

---

# Besliskunde

Dictaat Wiskunde D  
Versie: 2 juli 2013

---



### Ontwikkeld door:

Hans van Ballegooij  
Maaslandcollege, Oss  
hans.van.ballegooij@gmail.com

### Op basis van:

- “Beslissen Wiskunde D”, door Jan Essers ism Kerngroep Wiskunde D Eindhoven, ©Fontys en de bewerking hiervan door Ferdy van der Werf op 16 juli 2008
- “Lineair programmeren, problemen met twee onbekenden”, door Etienne Goemaere, Katholieke Universiteit Leuven
- “Een inleiding in de besliskunde” door Herbert Hamers, Elleke Janssen, Marieke Quant, ©Tilburg University

---

# Inhoudsopgave

---

<b>1</b>	<b>Optimaliseren</b>	<b>1</b>
1.1	Basisprobleem	1
1.2	Het toegestane gebied	2
1.3	De maximale winst	6
1.4	Extra opgaven	9
<b>2</b>	<b>Beslissen in netwerken</b>	<b>12</b>
2.1	Basisprobleem	12
2.2	Grafentheorie	13
2.3	Grafen en Coalities	21
2.4	Extra opgaven	26
<b>3</b>	<b>Koppelen</b>	<b>29</b>
3.1	Basisprobleem	29
3.2	Een analyse van het probleem	30
3.3	De Hongaarse methode	31
3.4	Varianten van de Hongaarse methode	34
3.5	Extra opgaven	36
<b>4</b>	<b>Macht</b>	<b>39</b>
4.1	Basisprobleem	39
4.2	Definities	39
4.3	De machtsindex van Banzhaf	42
4.4	De machtsindex van Shapley-Shubik	44
4.5	Extra opgaven	46



# 1 Optimaliseren

## 1.1 BASISPROBLEEM



### Over boer Boersma en andere optimaliseringsproblemen

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

Boer Boersma heeft 45 hectaren land.

Er wordt koren en tarwe gezaaid.

Elke hectare beplant met koren levert 300 euro winst op.

Elke hectare beplant met tarwe levert 200 euro winst op.

Er is 120 ton kunstmest beschikbaar en er zijn 100 arbeidskrachten.

Voor elke hectare koren zijn 2 arbeidskrachten nodig en 4 ton kunstmest.

Voor elke hectare tarwe zijn 3 arbeidskrachten nodig en 2 ton kunstmest.

Boer Boersma streeft naar maximalisatie van de winst. Hoe moet hij gaan zaaien?

In dit probleem moet je dus gaan zoeken naar een maximum (van de winst) en er is sprake van allerlei voorwaarden. We starten met een analyse van het probleem en kruipen in de huid van de boer.

1

Boer Boersma denkt er over om de helft van de oppervlakte met koren in te zaaien en de andere helft met tarwe.

- a Hoe groot is dan de winst (opbrengst) voor Boer Boersma?
- b Wordt bij deze keuze aan alle voorwaarden voldaan?
- c Kies zelf een andere verdeling die mogelijk is en bereken bij deze verdeling de winst (opbrengst).

Je kunt nu het land weer op een andere manier gaan verdelen en opnieuw nagaan of het mogelijk is en wat dan de winst is. Een aanpak die niet echt slim is want je weet nooit of je de maximale winst hebt bereikt. Het is verstandiger om het probleem wiskundig aan te pakken. De onbekenden in dit probleem leg je niet vooraf vast (bv. 22,5 hectare koren) maar maak je variabel (dus  $x$  hectare koren).

Noem dus het aantal hectaren dat je inzaait met koren  $x$  en het aantal hectaren dat je inzaait met tarwe  $y$ . We noemen deze variabelen de *beslissingsvariabelen*. Je kunt nu nagaan waaraan deze variabelen moeten voldoen.

## 1.2 HET TOEGESTANE GEBIED

In de eerste plaats moet er rekening gehouden worden met de hoeveelheid land. De totale oppervlakte is 45 hectare en dus mag de som van  $x$  en  $y$  niet groter zijn dan 45:  $x + y \leq 45$ . Deze voorwaarde heet een *beperkende voorwaarde* of *restrictie*. Uiteraard kunnen de variabelen  $x$  en  $y$  niet negatief zijn, dus twee andere beperkende voorwaarden zijn:  $x \geq 0$  en  $y \geq 0$ .

Er zijn nog meer beperkende voorwaarden omdat er slechts een beperkt aantal arbeidskrachten is en een beperkte hoeveelheid kunstmest, zie de navolgende tabel:

Beperkende voorwaarde		Formule
I	De totale oppervlakte is 45 hectare	$x + y \leq 45$
II	Er is een beperkt aantal arbeidskrachten	$2x + 3y \leq 100$
III	Er is een beperkte hoeveelheid kunstmest	
IV	Het aantal hectaren koren kan niet negatief zijn	$x \geq 0$
V	Het aantal hectaren tarwe kan niet negatief zijn	$y \geq 0$
<b>Maximaliseer de winst</b>		
Noem de winst $z$ dan moet je maximaliseren:		$z =$

- 2**
- Toon aan dat voor de arbeidskrachten inderdaad geldt  $2x + 3y \leq 100$ .
  - Stel de beperkende voorwaarde voor de hoeveelheid kunstmest op.
  - Druk de winst  $z$  uit in  $x$  en  $y$ .

Een probleem zoals geformuleerd in de tabel noemen we een *Lineair Programmeren Maximalisatieprobleem*, kortweg *LP-maximalisatieprobleem*.

Algemeen is een LP-maximalisatieprobleem een probleem van het volgende type:

**LP-maximalisatieprobleem**

Maximaliseer

$$z = ax + by$$

Onder de voorwaarden

$$(1) \quad p_1x + q_1y \leq r_1$$

$$(2) \quad p_2x + q_2y \leq r_2$$

.....

$$(n) \quad p_nx + q_ny \leq r_n$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Er kunnen dus veel meer ( $n$ ) voorwaarden zijn dan de drie voorwaarden zoals bij boer Boersma.

De functie die in een LP-maximalisatieprobleem gemaximaliseerd dient te worden wordt de *doelfunctie* genoemd. Voor het gemak gebruiken we overal in dit hoofdstuk voor de doelfunctie de letter  $z$ .

Omdat er slechts twee variabelen zijn,  $x$  en  $y$ , kun je de beperkende voorwaarden gaan weergeven in een  $xy$ -assenstelsel.

3

Kijk naar de tabel. De voorwaarden  $x \geq 0$  en  $y \geq 0$  geven aan dat  $x$  en  $y$  positief zijn en dus hoef je alleen in het eerste kwadrant te tekenen. We gaan nu kijken naar de eerste restrictie.

**a** Vul bij de vergelijking  $x + y = 45$  de volgende tabel in:

x	0	10	20	30	40	
y						0

**b** Teken de grafiek bij de vergelijking  $x + y = 45$ .

**c** Waarom had je van te voren kunnen weten dat dit een rechte lijn wordt? Wat is de richtingscoëfficiënt van deze lijn?

**d** Arceer in je grafiek het gebied waar aan de drie restricties  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  en  $x + y \leq 45$  wordt voldaan.

De oplossing van ons probleem (wanneer is de winst maximaal?) voldoet aan de drie restricties. Deze oplossing moet dus ergens in het gearceerde gebied liggen. We noemen dit gebied het *toegestane gebied*. Om dit toegestane gebied verder te verkleinen gaan we ook de lijnen die horen bij restricties II en III in de grafiek tekenen.

- 4**
- a** Teken ook de grafieken van de lijnen die horen bij restricties II en III.
  - b** Bepaal het toegestane gebied.

- 5**
- a** Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen  $2x + 3y = 100$  en  $2x + y = 60$ .
  - b** Benoem alle hoekpunten van het toegestane gebied.

- 6** (Uit: Moderne Wiskunde, editie 8, deel A2, VWO) Gegeven zijn de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 12 \\ x + 2y \geq 3 \\ x \leq 7 \\ x - 2y \geq 5 \\ x \geq -4 \\ y \leq 7 \end{cases}$$

- a** Teken het toegestane gebied.
- b** Bereken de coördinaten van alle hoekpunten.



7

Top-fietsen produceert twee typen fietsframes, een ATB frame en een race frame. Voor de productie van een ATB frame is 4 kg aluminium en 6 kg staal nodig, voor de productie van een race frame is 5 kg aluminium en 2 kg staal nodig. Top-fietsen verkoopt een ATB frame voor 1980 euro en een race frame voor 1240 euro.



Het aanbod van aluminium is beperkt tot een maximum van 70 kg per dag en het aanbod van staal tot een maximum van 72 kg per dag. Top-fietsen wil zijn dagelijkse opbrengst maximaliseren. De tabel toont alle gegevens van het bovenstaand beschreven productieproces van fietsframes van Top-fietsen:

	ATB frame	race frame	dagelijks aanbod
aluminium	4	5	70
staal	6	2	72
prijs	1980	1240	

Noem  $x$  het aantal ATB frames geproduceerd op een dag en  $y$  het aantal race frames geproduceerd op een dag.

- Stel het bijbehorende LP-maximalisatieprobleem op.
- Teken het toegestane gebied
- Bereken de coördinaten van alle hoekpunten

8

Een bierproducent produceert blond bier (b) en donker bier (d). De voornaamste grondstoffen die nodig zijn voor de productie van bier zijn tarwe en hop. Het productieschema ziet er als volgt uit:

	blond bier	donker bier	dagelijks aanbod
tarwe	1	2	5
hop	2	1	8
prijs	5	7	

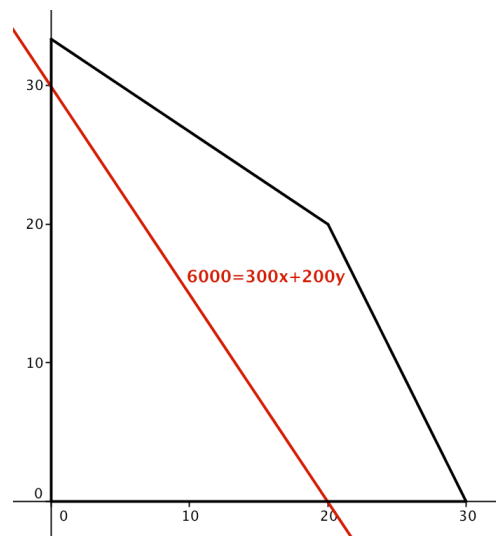


- Stel het bijbehorende LP-maximalisatieprobleem op.
- Teken het toegestane gebied.

### 1.3 DE MAXIMALE WINST

We keren terug naar het probleem van boer Boersma. De doelfunctie  $z = 300x + 200y$  moet gemaximaliseerd worden. Als je een waarde voor  $x$  en  $y$  kiest dan is de winst  $z$  vastgelegd. Als je bijvoorbeeld  $x = 10$  en  $y = 15$  kiest (een punt dat in het toegestane gebied ligt) dan is de winst

$z = 300 \cdot 10 + 200 \cdot 15 = \text{€ } 6.000$ . Er zijn meer punten in het toegestane gebied waar de winst  $\text{€ } 6.000$  is, bijvoorbeeld de punten  $(x,y) = (20,0)$  en  $(x,y) = (0,30)$ . In de grafiek hiernaast zie je het toegestane gebied en daarin getekend de lijn  $6000 = 300x + 200y$ . Overal op die lijn is de winst dus  $\text{€ } 6.000$ . Een dergelijke lijn heet een hoogtelijn of isolijn bij de doelfunctie.



- 9**
- Neem figuur 1.1 over en teken extra hoogtelijnen bij  $z = 2000$ ,  $z = 4000$  en  $z = 8000$ .
  - Waar verwacht je dat in het toegestane gebied de maximale winst wordt bereikt?
  - Bereken deze maximale winst.
  - Hoe zit het met het gebruik van kunstmest, arbeidskrachten en grond? Geef commentaar.

In opgave 9 heb je ontdekt dat de winst het grootst is in een hoekpunt van het toegestane gebied. Dit is altijd zo. Door de waarde van de doelfunctie in de hoekpunten van het toegestane gebied uit te rekenen vind je de maximale waarde. Deze methode heet de *hoekpuntenmethode*.

- 10** (Uit: Moderne Wiskunde, editie 8, deel A2, VWO) Het toegestane gebied bij de doelfunctie  $z = x + y + 10$  wordt gegeven door de volgende ongelijkheden:

$$\begin{cases} 5x + 8y \leq 39 \\ 4y - 5x \leq 15 \\ 7x + 5y \leq 36 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a** Teken het toegestane gebied.
- b** Bepaal met de hoekpuntenmethode de coördinaten van het punt uit het toegestane gebied waar de doelfunctie maximaal is. Welke waarde heeft  $z$  in dat punt?
- c** In welk punt van het toegestane gebied is  $z$  minimaal? Welke waarde heeft  $z$  in dat punt?

- 11** **a** Bepaal m.b.v. de hoekpuntenmethode het maximum bij het LP-maximalisatieprobleem van opgave 7.
- b** Idem voor opgave 8.

Als er zeer veel hoekpunten zijn, is de hoekpuntenmethode nogal omslachtig. In dat geval is het gemakkelijker om een paar hoogtelijnen te tekenen en met behulp daarvan te bepalen in welk hoekpunt het maximum wordt bereikt. In opgave 9 heb je eigenlijk deze methode al gebruikt. Deze methode noemen we de *schuifmethode*.

- 12** **a** Teken het toegestane gebied bij het onderstaande LP-maximalisatieprobleem:

Maximaliseer  $z = 2x + y$  onder de beperkende voorwaarden: 
$$\begin{cases} 8x + 2y \geq 17 \\ 4x + 2y \leq 13 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- b** Los het probleem op m.b.v. de schuifmethode. Er zijn meer oplossingen, bepaal ze allemaal.

13

(Uit: Wageningse Methode) Een kleine zakenman wil voor ten hoogste € 360 koffie en thee inkopen. Koffie kost € 3 per kg, thee € 4 per kg. De zakenman weet dat hij niet meer dan 100 kg koffie zal kunnen afzetten en niet meer dan 75 kg thee. Noem het aantal kg koffie dat de zakenman inkoopt  $x$  en het aantal kg thee  $y$ . Natuurlijk moet gelden  $x \geq 0$  en  $y \geq 0$



- a Aan welke drie andere ongelijkheden moeten  $x$  en  $y$  voldoen als je let op het te besteden bedrag en de mogelijke afzet?
- b Teken het toegestane gebied.  
  
Stel dat de zakenman € 1 winst maakt per kg koffie en € 2 winst per kg thee.
- c Stel de doelfunctie op.
- d Teken enkele iso-winstlijnen.
- e Wat is het optimale inkoopplan, d.w.z. het plan dat de meeste winst oplevert?

Al met al levert de uitwerking van het probleem van boer Boersma een algemene aanpak voor een LP-maximalisatieprobleem (of minimalisatieprobleem):

#### Plan van aanpak

Stel de doelfunctie  $z = ax + by$  en alle beperkende voorwaarden op  
 Teken alle lijnen die bij de beperkende voorwaarden horen  
 Bepaal het toegestane gebied

Via de hoekpuntenmethode:  
 Bepaal alle hoekpunten  
 Bereken in elk hoekpunt de functiewaarde  $z$  en bepaal de oplossing

of

Via de schuifmethode:  
 Teken een geschikte hoogtelijn  $c = ax + by$   
 "Schuif" daarmee naar het "beste" hoekpunt  
 Bereken dat hoekpunt en de waarde van  $z$  in dat hoekpunt

## 1.4 EXTRA OPGAVEN

14

Los m.b.v. de hoekpuntenmethode het volgende LP-minimalisatieprobleem op:

$$\text{Minimaliseer } z = 70x + 72y \text{ onder de beperkende voorwaarden: } \begin{cases} 4x + 6y \leq 1960 \\ 5x + 2y \geq 1240 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

15

Los het volgende LP-minimalisatieprobleem op:

$$\text{Minimaliseer } z = x + y \text{ onder de beperkende voorwaarden: } \begin{cases} 4x + 5y \geq 10 \\ x + 2y \leq 8 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

16

(Uit Wageningse Methode) Een timmerfabriekje maakt twee soorten salontafels: modern eiken en klassiek eiken. Per dag kunnen er van elke soort hoogstens vijf gemaakt worden. In verband met de opslagcapaciteit mogen er per dag niet meer dan zeven tafels in totaal gemaakt worden.



Een moderne tafel kost één mandag werk, een klassieke tafel kost twee mandagen. In de fabriek werken elf mensen aan de productie van salontafels.

Stel dat er per dag  $x$  moderne tafels en  $y$  klassieke tafels gemaakt worden.

- Welke omstandigheden beperken de dagelijkse productie?
- Aan welke 4 ongelijkheden (behalve  $x, y \geq 0$ ) moeten  $x$  en  $y$  voldoen?
- Teken het toelaatbare gebied.

De winst op een moderne tafel is € 200 en op een klassieke tafel € 300. Het bedrijf wil de winst maximaliseren.

- Wat is de doelfunctie?
- Teken enkele iso-winstlijnen.
- Bij welk productieschema is de winst het grootst?

Door een grote vraag naar moderne tafels was het mogelijk de prijs te verhogen. De winst die op een moderne tafel wordt gemaakt is nu € 300.

- g** Wat is nu de doelfunctie?
- h** Teken enkele iso-winstlijnen en bepaal bij welk productieschema de grootste winst wordt gemaakt.

17

(Uit Moderne Wiskunde, editie 8, deel A2, VWO) In een machinefabriek worden machines geproduceerd: type N en type S. Voor een machine van type N is de benodigde arbeidstijd per week op afdeling A 15 uur en op afdeling B 20 uur. Voor een machine van type S zijn deze tijden achtereenvolgens 20 en 30 uur. Per week is op afdeling A 900 uur arbeidstijd beschikbaar en op afdeling B 1200 uur. Voor een machine van type N moet het bedrijf vooraf € 500 aan materiaalkosten uitgeven en voor een machine van type S € 1000. Per week wil men niet meer dan € 34.500 aan materiaalkosten uitgeven. Op een machine van type N maakt men € 120 winst, op een machine van type S € 200. Men streeft naar maximale winst.

- a** Neem de tabel hieronder over en vul deze verder in

	type N	type S	totaal beschikbaar
Afdeling A	15		900
Afdeling B	20		

- b** Vertaal de beperkende voorwaarden in ongelijkheden en teken het toegestane gebied.
- c** Bereken de coördinaten van de vier hoekpunten van het toegestane gebied.
- d** Hoe groot is de maximale winst?

Door omstandigheden wordt er op een gegeven moment nog maar € 180 winst gemaakt op machines van type S. de winst op machines van type N blijft € 120.

- e** Onderzoek of de maximale winst verandert. Zo ja, met hoeveel?
- f** Leg uit waarom in dit geval de maximale winst bij verschillende productieaantallen bereikt kan worden.

Ook de winst op type N dreigt te verminderen.

- g** Bij welke winstverwachting op type N is het verstandig de productie van N te staken en uitsluitend type S te maken? Licht je antwoord toe met een toelichting.

18

(Ontleend aan CE VWO A12 2002 tweede tijdvak) Een speelgoedfabriek maakt poppenhuizen en houten treinen. Voor het vervaardigen van speelgoed is drie soorten arbeid te onderscheiden: zagen, timmeren en verven. Het aantal minuten dat hiervoor nodig is staat in de tabel:

soort arbeid	tijd (in minuten) nodig per poppenhuis	tijd (in minuten) nodig per trein
zagen	24	15
timmeren	60	40
verven	40	10

Er is één personeelslid belast met zagen, twee met het timmeren en één met het verven. Elk van deze personeelsleden kan maximaal 40 uur per week werken. Ga er van uit dat de kosten voor het maken van speelgoed bestaan uit materiaalkosten en arbeidskosten. Aan materiaal kost een poppenhuis € 17 en een trein ook € 17. Ieder personeelslid kost € 30 per gewerkt uur. Alleen voor gewerkte uren wordt het personeelslid betaald. Alle exemplaren die in een week worden gemaakt, worden dezelfde week verkocht, de poppenhuizen voor € 97 per stuk, de treinen voor € 58,50 per stuk.

- a** Bereken de maximale winst die wekelijks gemaakt kan worden.

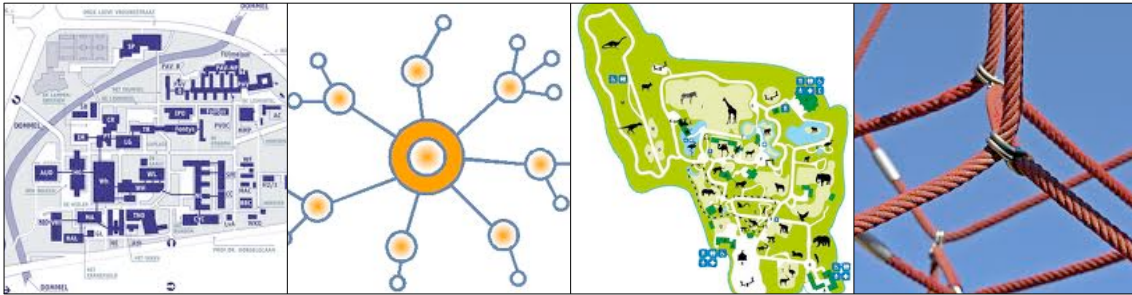
Waarschijnlijk heb je gemerkt dat onder de gegeven omstandigheden er nooit zoveel poppenhuizen en treinen gemaakt worden dat er voor de zager 40 uur werk is. De zager kan ook heel aardig verven. Hij doet dat net zo vlot als diegene die het normaal doet. Men besluit daarom dat de zager een aantal uren beschikbaar moet zijn om te verven. Gedurende die tijd is hij niet beschikbaar voor het zagen.



- b** Is het mogelijk de zager zo lang te laten verven dat het aantal timmerlieden de enige beperkende factor wordt? Licht je antwoord toe.

## 2 Beslissen in netwerken

### 2.1 BASISPROBLEEM

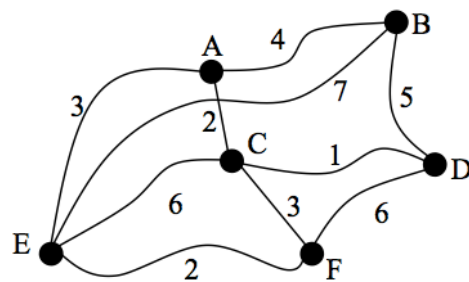


#### Over grafen (met een f!) en Koningsbergen

Hierboven zie je onder andere een plattegrond van de TU-Eindhoven. Een bezoeker kan met deze plattegrond waarschijnlijk snel zien hoe hij zo snel mogelijk bij een bepaald gebouw komt. Maar ook kun je met dit plaatje uitzoeken of er voor een bezoeker een wandeling bestaat waarbij je paden precies een keer doorloopt.

*Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.*

Op een fabrieksterrein wil men tussen zes depots een buizen netwerk aanleggen voor het transport van goederen. Hierbij moet elk van de zes depots bereikbaar zijn vanuit elk van de andere depots - eventueel via tussenliggende depots - en zijn omwegen niet erg omdat het vervoer door de buizen vrij snel gaat. De situatie zie je hiernaast in een schema.



De depots zijn aangegeven door punten en de mogelijke verbindingen door lijnen. Niet elke verbinding is mogelijk vanwege tussenliggende gebouwen. In de tekening zijn de kosten van de mogelijke verbindingen weergegeven door getallen (in miljoenen euro's) langs de betreffende verbindingen.

Uiteraard wil men de kosten van het aan te leggen buizen netwerk zo laag mogelijk houden. Hoe moet men het buizen netwerk aanleggen?

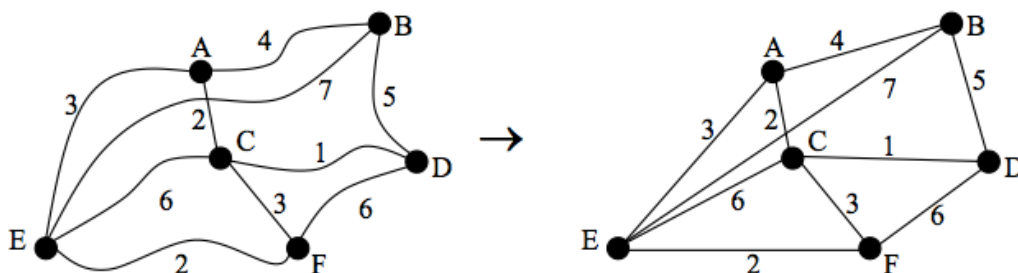


## 2.2 GRAFENTHEORIE

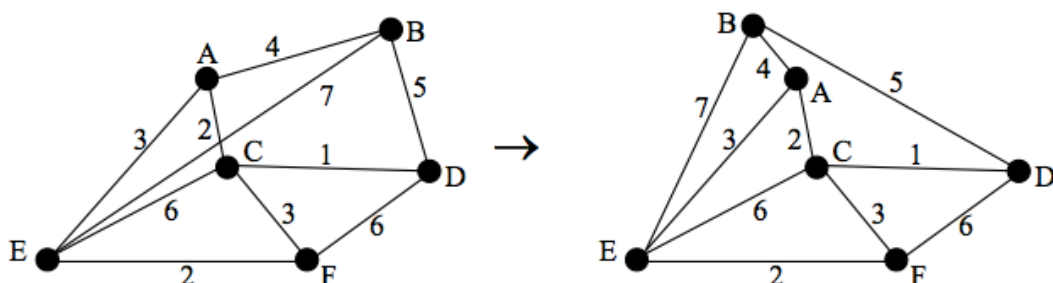
In dit probleem moet je dus gaan zoeken naar de kortste weg langs alle depots. Voordat we beginnen met een analyse gaan we eerst kijken naar het soort van figuur dat bij dit probleem hoort.

Een dergelijke figuur noemen we in de wiskunde een *graaf*. Het is een plaatje dat bestaat uit een verzameling punten die men ook wel *knopen* noemt en verbindingen die men kanten of *lijnen* noemt. De getallen die bij de verbindingen horen heten de *gewichten* van de lijnen. De tak van de wiskunde waarin grafen worden bestudeerd heet grafentheorie.

Bij de meeste problemen is de vorm van de verbinding niet van belang en in de grafentheorie tekent men daarom verbindingen tussen knopen meestal als rechte lijnstukken. De graaf hierboven kun je dus ook zo tekenen:



Het snijpunt van de lijnen BE en AC heeft in deze graaf geen betekenis. Dat snijpunt is dus geen punt van de graaf. Omdat dat snijpunt verwarrend kan werken kun je de lijn BE beter verplaatsen.



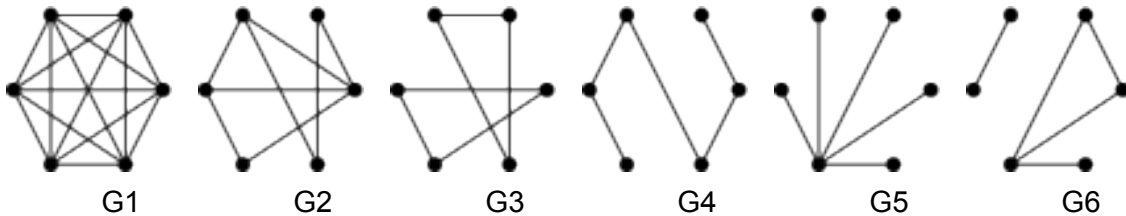
In het figuur hierboven zie je een derde weergave van het buizenennetwerk. De knopen A en B zijn daarin ook wat verplaatst om alle lijnen als rechte lijnstukken te tekenen.

Nog wat definities:

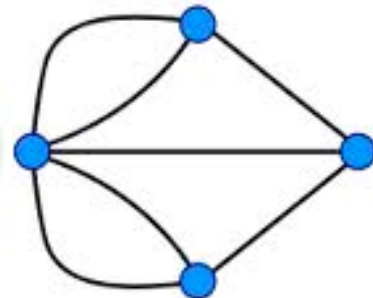
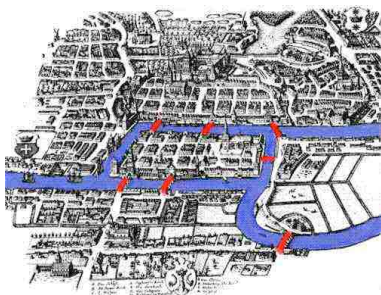
- Een graaf heet *volledig* als je van ieder knooppunt rechtstreeks naar ieder ander knooppunt kunt komen.
- Twee knopen heten *verbonden* als er een pad, bestaande uit lijnen uit de graaf bestaat, die die twee knopen verbindt. Die verbinding mag eventueel via een andere knoop lopen.
- Een graaf heet *samenhangend* als er een pad is tussen elk tweetal knopen.
- Een cykel is een speciaal pad: het is een rondwandeling over verschillende lijnen van knoop naar knoop waarbij je terugkomt in de beginknoop.
- Een samenhangende graaf die geen cykel bezit noemt men een *(opspannende) boom*.

19

Je hebt de volgende zes grafen:



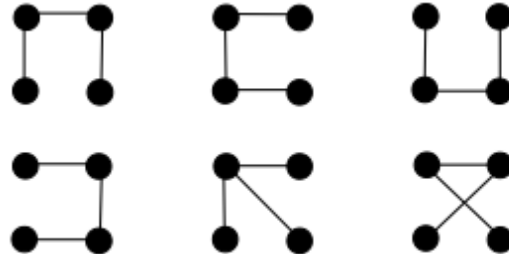
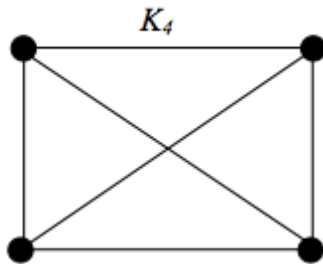
- Welke van deze grafen is samenhangend?
- Welke van deze grafen is volledig?
- Welke van deze grafen is een boom?
- Is het mogelijk dat een graaf samenhangend, volledig en een boom is? Waarom (niet)?



20

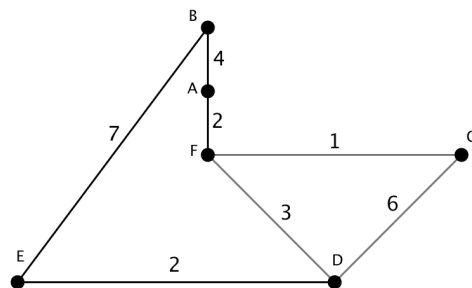
De zeven bruggen van Königsbergen is een beroemd probleem. De stad Königsbergen (heden ten dage Kaliningrad) lag in het oosten van Pruisen aan de rivier de Pregel, waarin twee eilanden lagen die door zeven bruggen met elkaar en met de vaste wal verbonden waren. Hierboven is de situatie schematisch afgebeeld. Tevens is een graaf getekend die de situatie abstract weergeeft. Is het mogelijk om zo te wandelen dat je precies eenmaal over elke brug loopt? Zo ja, geef de route. Zo nee, leg uit waarom niet.

- 21**
- a Hoeveel lijnen heeft een volledige graaf met 2, 3, 4, 5, 6 knopen?
  - b Leg uit dat een volledige graaf met  $n$  knopen  $\frac{1}{2}n(n-1)$  lijnen heeft.
  - c Bepaal het aantal opspannende bomen van een volledige graaf met twee knopen.
  - d Bepaal het aantal opspannende bomen van een volledige graaf met drie knopen.



- e De volledige graaf  $K_4$  hierboven bezit meer dan 10 opspannende bomen. Hierboven rechts zie je er zes getekend. Hoeveel opspannende bomen bezit  $K_4$  exact?
- f Wat is fout in de volgende redenering? Een opspannende boom van  $K_4$  heeft 3 lijnen. Je kunt op  $\binom{6}{3} = 20$  manieren 3 lijnen uit zes lijnen kiezen, dus  $K_4$  heeft 20 opspannende bomen.

- 22**
- In de tekening hiernaast zijn de zes depots van ons basisprobleem schematisch weergegeven. Ook is een mogelijk buizenetwerk weergegeven. Neem deze tekening over en beantwoord vervolgens de vragen.



- a Deze graaf heeft drie cyclen, benoem deze.
- b Is deze graaf samenhangend?
- c Waarom kan dit buizenetwerk nooit de oplossing zijn voor ons basisprobleem?
- d Teken, uitgaande van dezelfde zes depots, een buizenetwerk (graaf) met precies een cykel. Teken ook twee verschillende opspannende bomen. Zet steeds langs iedere lijn het gewicht van deze lijn.
- e Waarom kan een samenhangende graaf met een cykel nooit de oplossing zijn voor ons probleem?
- f Bereken de som van de gewichten van de twee verschillende opspannende bomen die je getekend hebt.
- g Kun je een opspannende boom tekenen met een lager totaalgewicht?
- h Iedere opspannende boom heeft precies 5 lijnen, leg uit waarom.

We gaan verder met ons basisprobleem. In de opgaven hebben we ontdekt dat het buizenprobleem er op neer komt dat je een boom zoekt waarvan de som van de gewichten van de lijnen minimaal is. Zo'n boom heet een minimaal opspannende boom.

Een manier om de minimale opspannende boom te bepalen is het bepalen van alle bomen en dan steeds de som van de gewichten te bepalen. Dat is in deze situatie best nog mogelijk maar bij meer lijnen en knopen al snel een tijdsintensieve en vrij onmogelijke klus. Zelfs een relatief kleine graaf die bestaat uit 6 knopen en 15 lijnen bezit ongeveer 1300 opspannende bomen.

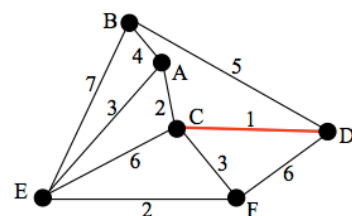
Er bestaan gelukkig slimmere strategieën. Een algoritme dat een minimale opspannende boom maakt is:

### Het algoritme van Kruskal

Kies een van de lijnen met het kleinste gewicht  
 Kies van de overgebleven lijnen de lijn met het kleinste gewicht en zorg daarbij dat die lijn samen met de eerder gekozen lijnen geen circuit vormt.  
 Ga zo door totdat je alle knopen hebt gehad.

In de volgende serie plaatjes zie je hoe je dit algoritme op het buizenprobleem toepast:

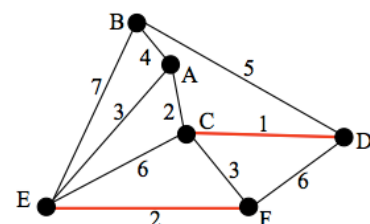
Kies lijn **CD**, deze heeft het kleinste gewicht, namelijk 1



Kies lijn AC of EF, deze hebben beide gewicht 2.

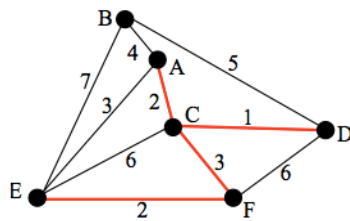
Keuze voor **EF**.

Som gewichten:  $1+2 = 3$ .



Dit keer is lijn **AC** de lijn met het kleinste gewicht en moet dus gekozen worden.

Som gewichten:  $1+2+2 = 5$ .

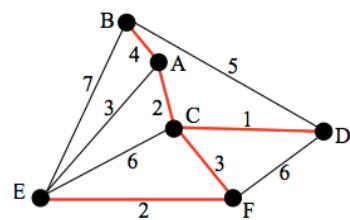
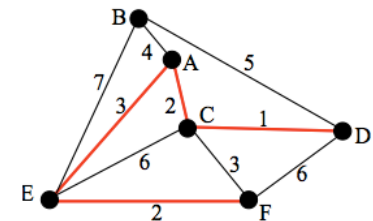
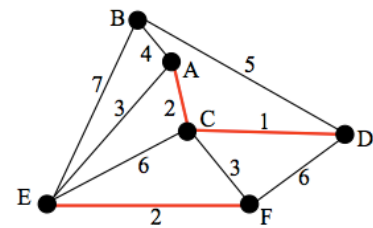


Gewicht 3 komt twee keer voor. Bij beide keuzes ontstaat geen circuit.

Links keuze **CF**

Rechts keuze **AE**

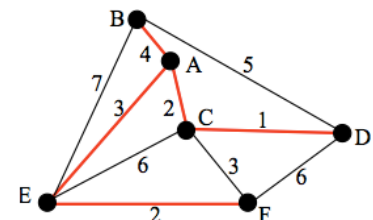
Som gewichten:  $1+2+2+3 = 8$ .



In beide situaties moet **BA** gekozen worden (bij keuze gewicht 3 ontstaat circuit).

Som gewichten:

$1+2+2+3+4 = 12$ .



Het probleem is nu opgelost. Er zijn twee minimale opspannende bomen en de som van de gewichten is 12. Voor het buizenprobleem betekent dat dat de minimale kosten 12 miljoen Euro zijn. De bedrijfsleiding kan kiezen uit twee netwerken.

Het algoritme van Kruskal beperkt het zoek- en rekenwerk aanzienlijk. De stap die in grote netwerken het meeste tijd kost is het controleren of er geen circuit ontstaat. Een methode waarbij die controle niet hoeft plaats te vinden is het algoritme van Prim. In dat algoritme voeg je geen lijnen toe maar knopen.

### Het algoritme van Prim

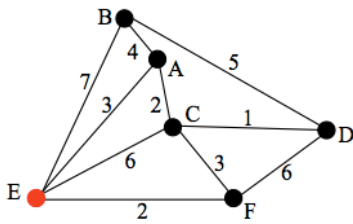
Kies een willekeurige knoop.

Kies uit alle lijnen van die knoop een lijn met minimaal gewicht.

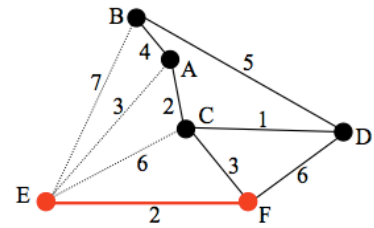
Kies van alle lijnen die bij de eerder gekozen knopen horen, steeds de lijn met het kleinste gewicht en voeg de bijbehorende nieuwe knoop toe.

Herhaal deze stap totdat je alle knopen hebt.

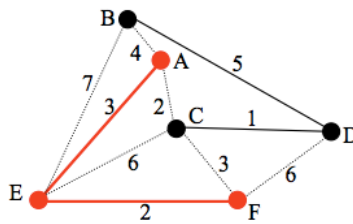
Ook dit algoritme gaan we stapsgewijs volgen bij het buizenprobleem.



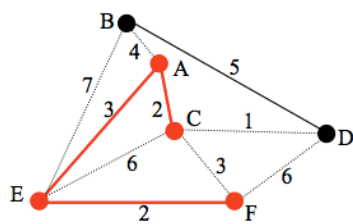
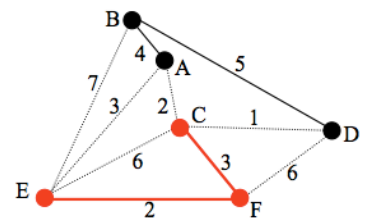
Links: Kies (vrij willekeurig) knoop **E**. In knoop E komen vier lijnen samen.  
 Rechts: Kies de lijn met het kleinste gewicht: EF.  
 Knoop **F** wordt toegevoegd.  
 Som gewichten: 2



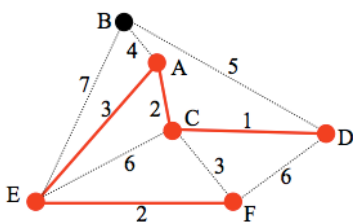
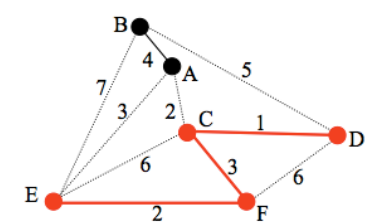
Bij de knopen E en F komen samen 5 lijnen aan. De lijnen met minimaal gewicht zijn AE en CF. Beide kunnen gekozen worden.



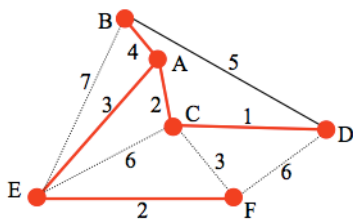
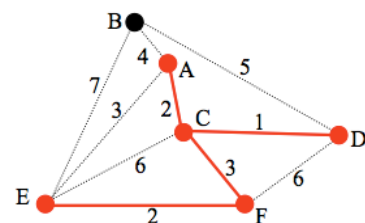
Links: Voeg AE toe met gewicht 3, Knoop **A**.  
 Rechts: Voeg CF toe met gewicht 3, Knoop **C**.  
 Som gewichten:  $2+3 = 5$ .



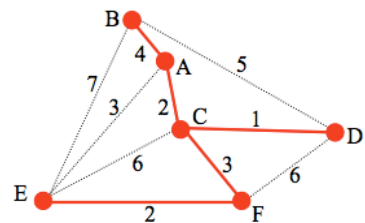
Links: Voeg AC toe met gewicht 2, Knoop **C**.  
 Rechts: Voeg CD toe met gewicht 1, Knoop **D**.



Links: Voeg CD toe met gewicht 1, Knoop **D**.  
 Rechts: Voeg AC toe met gewicht 2, Knoop **A**.



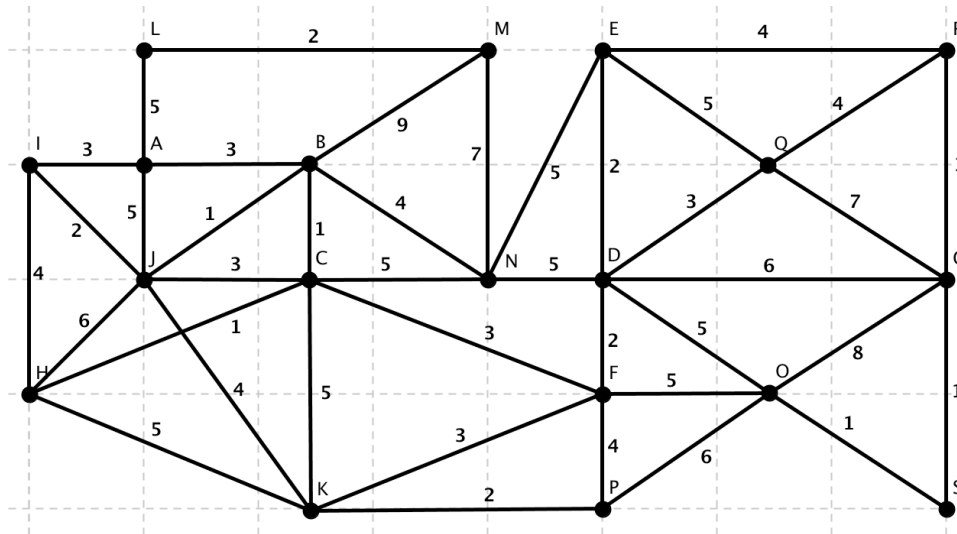
Links: Voeg AB toe met gewicht 4, Knoop **B**.  
 Rechts: Voeg AB toe met gewicht 4, Knoop **B**.



Uiteraard levert het algoritme van Prim dezelfde oplossingen (anders zou het geen correct algoritme zijn) als het algoritme van Kruskal. Het bewijs dat de beide algoritmes altijd de minimale opspannende boom leveren is niet heel eenvoudig en laten we hier achterwege.

23

Bepaal de minimale opspannende boom bij het onderstaande netwerk.



Kies het algoritme dat je het handigst lijkt.

24

Er liggen acht kleine eilandjes in een meer, en de regering wil 7 bruggen bouwen om ze te verbinden, zodat ieder eiland bereikt kan worden vanuit ieder eiland via een of meer bruggen.

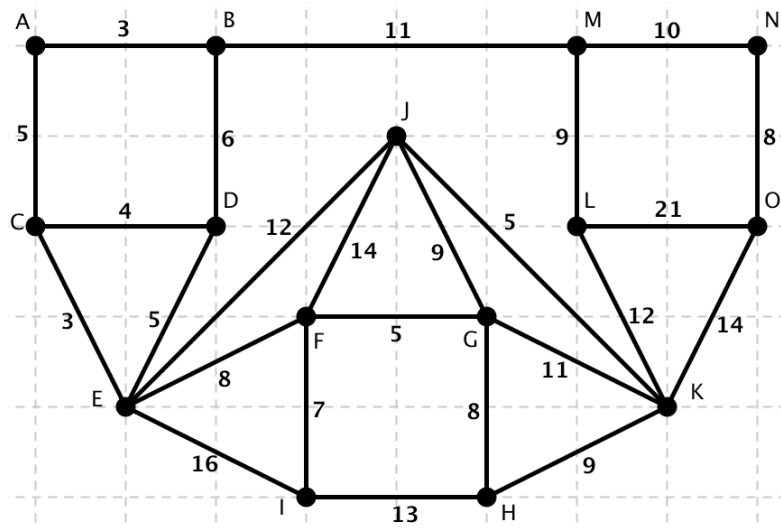
De afstanden tussen ieder tweetal eilanden is gegeven in de tabel

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		24	21	34	28	20	35	12
2			27	18	22	18	19	16
3				26	12	35	44	20
4					16	33	30	23
5						36	40	17
6							18	21
7								31
8								

Welke bruggen moeten gebouwd worden om de kosten, die evenredig zijn met de lengte van de bruggen, te minimaliseren?

In de tekst is steeds sprake van een minimaal opspannende boom. Je kunt met kleine wijzigingen de algoritmes van Prim en Kruskal aanpassen zodat ze een *maximaal opspannende boom* leveren. Dat is een boom waarvan de som van de gewichten maximaal is.

**25** Bepaal met behulp van de gewijzigde algoritmes van Prim en Kruskal een maximaal opspannende boom voor het onderstaande netwerk:



**26** Beschouw de onderstaande kostentabel voor het aanleggen van een netwerk tussen de knopen A, B, C, D, E en F.

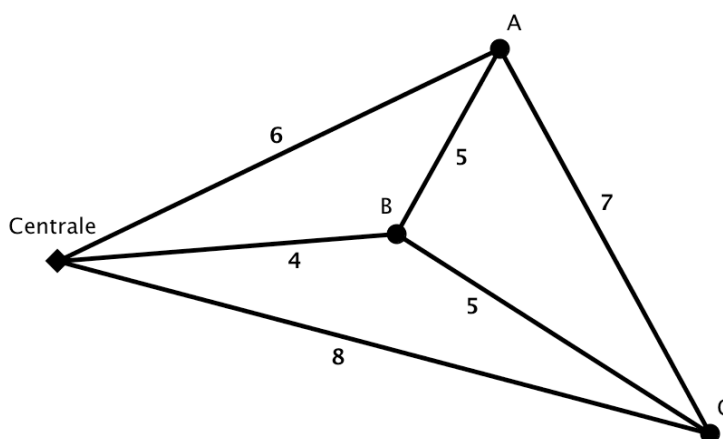
	A	B	C	D	E	F
A	0	7	3	1	5	9
B	7	0	3	9	5	2
C	3	3	0	3	4	4
D	1	9	3	0	11	5
E	5	5	4	11	0	9
F	9	2	4	5	9	0

- Vindt de minimaal opspannende boom als je begint vanuit E met behulp van het algoritme van Prim.
- Vindt de minimaal opspannende boom als je begint vanuit A met behulp van het algoritme van Prim.
- Gebruik nu het algoritme van Kruskal om de minimale opspannende boom te vinden.



## 2.3 GRAFEN EN COALITIES

In de buurt van een rivier wordt een nieuwe gascentrale gebouwd die ook gas kan leveren aan drie verderop gelegen autonome regio's. Helaas zijn er nog geen leidingen naar de regio's. Die kunnen aangelegd worden maar daar hangt een behoorlijk prijskaartje aan:



600 miljoen Euro voor een gasleiding naar regio A, 400 miljoen naar B en 800 miljoen naar C. Het is ook mogelijk om van regio naar regio leidingen aan te leggen. De kosten daarvan (keer 100 miljoen) staan aangegeven in de onderstaande situatieschets. Alle aanlegkosten moeten door de regio's worden opgebracht.

27

Leg uit dat de totale minimale kosten 14 eenheden (1400 miljoen euro) bedragen. Wat is de minimale opspannende boom?

Als onafhankelijk adviseur zou je dus adviseren dat iedereen moet samenwerken en dat de leidingen van de centrale naar B en van daaruit naar A en C moeten worden aangelegd. Maar daarmee is het probleem nog niet opgelost. Hoe ga je de kosten in rekening brengen? Iedereen evenveel laten bijdragen lijkt niet eerlijk. Dat zou in dit voorbeeld betekenen dat elke regio  $\frac{14}{3} \approx 4,67$  eenheden moet bijdragen. Dit bedrag kan regio B niet goed aan haar burgers verkopen want niet samenwerken en dus direct aansluiten kost slechts 4 eenheden. Regio B stelt zelfs voor om maar niks bij te dragen. Via B krijgen de anderen immers hun gas. Regio A en C moeten dan samen 14 eenheden bijdragen.

28

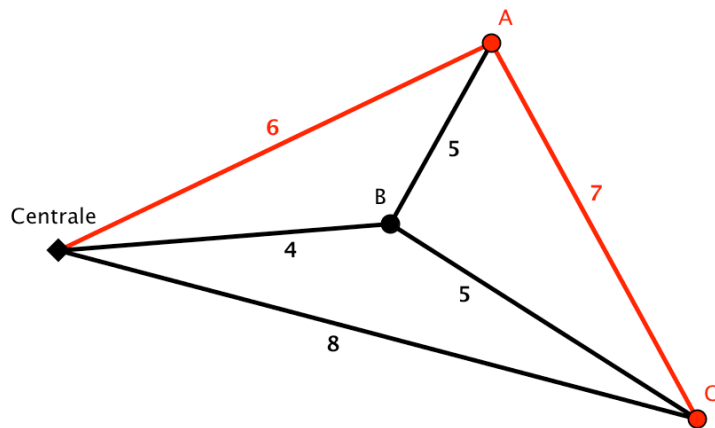
Geef een wiskundige reden waarom regio's A en C hier nooit mee akkoord zullen gaan.

Het voorgaande leidt tot de volgende vraag: Hoe kunnen de regio's samenwerken om kosten te besparen? En hoeveel zou een regio dan redelijkerwijs aan de kosten van een gezamenlijk netwerk moeten bijdragen?

Met deze (en soortgelijke) vragen zullen we ons in de rest van deze paragraaf bezig houden.

Allereerst een tweetal definities: regio's die samenwerken noemen we in de wiskunde *coalities*. Vaak spreken we in de wiskunde over *spelers* in plaats van regio's.

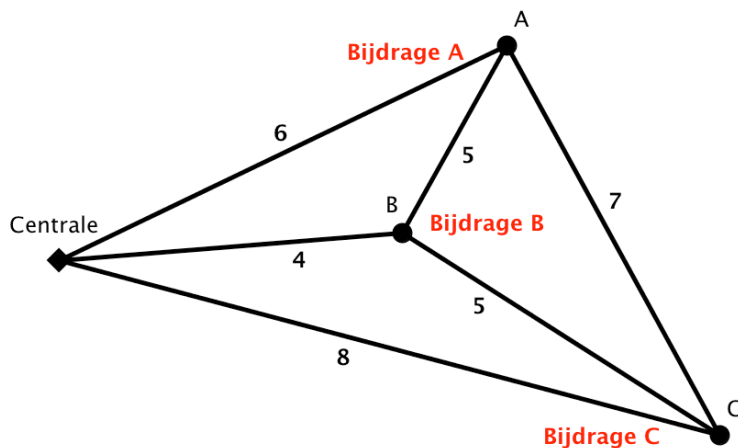
De spelers A en C kunnen bijvoorbeeld een coalitie vormen en voor  $6 + 7 = 13$  eenheden (=1300 miljoen euro) worden aangesloten. Als A dan bijvoorbeeld 5,5 eenheden bijdraagt en C dus  $13 - 5,5 = 7,5$  eenheden dan hebben beide regio's een voordeel van 0,5 eenheid en dat is 50 miljoen Euro. Niet mis!



29

Breng alle mogelijke coalities op een soortgelijke manier in kaart en vermeld per coalitie wat de kosten voor de coalitie zijn en de kosten voor de overgebleven speler(s).

Omdat de belastingbetaler uiteindelijk de rekening betaalt wordt besloten dat de drie spelers toch samen een coalitie moeten vormen. De totale kosten zijn dus 14, maar we blijven zitten met de vraag of er een "goede verdeling" van deze kosten bestaat. Als dat zo is dan moet de bijdrage van B tussen de 0 en de 4 liggen (waarom?).



Om het probleem verder te analyseren voeren we drie variabelen in:

- $a$  is het aantal eenheden dat regio A bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC
- $b$  is het aantal eenheden dat regio B bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC
- $c$  is het aantal eenheden dat regio C bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC

Er geldt natuurlijk dat  $a + b + c = 14$  want de drie spelers moeten samen het netwerk bekostigen.

Verder zal geen enkele regio meer dan de directe aansluitkosten willen betalen. Dat levert de volgende voorwaarden op:  $0 \leq a \leq 6$ ,  $0 \leq b \leq 4$ ,  $0 \leq c \leq 8$

Ook zal elke speler niet meer willen bijdragen dan dat er in een coalitie van 2 partijen moet worden betaald. Voor de coalitie AC houdt dat, zoals eerder besproken, in dat  $a + c \leq 13$ . Voor de coalitie AB betekent dit:  $a + b \leq 9$  En voor de coalitie BC:  $b + c \leq 9$ .

Al met al geldt nu voor de drie bijdragen het volgende stelsel van voorwaarden:

$$\left[ \begin{array}{l} a + b + c = 14 \\ a \leq 6, \quad b \leq 4, \quad c \leq 8 \\ a + b \leq 9, \quad a + c \leq 13, \quad b + c \leq 9 \\ a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0 \end{array} \right.$$

De voorwaarden zijn allemaal lineair: een lineaire gelijkheid en negen lineaire ongelijkheden. Daardoor lijkt dit probleem op de optimaliseringsproblemen uit hoofdstuk 1. Verschil is echter dat er nu geen doelfunctie is. Het minimaliseringsprobleem is al opgelost door het bepalen van de minimaal opspannende boom waaruit volgde dat  $a + b + c = 14$ . Maar net zo goed als bij de optimaliseringsproblemen is er nu sprake van een beperkend gebied dat het aantal oplossingen beperkt.

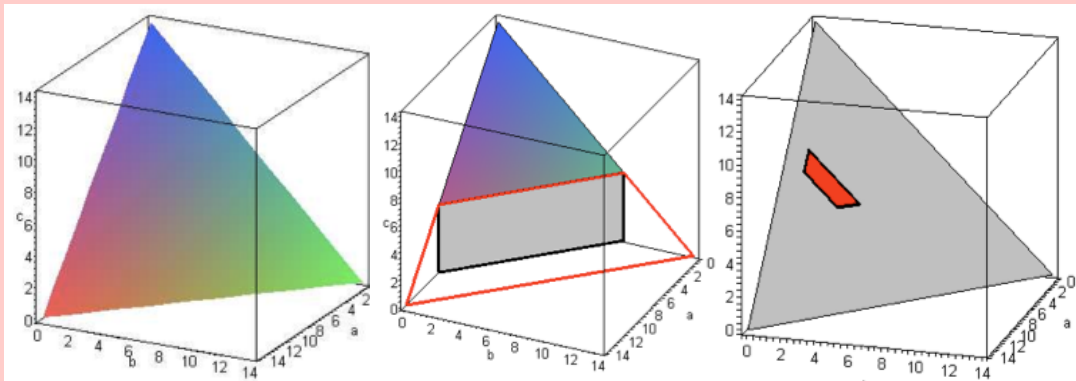
**Informatief:**

Omdat er 3 variabelen zijn kun je het gebied dat bij de voorwaarden hoort schetsen met 3d-plaatjes. In het onderstaande linker plaatje zie je het vlak  $a + b + c = 14$  in het eerste octant (dus  $a, b, c \geq 0$ ).

De toegestane oplossingen liggen dus in een driehoek. De drie hoekpunten van die driehoek zijn  $(14,0,0)$ ,  $(0,14,0)$  en  $(0,0,14)$ .

In het middelste plaatje is de voorwaarde  $a + b \leq 9$  verwerkt. Het vlak  $a + b = 9$  is een verticaal vlak dat het grondvlak snijdt in de lijn door  $(9,0,0)$  en  $(0,9,0)$ . Dat vlak snijdt een gedeelte van de driehoek af. De driehoek die overblijft heeft als hoekpunten  $(9,0,5)$ ,  $(0,9,5)$  en  $(0,0,14)$ .

Als je zo doorgaat zorgt elke voorwaarde er voor dat een stuk van de driehoek wordt afgesneden. In het rechter plaatje zie je het gebied dat overblijft na verwerking van alle voorwaarden. Het is een vierhoek op het vlak  $a + b + c = 14$ .



Met een “truc” kun je het gebied ook tweedimensionaal in beeld brengen, in een  $xy$ -assenstelsel. Uit  $a + b + c = 14$  volgt dat  $c = 14 - a - b$ .

In de ongelijkheid  $b + c \leq 9$  kunnen we nu voor  $c$ :  $14 - a - b$  *substitueren* (vervangen)

en we krijgen dan:

$$\begin{cases} b + c \leq 9 \Leftrightarrow \\ b + (14 - a - b) \leq 9 \Leftrightarrow \\ 14 - a \leq 9 \Leftrightarrow \\ -a \leq -5 \Leftrightarrow \\ a \geq 5 \end{cases}$$

We zeggen dat we  $c$  uit de ongelijkheid  $b + c \leq 9$  hebben *geëlimineerd* (verwijderd). De ongelijkheid  $b + c \leq 9$  is daarbij overgegaan in de ongelijkheid  $a \geq 5$ .

- 30 a** Laat zien dat door substitutie van  $c = 14 - a - b$  in alle voorwaarden van het stelsel op pagina 23, dit stelsel overgaat in:

$$\begin{cases} a+b \geq 6, & a+b \leq 14, & a+b \leq 9 \\ a \geq 5, & a \geq 0, & a \leq 6 \\ b \geq 0, & b \geq 1, & b \leq 4 \end{cases}$$

- b** Teken het toegestane gebied.
- c** Laat zien dat voor één van de hoekpunten P van het toegestane gebied geldt dat  $P=(5, 1)$  en dat hier  $a=5$ ,  $b=1$  en dat  $c=8$ .
- d** Vul de onderstaande tabel voor de andere hoekpunten Q, R en S in.
- e** Laat zien dat  $M=(a; b; c)=(5,50; 2,75; 5,75)$  een punt is van het toegestane gebied en vul ook voor M de onderstaande tabel in.

	Bijdrage speler	Absoluut voordeel (100 miljoen)	Relatief voordeel
Punt P	Regio A, $a=5$	1	16,7%
	Regio B, $b=1$	3	75%
	Regio C, $c=1$	0	0%
Punt Q	Regio A, $a=$	—	—
	Regio B, $b=$	—	—
	Regio C, $c=$	—	—
Punt R	Regio A, $a=$	—	—
	Regio B, $b=$	—	—
	Regio C, $c=$	—	—
Punt S	Regio A, $a=$	—	—
	Regio B, $b=$	—	—
	Regio C, $c=$	—	—
Punt M	Regio A, $a=$	—	—
	Regio B, $b=$	—	—
	Regio C, $c=$	—	—

Samenvattend (en controleer deze beweringen):

- Regio A zal redelijkerwijs minimaal 5 en maximaal 6 eenheden moeten bijdragen,
- Regio B minimaal 1 en maximaal 4 en regio C minimaal 5 en maximaal 8.
- In de hoekpunten P, Q, R en S is er steeds een regio die geen voordeel uit de coalitie boekt. De regio in kwestie kan dus net zo goed niet meedoen.

Als neutrale buitenstaander zou je nu allerlei voorstellen kunnen doen. Zo levert het punt M aanzienlijke besparingen voor elke regio op. Uiteraard kun je ook allerlei andere verdelingen bedenken binnen het gebied PQRS. De wiskunde heeft in ieder geval de redelijke grenzen voor elke regio vastgesteld en zijn taak volbracht.

In dit voorbeeld heb je gezien hoe grafentheorie en onderdelen van optimaliseren bij elkaar komen. Bij meer dan drie spelers is het bepalen van minimale opspannende bomen nog altijd geen probleem. Met de algoritmes van Prim of Kruskal gaat dat snel. Het aantal voorwaarden stijgt echter behoorlijk omdat er steeds meer coalities mogelijk zijn. Bovendien kun je dan je dan niet meer met een plaatje snel het toegelaten gebied in beeld brengen.

---

## 2.4 EXTRA OPGAVEN

---

**31** a Bepaal hoeveel coalities er mogelijk zijn met 4, 5 en 6 spelers.

b Hoeveel coalities zijn er mogelijk met  $n$  spelers?

**32** (Vervolg op opgave 30)

a Is het mogelijk om waarden van  $a$ ,  $b$  en  $c$  te bepalen zodanig dat elke speler hetzelfde absolute voordeel heeft (met andere woorden: voldoet die oplossingen aan alle voorwaarden)?

De aansluitkosten van A naar C bedragen 7 eenheden. Als de aansluitkosten voor de leiding van A naar C groter worden dan blijft de minimale opspannende boom gelijk. Het toegelaten gebied verandert echter.

b Teken het nieuwe toegelaten gebied als de kosten 7,5 zijn.

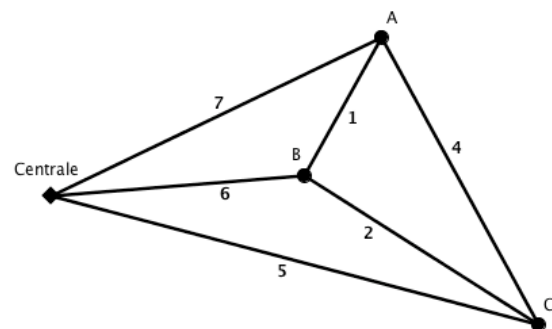
c Hoe verandert het toegelaten gebied bij toenemende kosten?

Als de aansluitkosten van A naar C kleiner worden dan is het mogelijk dat een andere minimale opspannende boom voor de coalitie van drie spelers ontstaat. AC vervangt dan AB of BC in de boom.

- d Bij welke gewicht van lijn AC ontstaat er een andere minimale opspannende boom?
- e Bepaal alle voorwaarden en teken het toegestane gebied als lijn AC gewicht 4 heeft.
- f Bereken de absolute en de relatieve winst in de hoekpunten van het nieuwe toegelaten gebied.

33

Hiernaast zie je, net als bij ons basisprobleem, een graaf met aanlegkosten van de leidingen. Stel bij deze graaf alle voorwaarden op, teken het toegelaten gebied en analyseer absolute en relatieve winst (tov directe kosten) in de hoekpunten van het toegelaten gebied.

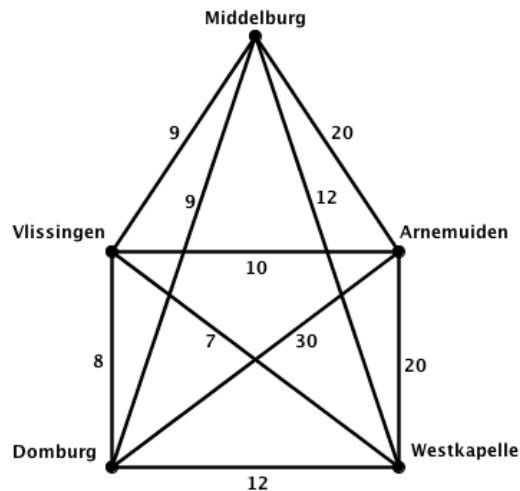


34

Aan het eind van de jaren tachtig is de wijze waarop Nederland televisie ontvangt drastisch veranderd. De klassieke antenne is vervangen door de kabel. Overal in het land verschenen kabelcentrales. Vanuit zo'n kabelcentrale worden de ontvangen signalen (per kabel) naar de omliggende steden geleid.



In deze opgave kijken we naar de kabelcentrale Middelburg en vier omliggende steden, te weten Arnhem, Domburg, Vlissingen en Westkapelle. De onderstaande figuur geeft schematisch de plaatsen weer en voor ieder tweetal plaatsen de kosten (in miljoenen euro's) voor het aanleggen van een kabelverbinding tussen deze plaatsen.



- a Bereken dat de coalitie bestaande uit de spelers Vlissingen, Domburg en Westkapelle een netwerk kan laten aanleggen voor 24 miljoen euro.
- b Bepaal voor elke coalitie (van meer dan een speler) de minimale kosten van het netwerk dat ze gezamenlijk kunnen aanleggen.
- c Als alle spelers samenwerken zijn de aanlegkosten minimaal. Om welke kosten gaat het dan?

Noem  $v$  de bijdrage van Vlissingen,  $a$  de bijdrage van Arnhem, enz.

Er geldt:  $0 \leq v \leq 9$ ,  $0 \leq a \leq 20$ ,  $0 \leq d \leq 9$ ,  $0 \leq w \leq 12$

- d Stel alle andere voorwaarden op.
- e Geef een oplossing die aan alle voorwaarden voldoet en bereken de winst t.o.v. de directe aansluitkosten van elke speler.
- f Kun je een oplossing vinden waarbij elke partij voordeel heeft?



# 3 Koppelen

## 3.1 BASISPROBLEEM



### Over de Hongaarse methode

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

Een groot bouwbedrijf heeft vier hijskranen, verspreid over vier machineparken. Toevallig zijn er ook vier nieuwe bouwlocaties waar men een hijskraan nodig heeft. Het transport van een hijskraan is een kostbare zaak. In de tabel zie je de afstand in kilometers tussen de vier bouwlocaties en de machineparken.

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Hijskraan 1	55	50	17	48
Hijskraan 2	34	31	31	34
Hijskraan 3	57	55	21	45
Hijskraan 4	55	48	20	42

De vraag is nu welke hijskraan je naar welke bouwlocatie moet vervoeren als je de totale transportafstand wilt minimaliseren.

- 35**
- Op hoeveel manieren kun je in bovenstaand voorbeeld de 4 hijskranen aan de 4 bouwlocaties toewijzen?
  - Op hoeveel manieren kun je 6 hijskranen aan 6 bouwlocaties toewijzen?
  - Op hoeveel manieren kun je  $n$  hijskranen aan  $n$  bouwlocaties toewijzen?

## 3.2 EEN ANALYSE VAN HET PROBLEEM

Het probleem houdt in dat je precies vier koppelingen moet leggen tussen de vier hijskranen en de vier bouwlocaties. De som van de “gewichten” moet daarbij minimaal zijn. Je zoekt dus een minimale koppeling tussen de hijskranen en de bouwlocaties en daarom noemt men dit type probleem ook wel een koppelingsprobleem.

In de tabel hiernaast zijn vrij willekeurig vier koppelingen gekozen. Het totaal aantal transportkilometers is bij deze keuze  $55 + 48 + 31 + 45 = 179$  kilometer.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

Je ziet dat in elke rij en in elke kolom precies één getal is geselecteerd. Dat gegeven is kenmerkend voor een koppeling.

De vraag is nu of het nog goedkoper kan? In principe is dat geen moeilijk probleem. In opgave 1 heb je gezien dat er  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  verschillende koppelingen mogelijk zijn. Je kunt dus in principe de 24 verschillende koppelingen allemaal opschrijven en steeds het totaal aantal kilometers bepalen.

Hiernaast zie je een viertal andere koppelingen:

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

In de koppeling linksonder is 147 kilometer transport nodig, een behoorlijke verbetering t.o.v. de eerste koppeling. Toch hoeft die koppeling niet de *optimale toewijzing* te zijn. Er zijn immers nog 19 andere koppelingen mogelijk en deze moeten ook berekend worden. Deze eenvoudige manier is daarom ook een vrij tijdsintensieve manier.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

Daarnaast hebben we in opgave 35 gezien dat het aantal koppelingen met het toenemen van het aantal hijskranen snel erg groot wordt. Deze methode is dus niet handig. Er is een efficiëntere methode, de zogenaamde *Hongaarse methode*, die we gaan bespreken.



### 3.3 DE HONGAARSE METHODE

- 36**
- Bepaal de som van de gewichten van de vijf koppelingen uit paragraaf 3.2.
  - Wat gebeurt er met deze som als hijskraan 1 in een machinepark zou staan dat 9 kilometer dichterbij alle bouwlocaties gelegen is?
  - En wat gebeurt er met deze som als bouwlocatie 2 op een plaats 7 kilometer verder van alle machineparken af ligt?
  - Verandert de optimale toewijzing als we in tabel I in kolom 2 overal 7 optellen? En als we in rij 1 overal 9 aftrekken? Licht je antwoord toe.

In opgave 36 hebben we ontdekt dat het probleem niet verandert als alle elementen van een kolom (of van een rij) met hetzelfde getal worden verminderd (of verhoogd).

We kunnen dit principe gebruiken om een “eenvoudigere” (*gereduceerde*) tabel te maken. Na het verhogen en verminderen van sommige rijen en kolommen, krijgen we de tabel hiernaast (hoe we deze tabel hebben verkregen, wordt later uitgelegd).

	L1	L2	L3	L4
H1	5	3	0	7
H2	0	0	30	9
H3	3	4	0	0
H4	4	0	2	0

- 37**
- Uit deze gereduceerde tabel volgt dat er maar één optimale toewijzing is, namelijk (H1, L3), (H2, L1), (H3, L4) en (H4, L2).
- Leg toe waarom dit de enige optimale toewijzing is.
  - Bereken m.b.v. de originele tabel hoeveel kilometers dan in totaal wordt afgelegd.

De gereduceerde tabel is verkregen door gebruik te maken van de Hongaarse methode. Het stappenplan van deze methode is als volgt:

**De Hongaarse methode**

**Stap 0.** We starten met een tabel met  $n$  rijen en  $n$  kolommen.

Vind in elke rij van de tabel het minimale element en verminder de hele rij met dit getal. Vind vervolgens (in de nieuwe tabel) voor elke kolom het minimale element en verminder de hele kolom met dit getal. Ga naar stap 1.

**Stap 1.** Bekijk of het mogelijk is in de nieuwe tabel een toewijzing te vinden met 0 kosten. Als dit mogelijk is hebben we een optimale toewijzing gevonden en kunnen we stoppen. Als dit niet mogelijk is dan kunnen we alle nullen in de nieuwe tabel bedekken met minder dan  $n$  lijnen (horizontaal en verticaal). Trek deze lijnen en ga naar stap 2.

**Stap 2.** Bepaal het kleinste getal dat nog niet bedekt is door een lijn en trek dat getal af van elk getal dat nog niet bedekt is door een horizontale of verticale lijn en tel het op bij elk getal dat bedekt is door twee lijnen. Ga terug naar stap 1.

Als we dit uitwerken aan de hand van ons basisprobleem dan ziet het er als volgt uit:

Stap 0: Eerst alle rijen en vervolgens alle kolommen met het minimum verminderd:

	L1	L2	L3	L4		L1	L2	L3	L4
H1	38	33	0	31	H1	35	33	0	28
H2	3	0	0	3	H2	0	0	0	0
H3	36	34	0	24	H3	33	34	0	21
H4	35	28	0	22	H4	32	28	0	19

Stap 1: het is niet mogelijk om in de nieuwe tabel een toewijzing te vinden met 0 kosten. We bedekken alle nullen in de tabel met twee lijnen:

	L1	L2	L3	L4
H1	35	33	0	28
H2	0	0	0	0
H3	33	34	0	21
H4	32	28	0	19

	L1	L2	L3	L4
H1	16	14	0	9
H2	0	0	19	0
H3	14	15	0	2
H4	13	9	0	0

Stap 2a:

We verminderen alle onbedekte elementen met 19 en verhogen het tweemaal bedekte element met 19.

	L1	L2	L3	L4
H1	16	14	0	9
H2	0	0	19	0
H3	14	15	0	2
H4	13	9	0	0

Stap 1:

Het is niet mogelijk om in de nieuwe tabel een toewijzing te vinden met 0 kosten. We bedekken alle nullen in de tabel met drie lijnen.

	L1	L2	L3	L4
H1	7	5	0	9
H2	0	0	28	9
H3	5	6	0	2
H4	4	0	0	0

Stap 2b:

We verminderen alle onbedekte elementen met 9 en verhogen de tweemaal bedekte elementen met 9.

	L1	L2	L3	L4
H1	7	5	0	9
H2	0	0	28	9
H3	5	6	0	2
H4	4	0	0	0

Stap 1:

Het is nog steeds niet mogelijk om in de nieuwe tabel een toewijzing te vinden met 0 kosten. We bedekken alle nullen in de tabel met drie lijnen.

	L1	L2	L3	L4
H1	5	3	0	7
H2	0	0	30	9
H3	3	4	0	0
H4	4	0	2	0

Stap 2c:

We verminderen alle onbedekte elementen met 2 en verhogen de tweemaal bedekte elementen met 2.

We hebben nu een toewijzing met 0 kosten (zoals we eerder hebben gezien). De optimale toewijzing is in de bovenstaande tabel aangegeven en hebben we hiervoor al besproken.

38

Kijk naar stap 2a hierboven. Licht toe waarom deze stap geen invloed heeft op de optimale toewijzing.

- 39** Een machinebedrijf heeft 4 machines beschikbaar voor vier opdrachten. Elke machine kan hoogstens één opdracht uitvoeren. De kosten van een opdracht, uitgevoerd door een bepaalde machine, zijn te vinden in onderstaande tabel:

	Opdracht 1	Opdracht 2	Opdracht 3	Opdracht 4
Machine 1	90	75	75	90
Machine 2	35	85	55	65
Machine 3	135	95	90	105
Machine 4	45	110	95	115

Wat is de goedkoopste manier om de opdrachten toe te wijzen aan de machines?

- 40 a** Gebruik de Hongaarse methode om een optimale toewijzing voor de volgende kostenmatrix te vinden:

	A	B	C
X	1	2	3
Y	4	5	6
Z	7	8	9

- b** Wat valt je op?

### 3.4 VARIANTEN VAN DE HONGAARSE METHODE

#### *Maximalisatie*

In de onderstaande tabel staan de gemiddelde dagverkoopcijfers van vijf werknemers werkzaam in een groot warenhuis voor vijf verschillende producten. Het probleem van de werkgever ligt voor de hand: hoe koppel je de werknemers aan de producten zodanig dat de totale dagopbrengst maximaal is?



	Product 1	Product 2	Product 3	Product 4	Product 5
Werknemer 1	30	70	50	60	50
Werknemer 2	45	80	65	60	70
Werknemer 3	40	65	70	65	80
Werknemer 4	60	70	75	55	75
Werknemer 5	55	65	60	70	80

Bij dit koppelingsprobleem moet je vijf werknemers koppelen aan vijf producten en dat kan op  $5! = 120$  manieren. Teveel mogelijkheden om een voor een na te lopen. De Hongaarse methode moet dus uitkomst bieden. Die methode werkt echter alleen voor het bepalen van een minimum. Met een truc kun je echter ervoor zorgen dat het zoeken naar een maximum neerkomt op het zoeken van een minimum.

Daarvoor vermenigvuldigen we alle getallen in de tabel met  $-1$ . De vijf getallen uit de oorspronkelijke tabel die samen de maximale som geven hebben dan dezelfde positie als de vijf negatieve getallen die de minimale som geven in de aangepaste tabel. Deze aangepaste tabel ziet er als volgt uit:

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	-30	-70	-50	-60	-50
W2	-45	-80	-65	-60	-70
W3	-40	-65	-70	-65	-80
W4	-60	-70	-75	-55	-75
W5	-55	-65	-60	-70	-80

Op deze manier staan er nu alleen negatieve getallen in de tabel. Het kleinste getal in de tabel is  $-80$ . Als je nu  $80$  bij elk getal optelt heb je weer te maken met niet-negatieve getallen. Die tabel ziet er als volgt uit:

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	50	10	30	20	30
W2	35	0	15	20	10
W3	40	15	10	15	0
W4	20	10	5	25	5
W5	25	15	20	10	0

41

- a** Pas op deze tabel de Hongaarse methode toe en bepaal wat de maximale dagopbrengst is. Bedenk daarbij dat je, om de maximale dagopbrengst te bepalen, de waarden uit de oorspronkelijke tabel moet aflezen.
- b** Hoeveel optimale toewijzingen zijn mogelijk?

*Dummy-rij*

Stel dat in het basisprobleem waarmee we dit hoofdstuk begonnen hijskraan 4 defect is. We krijgen dan de tabel hiernaast.

Het aantal rijen is nu kleiner dan het aantal kolommen en daarom werkt de Hongaarse methode niet.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45

Daarom voegen we een dummy-rij toe en we krijgen dan de volgende, aangepaste tabel.

Hd staat daarbij voor dummy hijskraan. Dit betekent dat deze hijskraan niet gebruikt zal worden.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
Hd	0	0	0	0

42

- a** Pas op deze tabel de Hongaarse methode toe en bepaal de optimale toewijzing. Wat is het totaal aantal kilometers dat wordt afgelegd?
- b** Welke locatie wordt niet voorzien van een hijskraan?

Verboden karweitjes

43

In een bedrijfshal kunnen vijf karweitjes op vijf verschillende machines worden uitgevoerd. In de tabel hieronder staan de kosten van het uitvoeren van een karwei op een bepaalde machine. Het oneindigheidssteken  $\infty$  in het schema geeft aan dat dat karweitje niet op die machine kan worden uitgevoerd. Dat teken is gekozen omdat het uitvoeren van dat karwei op die machine bij wijze van spreken oneindig veel tijd kost.

	Karwei 1	Karwei 2	Karwei 3	Karwei 4	Karwei 5
Machine 1	$\infty$	8	6	12	1
Machine 2	15	12	7	$\infty$	10
Machine 3	10	$\infty$	5	14	$\infty$
Machine 4	12	$\infty$	12	16	15
Machine 5	18	17	14	$\infty$	13

Hoe moet je de karweitjes aan de machines koppelen als de totale kosten minimaal moeten zijn? (Tip: gebruik gewoon de Hongaarse methode en bedenk daarbij dat oneindig min een vast getal gewoon oneindig blijft). Wat zijn de totale kosten?

### 3.5 EXTRA OPGAVEN

44

Ook combinaties van varianten zijn mogelijk: Vijf personen moeten vier opdrachten uitvoeren. De tijd die een persoon nodig heeft om een bepaalde opdracht uit te voeren is te vinden in de tabel hiernaast. Een – geeft aan dat de persoon die opdracht niet kan uitvoeren.

	O1	O2	O3	O4
P1	22	18	30	18
P2	18	-	27	22
P3	26	20	28	28
P4	16	22	-	14
P5	21	-	25	28

- a Bepaal de toewijzing van opdrachten aan personen zodat de totale tijd voor het uitvoeren van de vier opdrachten minimaal is.
- b Welke persoon heeft geluk?



45

Hiernaast zie je een tabel waarin de afstanden tussen drie hijskranen en drie bouwlocaties staan. Net zo als in het basisprobleem moet precies één hijskraan naar één locatie worden getransporteerd.

	L1	L2	L3
H1	55	50	17
H2	34	31	31
H3	57	55	21

- Hoeveel verschillende koppelingen zijn er mogelijk?
- Bepaal bij iedere koppeling het totaal aantal kilometers dat de drie hijskranen moeten afleggen.
- Welke koppelingen zijn het gunstigst wat betreft de afgelegde kilometers?
- Bepaal de optimale koppeling ook met de Hongaarse methode.

46

Bij de estafette 4 keer 50 meter wisselslag zwemmen zijn er vier onderdelen die door vier verschillende zwemmers moeten worden gezwommen. Hieronder zie je de persoonlijke records van elke zwemmer op elk onderdeel in seconden. Hoe kun je de ploeg het beste samenstellen?

	Vlinderslag	Schoolslag	Rugslag	Vrije slag
Zwemmer 1	25,7	31,1	28,5	23,8
Zwemmer 2	25,3	30,9	29,1	23,9
Zwemmer 3	26,0	30,9	28,7	24,2
Zwemmer 4	25,8	31,1	29,3	24,0

47

De coach van een baseballteam wil een optimale opstelling bedenken voor zijn team dat bestaat uit 9 spelers. Op grond van de eerder geleverde prestaties op de training heeft hij aan iedere speler een rangnummer tussen 0 en 26 toegekend voor elk van de negen posities. Hoe hoger het rangnummer, hoe beter die speler op die positie uit de voeten kan. In de tabel hieronder zie je zijn beoordelingen:



	Jan	André	Ab	Hans	Bert	Camiel	Max	Piet	Ernst
Pitcher	20	15	10	10	17	23	25	5	15
Catcher	10	10	12	15	9	7	8	7	8
First baseman	12	9	9	10	10	5	7	13	9
Second baseman	13	14	10	15	15	5	8	20	10
Third baseman	12	13	10	15	14	5	9	20	10
Shortstop	15	14	15	16	15	5	10	20	10
Outfielder 1	7	9	12	12	7	6	7	15	12
Outfielder 2	5	6	8	8	5	4	5	10	7
Outfielder 3	5	6	8	8	5	4	5	10	7

- a Hoe moet de coach zijn team samenstellen? Pas op, de beantwoording van deze vragen vraagt veel stappen, dus werk secuur. Als alternatief kun je opgave 47b maken.
- b Zoek op internet naar een programma waarmee je de optimale toewijzing automatisch kunt laten uitrekenen. Welke toewijzing geeft dit programma?

48

Een bedrijf heeft vijf machines en produceert vijf producten. De kosten voor het produceren van een product op een bepaalde machine zijn weergegeven in de tabel hiernaast:

	P1	P2	P3	P4	P5
M1	x	9	8	2	7
M2	3	9	2	8	5
M3	5	3	5	7	7
M4	8	4	5	4	5
M5	5	9	9	4	3

- a Neem  $x = 6$ . Wat is een optimale toewijzing van de producten aan de machines die de totale kosten minimaliseert? Wat zijn dan de kosten?
- b Stel machine M1 moet product P1 produceren. Wat is een optimale toewijzing van de andere producten? Wat zijn daarbij de totale kosten, als functie van  $x$ ?
- c Wat is de maximale waarde van  $x$  zodat in een optimale toewijzing (zonder restricties) machine M1 product P1 produceert?

# 4 Macht

## 4.1 BASISPROBLEEM



*Maar nu eens Niet over exponenten en grondtallen*

*Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.*

De medezeggenschapsraad van een school bestaat uit tien personen: de directeur van de school, vier docenten, drie leerlingen en twee ouders. In de raad is afgesproken dat een voorstel wordt aangenomen als meer dan vijf personen ervoor zijn.

Wie heeft nu eigenlijk de meeste macht? Als de verschillende groepen allemaal hetzelfde stemmen, hebben de docenten dan twee keer zoveel macht als de ouders? En wat is eigenlijk de macht van de directeur?

Aan de hand van dit basisprobleem gaan we de theorie uitleggen. Daarnaast ga je onderzoek doen naar de machtsverhoudingen in de Nederlandse politiek.

## 4.2 DEFINITIES

Laten we allereerst aan de hand van het basisprobleem enkele definities geven: Bij veel kwesties stemmen groepen (docenten, ouders, enz.) hetzelfde. Ze stemmen allemaal voor of allemaal tegen. We noemen zo'n groep een blok. In de speltheorie noem je zo'n blok een *speler*. Een speler kan dus uit meerdere personen bestaan. En omdat een speler uit meerdere personen kan bestaan hebben spelers niet allemaal hetzelfde aantal stemmen.

- 49**
- a** Hoeveel spelers zijn er in de medezeggenschapsraad? En hoeveel stemmen heeft iedere speler?
  - b** Gebruik internet om uit te zoeken hoeveel spelers (politieke partijen, fracties) er in de Tweede Kamer zitten en hoeveel stemmen ieder van die spelers heeft.
  - c** En hoe is dat in de Eerste Kamer?

In de medezeggenschapsraad is afgesproken dat een voorstel wordt aangenomen bij meerderheid van stemmen. Zes stemmen vóór zijn dus genoeg om een voorstel aan te nemen. Dat getal heet het *quotum*. Het quotum is het minimaal aantal stemmen dat nodig is om een voorstel aangenomen te krijgen. Het aantal stemmen kun je zien als het *gewicht* van de speler.

Het kiessysteem van de medezeggenschapsraad wordt dus door vijf getallen vastgelegd. Het quotum en de vier gewichten van de spelers. In de besliskunde wordt daarvoor dan de verkorte notatie [6; 4, 3, 2, 1] gebruikt. De getallen staan tussen rechte haken en worden gescheiden door een puntkomma en daarachter door komma's. Voor de puntkomma staat het quotum en achter de puntkomma staan de gewichten van de spelers.

- 50**
- a** Geef op dezelfde manier de gegevens van de Tweede Kamer weer.
  - b** Doe dat ook voor de Eerste Kamer.

Hoe zit het nu met de macht in de medezeggenschapsraad? Welke speler kan "het meest" bepalen wat er besloten wordt? In de situatie van de medezeggenschapsraad geldt [6; 4, 3, 2, 1].

Geen enkele speler heeft 6 of meer stemmen en haalt op eigen kracht het quotum. Dat wil zeggen dat geen enkele speler *dictator* is. Als dat het geval is dan heeft zo'n speler de absolute macht. In de besliskunde ken je aan een dictator dan het getal 1 toe en aan alle andere spelers het getal 0. Die spelers kunnen namelijk nooit een voorstel aangenomen krijgen zonder dat die dictator instemt. Een getal dat je toekent aan de macht van een speler heet een *machtsindex*. Het is een getal groter dan of gelijk aan nul en kleiner dan of gelijk aan 1.

- 51**
- In het Huis van Afgevaardigden in Amerika zitten 435 stemgerechtigde leden. Op enig moment waren dat 242 Republikeinen en 193 Democraten.
- a** Beschrijf deze situatie (in termen van [.....]) en geef gewichten voor iedere speler.
  - b** Geef twee redenen waarom in Amerika toch niet één speler alle macht heeft.

Als het gaat om macht dan zegt de verhouding van de gewichten niet zoveel. De machtsindices in een democratie met twee partijen waarbij de verkiezingen geleid hebben tot [150; 76, 74] zijn 1 en 0 (waarom?).

De partij met 76 zetels heeft absolute macht gekregen.

Je mag dus ook niet zonder meer zeggen dat in de medezeggenschapsraad de docenten vier keer zoveel macht hebben als de directeur omdat het gewicht vier zo groot is. Wel is duidelijk dat de directeur de minste macht moet hebben. Met één stem kan hij niet veel invloed uitoefenen. Sterker nog, ook samen met een andere speler haalt hij geen meerderheid. De ouders (speler 3) hebben meer macht dan de directeur, zij kunnen namelijk op meer manieren een voorstel aangenomen krijgen. Dat lukt bijvoorbeeld samen met de docenten.

In de volgende tabel zie je alle winnende coalities bij [6; 4, 3, 2, 1]. Een winnende coalitie is een verbond van 2 of meer spelers die samen het quorum halen. In de tabel zie je dat er 7 winnende coalities zijn en dat de ouders vijf keer deel uitmaken van een winnende coalitie en de directeur vier keer. Ook de leerlingen staan in vijf winnende coalities en de docenten staan het vaakst bij de winnende coalities namelijk 6 keer.

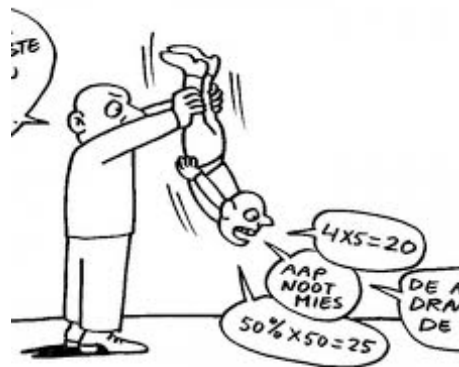
Winnende coalities	Aantal stemmen
1, 2	7
1, 3	6
1, 2, 3	9
1, 2, 4	8
1, 3, 4	7
2, 3, 4	6
1, 2, 3, 4	10

Het aantal keren dat elke speler in deze tabel staat zegt echter niet alles over de macht van de speler. In sommige winnende coalities is er een speler die gemakkelijk gemist kan worden. Of hij wel of niet voorstemt is eigenlijk niet van belang. In feite heeft hij geen macht door in die coalitie te zitten.

In de coalitie <1, 2, 3> bijvoorbeeld kan 3 (de ouders) net zo goed achterwege blijven. Zo'n speler is in de coalitie niet kritiek, omdat <1, 2> samen ook het quorum behalen. Maar ook speler 2 (de leerlingen) in de coalitie <1, 2, 3> kan net zo goed achterwege blijven, omdat <1, 3> samen het quorum behalen, speler 2 is in de coalitie <1, 2, 3> niet kritiek. Speler 1 (de docenten) kan niet gemist worden in coalitie <1, 2, 3>, we noemen speler 1 een *kritieke speler* in deze coalitie.

In de volgende tabel staan nogmaals de winnende coalities maar dit keer zijn de niet-kritieke spelers grijs gemaakt.

Winnende coalities	Aantal stemmen
1, 2	7
1, 3	6
1, 2, 3	9
1, 2, 4	8
1, 3, 4	7
2, 3, 4	6
1, 2, 3, 4	10



In het schema is 12 keer een speler niet grijs gemaakt.

De directeur is in dit schema nog maar 1 van de 12 keer te zien.

De ouders en de leerlingen zijn 3 van de 12 keer te zien en de docenten zijn 5 van de 12 keer te zien.

### 4.3 DE MACHTSINDEX VAN BANZHAF

#### Definitie (machtsindex van Banzhaf)

De machtsindex van een speler is de verhouding tussen het aantal keren dat een speler kritiek is en het totaal aantal keren dat alle spelers samen kritiek zijn.

Op die manier is de som van de indices gelijk aan 1, een mooie eigenschap die snel de onderlinge machtsverhoudingen laat zien. De resultaten zijn:

Speler	Machtsindex van Banzhaf
1) Docenten	$\frac{5}{12} \approx 0,417$
2) Leerlingen	$\frac{3}{12} \approx 0,25$
3) Ouders	$\frac{3}{12} \approx 0,25$
4) Directeur	$\frac{1}{12} \approx 0,083$

**52** Bij een kleine verandering van de getallen of bij een geheime coalitie kunnen de machtsindices behoorlijk veranderen. Stel dat de directeur altijd hetzelfde stemt als de ouders.

In feite zijn er dan nog maar drie spelers.

- a** Beschrijf de situatie ([...]).
- b** Bepaal de machtsindex van Banzhaf voor iedere speler.

**53** Een bedrijf heeft 4 aandeelhouders, A, B, C en D. A, B en C hebben ieder 26% van de aandelen en D heeft de resterende 22%.

- a** Bepaal de winnende coalities.
- b** Bepaal de machtsindex van Banzhaf voor iedere speler.

**54** In de Tweede Kamer is op enig moment sprake van 10 spelers. Als we er van uit gaan dat iedere speler vóór of tegen kan stemmen, hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er dan?

Je begrijpt uit het bovenstaande dat het niet zomaar even mogelijk is om voor de spelers uit de Tweede Kamer de machtsindices te bepalen. Gelukkig is voor het bepalen van al die coalities en voor het berekenen van de index van Banzhaf geschikte software ontwikkeld waarin je alleen de gewichten en het quotum hoeft in te voeren. Een geschikte site is bijvoorbeeld: <http://www.math.temple.edu/~cow/bpi.html>

- 55 a** Bepaal voor de spelers uit de Tweede Kamer de machtsindex van Banzhaf.
- b** Doe datzelfde voor de spelers uit de Eerste Kamer.

**56** In Nederland bestaat een regering (bijna) altijd uit een combinatie van partijen. De combinatie wordt zó gevormd dat deze in de Tweede Kamer het dictatorschap heeft. Feitelijk kun je zeggen dat de combinatie in zowel de Eerste Kamer als de Tweede Kamer één speler vormt.

- a** Bepaal voor deze situatie opnieuw de machtsindices van Banzhaf voor de spelers in de Eerste en Twee Kamer.
- b** Is deze combinatie ook in de Eerste Kamer op te vatten als een dictator?

**Informatief:**

De machtsindex van Banzhaf is door John F. Banzhaf in 1965 bedacht toen hij het stemgedrag analyseerde in onder andere het Amerikaanse verkiezingssysteem.



---

## 4.4 DE MACHTSINDEX VAN SHAPLEY-SHUBIK

---

Later zijn er meer machtsindices bedacht en een van de bekendste en meest gebruikte naast de index van Banzhaf is de machtsindex van Lloyd Shapley en Martin Shubik.

Shapley en Shubik gaan uit van alle mogelijke volgordes van stemmen waarin alle spelers om de beurt vóór stemmen. Zo'n volgorde wordt een sequential coalition genoemd.



Lloyd Shapley

Martin Shubik

In het voorbeeld van de medezeggenschapsraad - [6; 4, 3, 2, 1] - zijn er 24 mogelijke volgordes, je kunt immers vier spelers op  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  manieren in een rij zetten.



In de tabel hiernaast zie je in de eerste kolom deze 24 rijtjes.

In de kolom ernaast zie je de groei van het aantal stemmen in de coalitie als een speler in de coalitie deelneemt.

Bij elke rij wordt ergens het quotum van 6 overschreden. Dat getal is rood gemaakt. De speler waarbij dat gebeurt heet de spil speler of as speler.

Sequential coalition	Toename aantal stemmen
1, 2, 3, 4	4 → 7 → 9 → 10
1, 2, 4, 3	4 → 7 → 8 → 10
1, 3, 2, 4	4 → 6 → 9 → 10
1, 3, 4, 2	4 → 6 → 7 → 10
1, 4, 2, 3	4 → 5 → 8 → 10
1, 4, 3, 2	4 → 5 → 7 → 10
2, 1, 3, 4	3 → 7 → 9 → 10
2, 1, 4, 3	3 → 7 → 8 → 10
2, 3, 1, 4	3 → 5 → 9 → 10
2, 3, 4, 1	3 → 5 → 6 → 10
2, 4, 1, 3	3 → 4 → 8 → 10
2, 4, 3, 1	3 → 4 → 6 → 10
3, 1, 2, 4	2 → 6 → 9 → 10
3, 1, 4, 2	2 → 6 → 7 → 10
3, 2, 1, 4	2 → 5 → 9 → 10
3, 2, 4, 1	2 → 5 → 6 → 10
3, 4, 1, 2	2 → 3 → 7 → 10
3, 4, 2, 1	2 → 3 → 6 → 10
4, 1, 2, 3	1 → 5 → 8 → 10
4, 1, 3, 2	1 → 5 → 7 → 10
4, 2, 1, 3	1 → 4 → 8 → 10
4, 2, 3, 1	1 → 4 → 6 → 10
4, 3, 1, 2	1 → 3 → 7 → 10
4, 3, 2, 1	1 → 3 → 6 → 10

### Definitie (machtsindex van Shapley-Shubik)

De machtsindex van een speler is de verhouding tussen het aantal keren dat deze speler is en het totaal aantal sequential coalitions.

Deze definitie leidt tot de volgende resultaten:

Speler	Machtsindex van Shapley-Shubik
1) Docenten	$\frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 0,417$
2) Leerlingen	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0,25$
3) Ouders	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0,25$
4) Directeur	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12} \approx 0,083$

De indices zijn in dit voorbeeld precies hetzelfde als de indices van Banzhaf.

**57** De uitgangssituatie is [8; 7, 5, 2].

- a Bereken de machtsindices van Banzhaf.
- b Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik.

**58** Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik voor de situatie van opgave 53.

Net als bij de machtsindex van Banzhaf is het berekenen van de index van Shapley-Shubik “met de hand” niet mogelijk als het aantal spelers groot is. Gelukkig is ook voor het berekenen van de index van Shapley-Shubik geschikte software ontwikkeld waarin je alleen de gewichten en het quotum hoeft in te voeren. Geschikte sites zijn bijvoorbeeld: <http://www.warwick.ac.uk/~ecaae/ssdirect.html> en <http://homepages.warwick.ac.uk/~ecaae/ssgenf.html>

- 59** a Hoeveel verschillende sequential coalitions bestaan er voor de spelers uit de Tweede Kamer? Vat de regering daarbij op als één speler.
- b Bepaal voor de spelers uit de Tweede Kamer de machtsindex van Shapley-Shubik.
- c Doe datzelfde voor de spelers uit de Eerste Kamer.

Je ziet dat de index van Shapley-Shubik bij elke partij slechts een beetje afwijkt van de index van Banzhaf. Ook is de volgorde van afnemende indices gelijk.

---

## 4.5 EXTRA OPGAVEN

---

**60** Oneerlijk? Banzhaf heeft zijn index uitgedacht toen hij het Nassau County kiessysteem bestudeerde. Nassau County is een district in de staat New York van de USA met meer dan 1 miljoen inwoners. Het kiessysteem was volgens hem oneerlijk en om dat aan te tonen heeft hij zijn index bedacht. In dat kiessysteem van Nassau waren er toen zes steden en gebieden met stemrecht:

- A. Hempstead #1
- B. Hempstead #2
- C. North-Hempstead
- D. Oyster Bay
- E. Glen Cove
- F. Long Beach



In de laatste drie steden woonde toen in totaal 16% van het totaal aantal inwoners van Nassau. Het quotum en de gewichten in het stelsysteem waren [16; 9, 9, 7, 3, 1, 1].

- a Bepaal alle (maar liefst 32) winnende coalities
- b Bepaal in elke winnende coalitie de kritieke spelers.
- c Bereken de machtsindices van Banzhaf van alle spelers.
- d Wat vond Banzhaf oneerlijk aan het systeem van Nassau?

61

Banzhaf versus Shapley-Shubik.

Hieronder staan drie kiesstelsels. Steeds zijn er vier spelers (A, B, C en D).

[8; 8, 5, 1, 1]

[11; 8, 6, 4, 2]

[11; 7, 7, 5, 1]

- a Bereken in elk stelsel van elke speler de machtsindex van Banzhaf.
- b Bereken in elk stelsel van elke speler de machtsindex van Shapley-Shubik.
- c Vergelijk de resultaten bij elk systeem. Is de volgorde van toenemende macht steeds gelijk?

62

Tegenspraak?

- a Bereken de machtsindices van Banzhaf in de situatie [100; 99, 99, 1].
- b Stel dat speler 3 in plaats van 1 nu 98 stemmen heeft: [quotum; 99, 99, 98]. Bereken voor deze situatie het nieuwe minimale quotum. Verandert hierdoor de machtsverdeling tussen de drie spelers? Zo ja, hoe?
- c Het quotum hoeft niet de helft plus 1 te zijn. Stel dat een voorstel wordt aangenomen bij 198 stemmen. Hoe is nu de verdeling van de macht bij de situatie [198; 99, 99, 98]?
- d Vergelijk de situatie van onderdeel a) met onderdeel c). Geef commentaar.

63

Een speler met veel macht

In een spel hebben alle spelers één stem, op een persoon na.

Die speler – speler 1 - heeft 2 stemmen.

- a Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik als er drie spelers (A, B en C) zijn. Dus voor [3; 2, 1, 1].
- b Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik als er vier spelers zijn.

De berekeningen in a) en b) zijn snel gemaakt. Als het aantal spelers groter wordt dan moet je slim tellen.

- c Bereken het quotum  $q$  als er  $n$  spelers zijn, dus 1 speler met 2 stemmen en  $n-1$  spelers met 1 stem. (Tip: onderscheid de situaties dat  $n$  even en  $n$  oneven is)



www.foksuk.nl

- d Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik voor de situatie  $\left[ q; \underbrace{2, 1, 1, \dots, 1}_{n-1} \right]$ .

64

Het Europese parlement  
De EU bestond in juni 2006 uit 27 landen.  
Het aantal zetels in het parlement wordt bepaald door de omvang van de bevolking van het land. In de tabel zie je de landen van de EU en het aantal zetels.



- a Bepaal de machtsverdeling volgens Banzhaf in de EU als je ervan uit gaat dat landen zich als blokken gedragen die hetzelfde stemmen. Op welke plaats staat Nederland?
- b Idem maar nu volgens het systeem van Shapley-Shubik.

Zetelverdeling tussen de landen (na de Europese verkiezingen van 2004)					
Duitsland	99	Griekenland	24	Slowakije	14
Frankrijk	78	Portugal	24	Ierland	13
Italië	78	Tsjechië	24	Litouwen	13
UK	78	Hongarije	24	Letland	9
Spanje	54	Zweden	19	Slovenië	7
Polen	54	Oostenrijk	18	Estland	6
Roemenië	35	Bulgarije	18	Luxemburg	6
Nederland	27	Denemarken	14	Cyprus	6
België	24	Finland	14	Malta	5

Bij toename van het aantal landen wordt de macht van de kleine landen erg klein. Nederland zou meer macht krijgen als het in een blok samenwerkt met een paar lotgenoten. Bijvoorbeeld met België en Luxemburg (de nog altijd bestaande BeNeLux).

**c** Bereken het effect van die samenwerking

65

Een andere machtsindex (uit vwo-examen wiskunde A 22 juni 2005)

Sinds 1 mei 2004 bestaat de Europese Unie uit 25 landen. In de Raad van Ministers heeft elk land een zetel. In deze raad worden veel beslissingen genomen. Daarbij heeft niet elk land evenveel stemmen. Zo heeft Frankrijk 29 stemmen, Nederland 13 stemmen en Denemarken 7 stemmen.

Op deze wijze beschikken de 25 landen samen over 321 stemmen. Een land stemt of voor of tegen en kan zich dus niet van stemming onthouden of met een deel van zijn stemmen voor en een ander deel tegen stemmen.

Vaak worden beslissingen genomen bij meerderheid van stemmen. Dat betekent dat een voorstel alleen wordt aangenomen als meer dan de helft van de stemmen voor dat voorstel is. Dan kan het gebeuren dat de stemmen van Nederland de doorslag geven bij het wel of niet aannemen van een voorstel. Dat is bijvoorbeeld het geval wanneer van de overige landen 152 stemmen voor zijn en 156 stemmen tegen.

**a** Bereken bij welke aantallen voorstemmen van de overige landen de stemmen van Nederland de doorslag geven om een meerderheid voor een voorstel te krijgen.

Bij een stemming kan dus één van de partijen soms de doorslag geven. Hoeveel invloed een partij bij de stemming heeft, geven we aan met de *machtsindex* (*mi*). Aan de hand van een voorbeeld laten we zien hoe je die kunt uitrekenen. We gaan uit van drie partijen A, B en C. Partij A heeft 6 stemmen, partij B heeft 4 stemmen en partij C heeft 3 stemmen. Zij beslissen over een voorstel bij meerderheid van stemmen. Een van de mogelijkheden is de volgende: A stemt voor, B stemt voor en C stemt tegen. Deze mogelijkheid noteren we met (V,V,T).

We gaan nu de machtsindex van een van deze partijen, partij B, berekenen. Daarvoor kijken we alleen naar de mogelijkheden waarbij deze partij voor stemt. Dat levert de volgende mogelijkheden op:

- mogelijkheid I (V,V,V)
- mogelijkheid II (V,V,T)
- mogelijkheid III (T,V,V)
- mogelijkheid IV (T,V,T)

Omdat de partijen samen 13 stemmen hebben, zijn er minstens 7 stemmen nodig voor een meerderheid. Bij de mogelijkheden I, II en III is er een meerderheid voor het voorstel. Bij de mogelijkheden II en III zijn de 4 voorstemmen van B onmisbaar om een meerderheid te realiseren. Bij mogelijkheid I zou die meerderheid ook behaald zijn als B niet voor zou stemmen. Bij mogelijkheid IV is er geen meerderheid. Omdat de stemmen van B bij 2 van de 4 mogelijkheden doorslaggevend zijn, zeggen we: de machtsindex van B is  $mi_B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

We gebruiken dus de volgende definitie van de machtsindex ( $mi$ ) van een partij:

$$mi = \frac{\text{aantal mogelijkheden waarbij de voorstemmen van die partij doorslaggevend zijn voor de meerderheid}}{\text{totaal aantal mogelijkheden waarbij die partij voor stemt}}$$

Wanneer er sprake is van vier partijen, zijn er meer mogelijkheden. We nemen de volgende situatie: partij A heeft 7 stemmen, partij B heeft 4 stemmen, partij C heeft 4 stemmen en partij D heeft 2 stemmen. Ook nu beslissen de partijen bij meerderheid van stemmen.

- b** Bereken de machtsindex van A in deze nieuwe situatie.

De verdeling van de stemmen kan tot vreemde situaties leiden wanneer er een partij is met weinig stemmen. Er zijn 3 partijen. Partij A heeft 6 stemmen, partij B 4 stemmen en partij C slechts 1 stem. De partijen B en C stellen nu een nieuwe verdeling voor waarbij A en B elk 5 stemmen hebben en C nog steeds 1 stem. Het aantal stemmen van C is dan weliswaar niet groter geworden, maar de machtsverhoudingen zijn wel veranderd.

- c** Toon dit aan door in beide situaties de machtsindex van elk van de drie partijen te berekenen.

Extra opgaven (dus geen onderdeel van de examenopgave)

Bereken ook de Shapley-Shubik machtsindices van A, B en C voor de twee situaties waarbij:

- d** Partij A 6 stemmen heeft, partij B 4 stemmen en partij C 1 stem.  
**e** Partij A 5 stemmen heeft, partij B 5 stemmen en partij C 1 stem.  
**f** Vergelijk de indices net als in onderdeel c. Is ook nu die verschuiving van macht aanwezig?

We nemen nu een situatie met vijf partijen A, B, C, D en E. Partij A heeft 3 stemmen en de overige partijen hebben elk 1 stem. We gebruiken de definitie van machtsindex zoals hierboven gegeven.

- g** Onderzoek of de machtsindex van A meer dan drie maal zo groot is als de machtsindex van B.