepunten achereenvolgend Z_1, Z_2, Z_3 en Z_4. Dan: $z_1 = \frac{1}{3}(a + b + c)$, $z_2 = \frac{1}{3}(a + b + d)$,
$z_3 = \frac{1}{3}(a + c + d)$, $z_4 = \frac{1}{3}(b + c + d)$.
c. Bijvoorbeeld $z_1 - z_2 = \frac{1}{3}(c - d)$, dus Z_1Z_2 is evenwijdig met CD en $\frac{1}{3}$ keer zo lang, enzovoort.

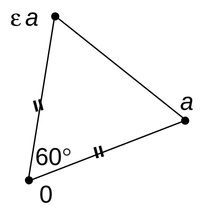
12 a. Vermenigvuldigen met ε is draaien over 60°. Dus bijvoorbeeld ε^4 krijg je door ε drie keer over 60° te draaien.

b. Draaien over 60° met de wijzers van de klok mee.

c. Zie het plaatje met de regelmatige zeshoek!

d. $\varepsilon^4 = -\varepsilon$ en $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$

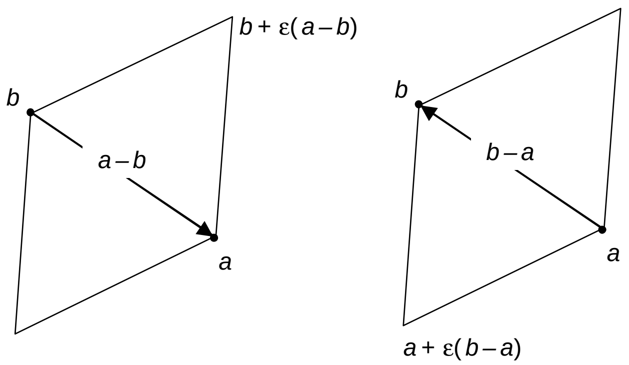
13 a.



b. Een regelmatige driehoek

c. $a + \varepsilon a$

d.



Dus $c = b + \varepsilon(a - b) = (1 - \varepsilon)\,b + \varepsilon\,a$ of $c = a + \varepsilon(b - a) =$ $(1 - \varepsilon)\,a + \varepsilon\,b$

Er zijn meer mogelijke schrijfwijzen, zie de vorige opgave.

14 Het getal bij A noemen a, enzovoort.
We kiezen T als oorsprong. Dan $b = \varepsilon\,a$ eb $d = \varepsilon\,c$.
De pijl van A naar C is $c - a$ en de pijl van B naar D is $\varepsilon\,\mathrm{c} - \varepsilon\,a = \varepsilon\,(b - a)$, dus de pijl van B naar D krijg je uit die van A naar C door over 60° te draaien.

15 We nemen het punt A als oorsprong. Dan:
$p = b + (c - b)\cdot\varepsilon^5 = \varepsilon\,b - \varepsilon^2 c$, $q = \varepsilon\,c$, $r = \varepsilon^5\,b = -\varepsilon^2\,b$.
Dus:
$z_A = \frac{1}{3}\,b + \frac{1}{3}\,c + \frac{1}{3}\,\varepsilon\,b - \frac{1}{3}\,\varepsilon^2\,c$, $z_B = \frac{1}{3}\,c + \frac{1}{3}\,\varepsilon\,c$ en $z_C = \frac{1}{3}\,b - \frac{1}{3}\,\varepsilon^2\,b$.
In de tekening kun je zien dat zou moeten gelden dat
$\varepsilon\,(z_A - z_C) = z_B - z_C$.
En dit reken je gemakkelijk na, gebruik makend van wat je in opgave **12** gezien hebt.