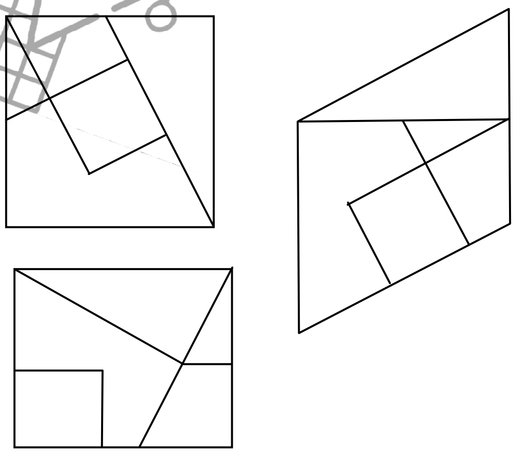
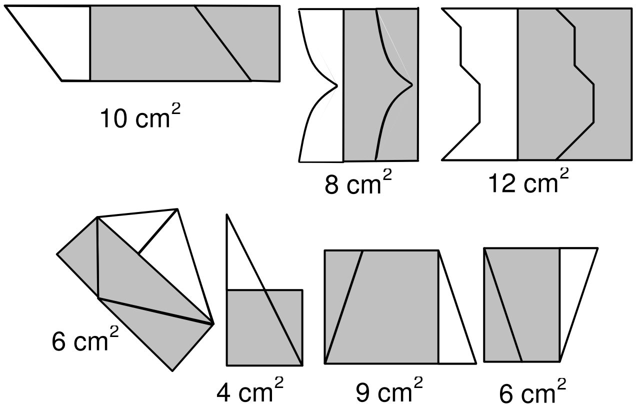
Hoofdstuk 21 Oppervlakte

21.0 INTRO

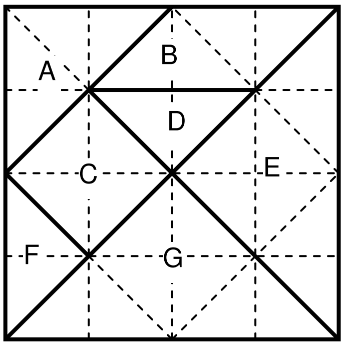
1



2

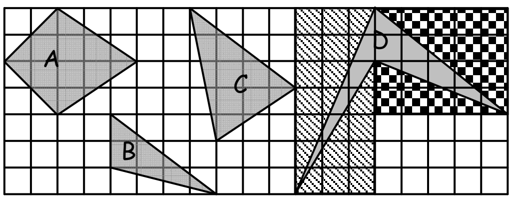


3



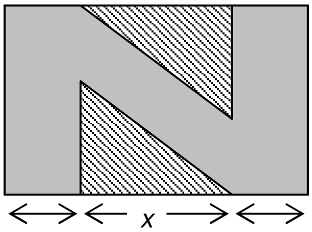
A: $\frac{1}{8}\times 36 = 4\frac{1}{2}$ B: $4\frac{1}{2}$ C: $4\frac{1}{2}$
D: $\frac{1}{2}\times 4\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ E: $2\times 4\frac{1}{2} = 9$ F: $2\frac{1}{4}$
G: 9

4 *A*: $4+6=10$ *B*: 4 *C*: $8\frac{1}{2}$ *D*: 8



Als voorbeeld de oppervlakte van *D*:
De geblokte rechthoek heeft oppervlakte $5\times 4 = 20$. Daar gaan twee halve rechthoeken vanaf, één met oppervlakte $\frac{1}{2}\times 5\times 2 = 5$ en de ander met oppervlakte $\frac{1}{2}\times 5\times 4 = 10$
De gestreepte rechthoek heeft oppervlakte $7\times 3 = 21$. Daar gaan twee halve rechthoeken vanaf, één met oppervlakte $\frac{1}{2}\times 3\times 5 = 7\frac{1}{2}$ en de ander met oppervlakte $\frac{1}{2}\times 3\times 7 = 10\frac{1}{2}$.
De oppervlakte van *D* is:
$21+20-(5+10+7\frac{1}{2}+10\frac{1}{2}) = 8$

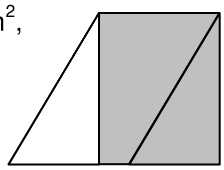
5



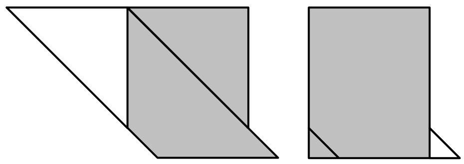
x berekenen in een gestreepte driehoek:
$x^2 + 15^2 = 25^2$, geeft $x = 20$.
Oppervlakte $= 40\times 25 - 15\times 20 = 700$

6 **a** Nee
b In het begin: $1{,}5\times 5 = 7{,}5$ cm^2,
in het andere geval: $0{,}5\times 5 = 2{,}5$ cm^2.

7 Alledrie 20 cm^2,
het eerste:

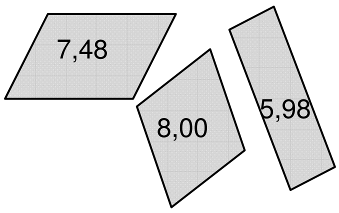


het derde:

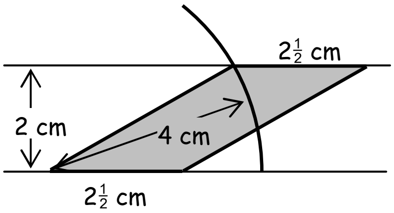


na de eerste keer   na de tweede keer

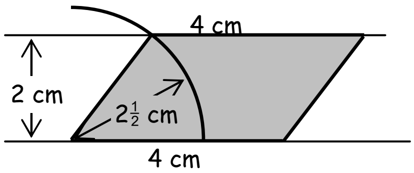
8



9



oppervlakte $= 2\frac{1}{2} \times 2 = 9$ cm^2



oppervlakte $= 2 \times 4 = 8$ cm^2

10 19,2:4 = 4,8 cm of 19,2:6 = 3,2 cm

11 20 cm^2 en 15 cm^2

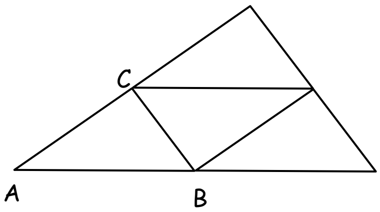
12 b 6 cm^2 ; 3 cm^2

13 $7\frac{1}{2}$ cm^2

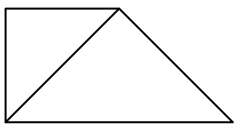
14 a $12 \times 8 : 2 = 48$

b De oppervlakte is ook $10 \times AC : 2$.
Dus $10 \times AC = 48$, dus $AC = 4\frac{4}{5}$

15



16 Verdeel het trapezium in twee driehoeken:



de kleine driehoek heeft oppervlakte $4\frac{1}{2}$ en de grote 9.
De oppervlakte van het trapezium is: $13\frac{1}{2}$.

17 15

18 a 25

b 150

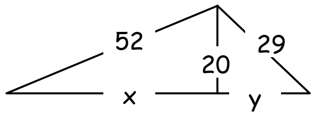
c $150 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$, dus $AD = 300 : BC = 12$

d $\angle ADC = \angle BAC$ en $\angle DBA = \angle CBA$

e De vergrotingsfactor van groot naar klein is: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{5}$, dus $AD = \frac{4}{5} \cdot AC = 12$

19 Een hellende kant is 20 bij $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$
Oppervlakte voorkant: $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$
Oppervlakte hellende kant: $17 \cdot 20 = 340$
Totaal: $2 \cdot 120 + 2 \cdot 340 = 920$ dm^2

20 a Zie plaatje:



$x^2 + 20^2 = 52^2$
$x = 48$
$y^2 + 20^2 = 29^2$
$y = 21$

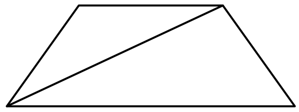
Dus het andere latje is 69.

b $40 \cdot 69 = 2760$

c 1380

d $50 \cdot 80 : 2 = 2000$

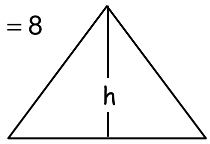
21 Oppervlakte kleine driehoek $= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 20 = 250$
Oppervlakte grote driehoek $= \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 20 = 500$
Oppervlakte trapezium $= 750$



22 a $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

b Oppervlakte van een van de driehoeken is:
$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, dus oppervlakte vlieger $= 60$.
Dus het halve oproduct van de diagonalen is 60, de korte diagonaal $= 120 : 13 = 9\frac{3}{13}$.

23 Zie plaatje: $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$
Oppervlakte $= 48$



24 b

40	30	25	35	45	48
10	20	25	15	5	2
400	600	625	525	225	96

c 25 bij 25

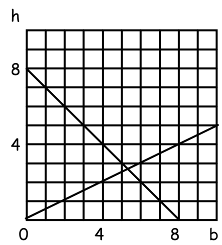
d $h + b = 50$

25 b Ze liggen op één lijn.

26 a $BR = RQ = OP$ en $AP = PQ = OR$ want de driehoeken BRQ en PAQ hebben twee hoeken van 45°, dus ze zijn gelijkbenig.

b. $OR + RQ = OR + RB = OB$ en
$OP + PQ = OP + PA = OA$
Dus: $OR + RQ + OP + PQ = OA + OB$

27 a,c



b $h + b = 18$

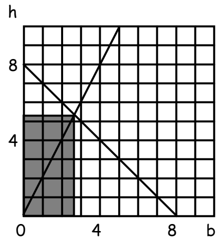
d $2h = b$

28 a $2 \cdot 9 = 18$

b $h : b = 1\frac{1}{4} : 1 = 5 : 4$

c $2\frac{1}{4}b = 9 \Leftrightarrow b = 4$
De breedte is 4 en de hoogte 5.

29 a
b
c



d $h + b = 8$ en $h = 2 \cdot b$

e $2b + b = 8$, dus $b = 8 : 3 = 2\frac{2}{3}$.
$h = 2 \cdot b = 2 \cdot 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$

30 a $2r^2$ en $4r^2$

b $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ cm^2

c $5\pi \cdot 5 = 25\pi$ cm^2

31 $2500\pi - 625\pi = 1875\pi$ m^2

32 $16 - 4\pi \approx 3{,}433..$, dus 343 mm^2

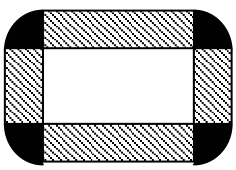
33 a $2 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 = 4{,}5\pi \approx 14{,}1$ dm^3, dus ongeveer 14 liter

b Zijkant: $\pi \cdot 15 \cdot 2 \cdot 20 = 600\pi$ cm^2
onderkant: $\pi \cdot 15^2 = 225\pi$ cm^2
totaal: ≈ 2592 cm^2

34 Oppervlakte $= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi$ cm^2
Oppervlakte ≈ 314 mm^2
Omtrek $= 4\pi + 2\pi + 2\pi = 8\pi$ cm
Omtrek ≈ 251 mm

35 $(\pi \cdot 0{,}15^2 - \pi \cdot 0{,}13^2) \cdot 10 \cdot 8{,}9 \approx 1{,}5657..$ kg

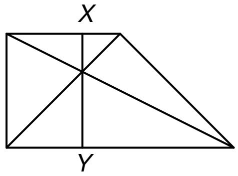
36 De vier zwarte stukken vormen een cirkel met straal 50.
De vier gestreepte stukken zijn twee rechthoeken van 50 bij 100 en twee van 50 bij 200. De totale oppervlakte van het grijze deel is: $2500\pi + 30\,000 \approx 37\,854$ m^2 .



EXTRA OPGAVEN

1 Noem het vierde hoekpunt D en noem $AB = x$, dan $BC = 27 - x$.
Oppervlakte $ABCD = (27 - x) \cdot 8$, maar ook:
oppervlakte $ABCD = x \cdot 10$
Dus $10x = (27 - x) \cdot 8 \Leftrightarrow 2\frac{1}{2}x = 27 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{27}{3\frac{1}{2}}$
Dus: $x = AB = 7\frac{5}{7}$ en $BC = 19\frac{2}{7}$

2 Driehoek DCS is gelijkvormig met driehoek BSA, vergrotingsfactor $= 2$. Dus $SY = 2 \cdot SX$, dus $SX = 1$ en $SY = 2$.

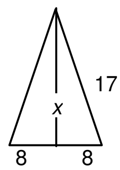


driehoek DCS: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1\frac{1}{2}$
driehoek ASB: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$
driehoek ACD: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$
driehoek BSC: $13\frac{1}{2} - 6 - 4\frac{1}{2} = 3$

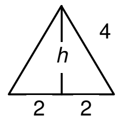
3 Als je voor beide parallellogrammen als basis CD neemt, dan hebben ze dezelfde hoogte. Als je bij beide driehoek GEF weghaalt houdt je twee trapezia met dezelfde oppervlakte over.

4 1, 3 en 5 samen hebben dezelfde oppervlakte als 2, 4 en 6 samen. (beide de helft van een rechthoek). Verder hebben 5 en 6 dezelfde oppervlakte evenals 3 en 4 (zelfde argument).

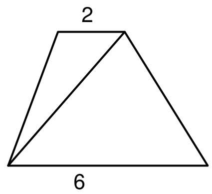
5 Zie plaatje: $x = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$
Oppervlakte driehoek $= 120$



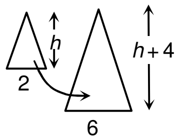
6 Zie plaatje: $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$
Oppervlakte driehoek $= 2\sqrt{12}$



7 Verdeel het trapezium in twee driehoeken. De kleine driehoek heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ en de grote heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.
De oppervlakte van het trapezium is: 16



8 a De vergrotingsfactor is 3, (vergelijk de zijden van 2 en 6), de hoogte van de grote driehoek is dus 3 keer de hoogte van de kleine.
dus: $3h = h + 4$

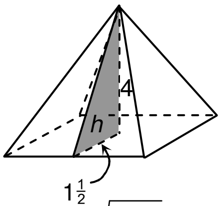


b Dus $2h = 4 \Leftrightarrow h = 2$, dus de kleine driehoek heeft oppervlakte 2

c De oppervlakte van de grote driehoek is 9 keer de oppervlakte van de kleine, dus 18.
de oppervlakte van het trapezium is dus 16.

9 Neem aan dat de kleine driehoek hoogte h heeft, dan heeft de grote driehoek hoogte $\frac{20}{12} \cdot h = 1\frac{2}{3}h$, dus $2\frac{2}{3}h = 4$, dus $h = 1\frac{1}{2}$. De kleine driehoek heeft oppervlakte $1\frac{1}{2}\cdot 12 = 18$ en de grote $4\frac{1}{2}\cdot 12 = 54$.

10 Stelling van Pythagoras in de grijze driehoek, zie plaatje:



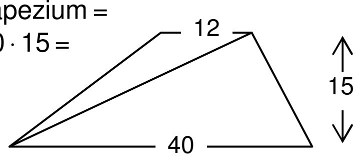
$h^2 = 1\frac{1}{2}^2 + 4^2$, dus $h = \sqrt{18\frac{1}{4}}$

Een zijkant heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{18\frac{1}{4}}$.

Totaal is er $9 + 6\sqrt{18\frac{1}{4}} \approx 34{,}6$ dm^2 karton nodig.

11 a De zijde evenwijdig met die van 40 is 12. De diagonalen in het linker en rechter zijvlak van de balk zijn $\sqrt{12^2+9^2} = 15$.
De andere zijden van het trapezium zijn $\sqrt{15^2+20^2} = 25$ en $\sqrt{15^2+8^2} = 17$.

b. Oppervlakte trapezium $=$
$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 15 + \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 15 =$
390



12 De driehoeken 2 en 3 samen zijn $\frac{2}{6}$ van driehoek *ABC*, dus samen 32.
Driehoek 1 is $\frac{1}{4}\cdot 32 = 8$ en driehoek $2 = \frac{3}{4}\cdot 32 = 24$.
Driehoek 3 en 4 zijn samen 16.
Driehoek 3 $= \frac{3}{4}\cdot 16 = 12$ en driehoek $4 = 4$.

13

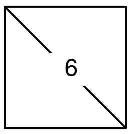
Linksboven:	12	rechtsboven:	24
linksmidden:	9	rechtsonder:	$8\frac{1}{2}$
linksonder:	18		

14 $CD = 2\cdot 84 : 14 = 12$

$BD = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, $AD = 14 - 9 = 5$

$AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

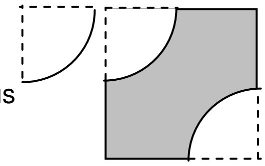
15 De oppervlakte van het witte vierkant is het halve product van de diagonalen $= 18$. De oppervlakte van het gekleurde deel is:



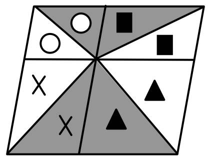
$\pi\cdot 3^2 - 6^2 : 2 = 9\pi - 18 \approx 10{,}3$

16 De oppervlakte van het parallellogram is $25\cdot 30 = 750$.
Noem de lengte van die zijde x, dan:
$x\cdot 20 = 750$, dus $x = 37\frac{1}{2}$]

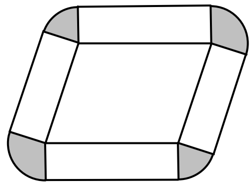
17 Oppervlakte kwartcirkel $=$
$\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 = \pi$
Oppervlakte figuur $=$
$16 - 2\pi \approx 9{,}716$ cm^2, dus 972 mm^2



18 Zie plaatje: driehoeken met gelijke tekens hebben gelijke oppervlakte.

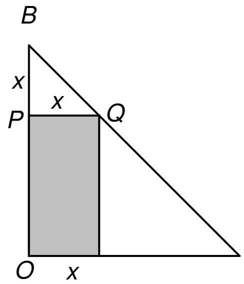


19 De vier rechthoekige stukken hebben oppervlakte
$2\cdot 4\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 1 = 18$
De vier grijze stukken vormen samen een cirkel met straal 1.
De oppervlakte van de strook is dus $18 + \pi$.



20 a Omdat $BP = PQ = x$, geldt: $OP = a - x$.

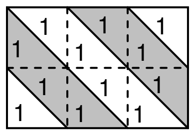
b als je in beide vormne de haakjes wegwerkt, krijg je in beide gevallen: $ax - x^2$.



c $-(x-\frac{1}{2}a)^2 + \frac{1}{4}a^2$ is voor elke x groter of gelijk aan $\frac{1}{4}a^2$, omdat $-(x-\frac{1}{2}a)^2$ voor elke x kleiner of gelijk aan 0 is (vanwege het kwadraat).
Die minimale waarde $\frac{1}{4}a^2$ kun je krijgen als $(x-\frac{1}{2}a)^2 = 0$ en dat is als $x = \frac{1}{2}a$.

OKEROPGAVEN

8 donkere banen: 3
lichte banen: 1, 1 en 4



9 a $DE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, oppervlakte $= 30$

b oppervlakte parallellogram $= 5\cdot BF$, dus $BF = 6$.

c Ze hebben beide een rechte hoek en beide hoek *A*.

d De vergrotingsfactor van driehoek *ADE* naar *ABF* is $AB : AD = 2$, dus $BF = 2\cdot DE = 6$

16 a Als je als hoogte h van de twee driehoeken de afstand van de evenwijdige zijden neemt, dan:
oppervlakte ΔABD : oppervlakte $\Delta BCD =$
$\frac{1}{2}\cdot h\cdot AB : \frac{1}{2}\cdot h\cdot CD = AB : CD = 2:1$

b Driehoek *ASB* krijg je uit driehoek *CSD* door met centrum *S* met -2 te vermenigvuldigen.
Dus de oppervlakten verhouden zich als 4:1.

17 a Noem de afstand van C tot zijde $AB = h$. Dan is de oppervlakte van driehoek $ADC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h = h$ en van driehoek $BDC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h = 3h$.
Dus oppervlakte driehoek $ADC = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ en oppervlakte driehoek $BDC = 12$.

b Oppervlakte driehoek $AXC = \frac{1}{2} \cdot AX \cdot h$
Oppervlakte driehoek $BXC = \frac{1}{2} \cdot BX \cdot h$

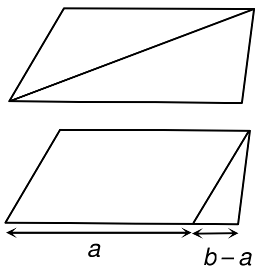
18 Oppervlakte $AXC = \frac{2}{3} \cdot 60 = 40$ en oppervlakte $BXC = 20$.
Het snijpunt van MN en CX noemen we S.
Dan zijn CAX en CBX uitvergrotingen van CMS en CNS met factor 2, dus:
oppervlakte $CMS = \frac{1}{4} \cdot$ oppervlakte $CAX = 10$ en
oppervlakte $CNS = \frac{1}{4} \cdot$ oppervlakte $CBX = 5$
oppervlakte $AXSM = 30$ en oppervlakte $XBNS = 15$.

19 Als je AB als basis neemt, dan hebben de driehoeken ABD en ABC dezelfde hoogte, dus dezelfde oppervlakte. Als je van beide driehoek ABS weglaat, krijg je weer twee figuren met dezelfde oppervlakte.

20 6

21 a De oppervlakte van de linker driehoek is $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ en van de rechter $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

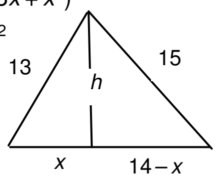
b De oppervlakte van het parallellogram is $a \cdot h$ en van de driehoek $\frac{1}{2} \cdot (b-a) \cdot h$.



c $\frac{1}{2} \cdot (b-a) \cdot h + a \cdot h =$
$\frac{1}{2} \cdot b \cdot h - \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

d In formulevorm zegt Joris: oppervlakte trapezium is: $\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$. Als je in deze formule de haakjes wegwerkt krijg je weer: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

22 Twee keer stelling van Pythagoras:
$h^2 = 13^2 - x^2$
$h^2 = 15^2 - (14-x)^2$
Dus $169 - x^2 = 225 - (196 - 28x + x^2)$
$169 - x^2 = 225 - 196 + 28x - x^2$
$140 = 28x$
$x = 5$, dus $h = 12$



29 a $2a$

b De rechthoek en het vierkant hebben het grijze deel gemeen. Het restant van de rechthoek $ABCD$ heeft een kleinere oppervlakte dan het restant van het vierkant $DEFG$, want $AE = ED$ (driehoek AED is gelijkbenig:45-45-90-gradendriehoek) en CE is kleiner dan EF (want $EF = CD$).