

1 De cirkelbeweging op een vierkant geprojecteerd

Een glazen cilinder - met daarop plaatjes - draait om een as binnen een papieren kubus. Op de as bevindt zich een puntvormige lichtbron. Daardoor worden de plaatjes op de kubus geprojecteerd: de toeschouwer ziet een "film" van plaatjes over het kubusoppervlak rondtrekken.

Om de eenheidscirkel is een vierkant getekend. Punt P beschrijft de standaardcirkelbeweging: op tijdstip t is P dus in het punt $(\cos t, \sin t)$. S is de projectie (de "schaduw") vanuit de oorsprong O op het vierkant. De plaats van S wordt gegeven door:

$$\text{als } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\pi: \quad x = 1 \quad \text{en} \quad y = \tan t$$

$$\text{als } \frac{1}{4}\pi \leq t \leq \frac{3}{4}\pi: \quad x = \frac{1}{\tan t} \quad \text{en} \quad y = 1$$

Op een zeker tijdstip tussen $\frac{1}{4}\pi$ en $\frac{3}{4}\pi$ bevindt S zich in het punt $(\frac{1}{2}, 1)$.

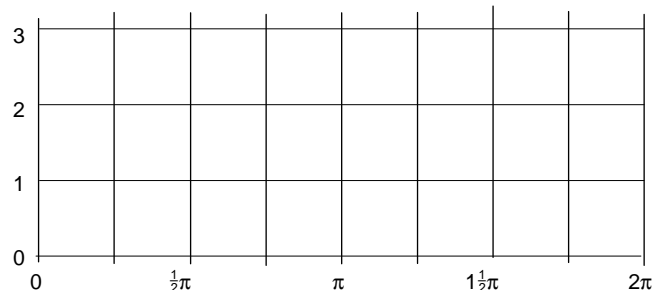
- 4 p **a.** Wat zijn de coördinaten van de plaats waar P zich op dat tijdstip bevindt, in twee decimalen nauwkeurig?

- 3 p **b.** Geef een formule voor x en y als $\frac{3}{4}\pi \leq t \leq 1\frac{1}{4}\pi$.

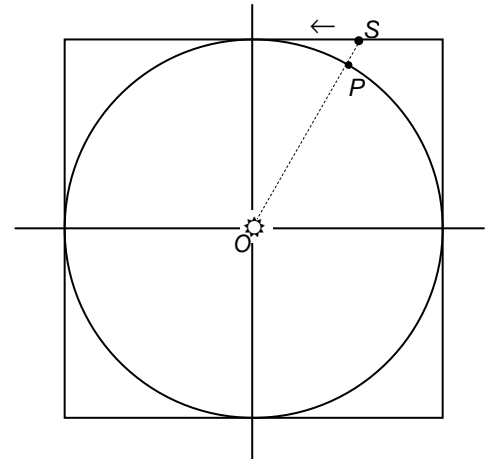
Als $0 \leq t \leq \frac{1}{4}\pi$ beweegt S met snelheid: $v = \frac{1}{\cos^2 t}$.

- 4 p **c.** Bewijs dat S beweegt met snelheid $v = \frac{1}{\sin^2 t}$, als $\frac{1}{4}\pi \leq t \leq \frac{3}{4}\pi$.

- 5 p **d.** Teken de grafiek van v op het tijdsinterval $[0, 2\pi]$.



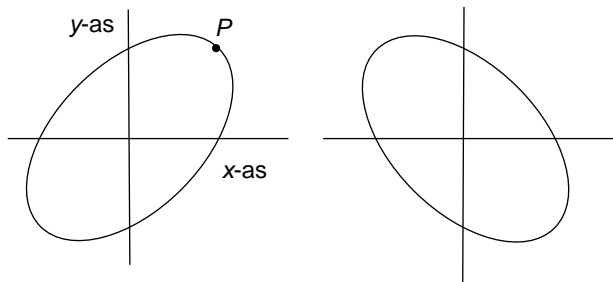
- 3 p **e.** Wat is de gemiddelde snelheid van S gedurende één ronde?



2 Lissajous

$x = \sin t$, $y = \sin(t - \frac{1}{3}\pi)$ zijn de bewegingsvergelijkingen van een ellips; die staat in de linker figuur. De toppen van de ellips liggen op de lijnen $y = x$ en $y = -x$.

P is de top met positieve 1^e en 2^e coördinaat.



- 5 p a. Bereken exact de coördinaten van P .

De baan in de rechter figuur is congruent met die in de linker figuur en heeft dezelfde symmetrieassen.

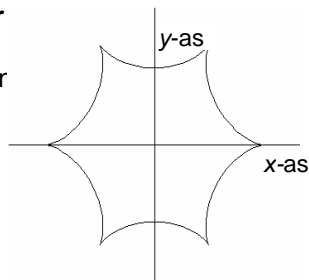
- 3 p b. Geef bewegingsvergelijkingen van de tweede Lissajous-figuur.

3. Een symmetrische figuur

Een punt beweegt volgens de bewegingsvergelijkinger

$$\begin{cases} x = \cos 5t + 5 \cos t \\ y = \sin 5t - 5 \sin t \end{cases}$$

Hiernaast staat de baan van het punt.



- 6 p a. Bewijs dat de afstand a van (x,y) tot $(0,0)$ gegeven wordt door : $a = \sqrt{26 + 10 \cos 6t}$.

- 6 p b. Wat is de minimale waarde van a en op welk tijdstip tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ wordt die bereikt? Exact uitrekenen.

- 5 p c. Laat zien dat geldt: $x'(t) = -10 \sin 3t \cos 2t$.