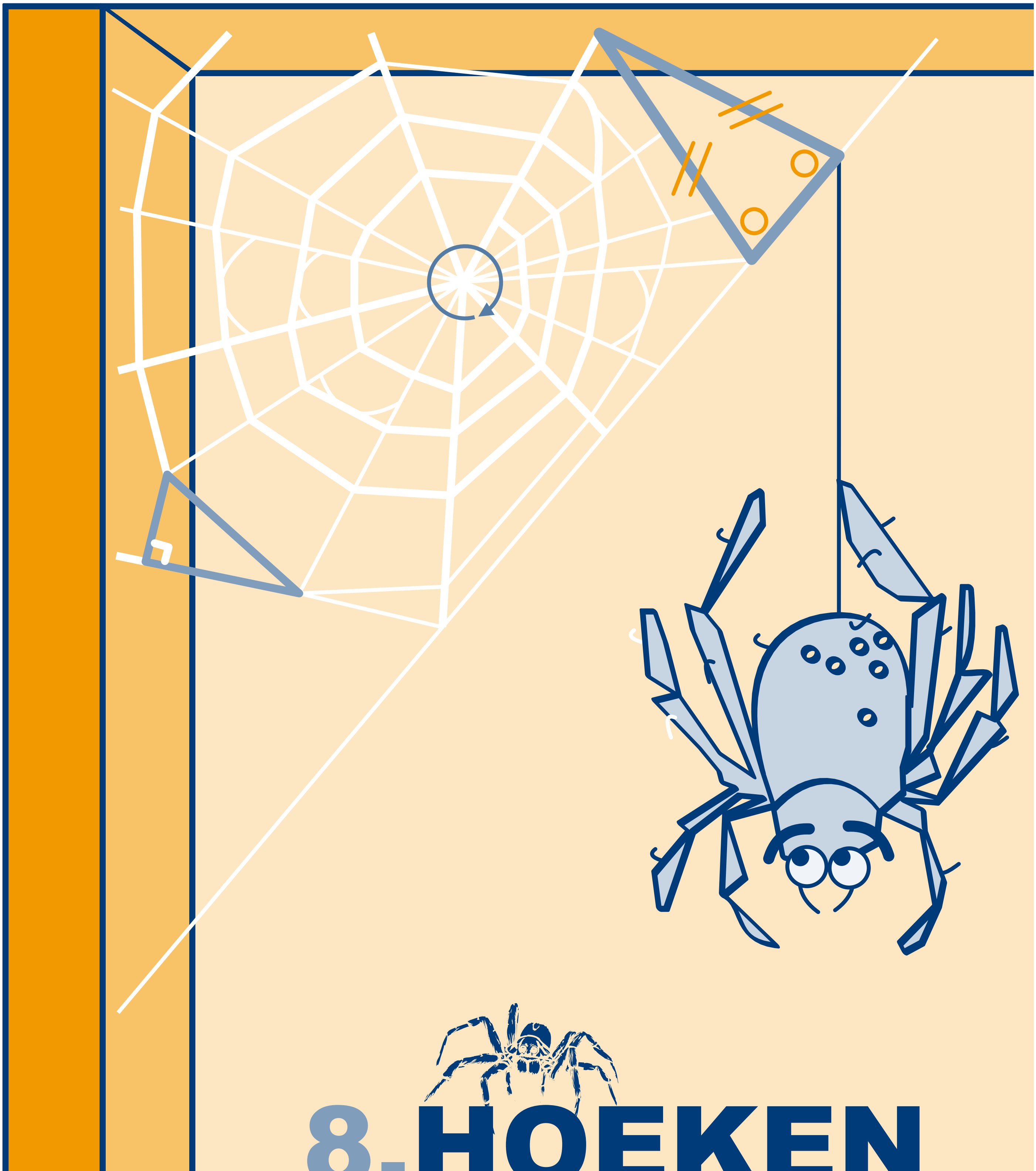


8. HOEKEN

8.0 INTRO

Aan elkaar passen

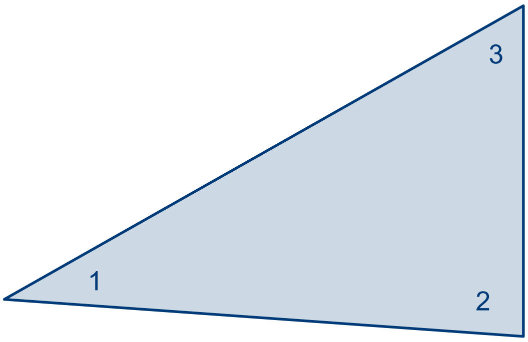
1 Een driehoek heeft (natuurlijk) drie hoeken. Die zijn in de driehoek hiernaast genummerd: 1, 2 en 3. De driehoek staat ook vier keer op het werkblad.

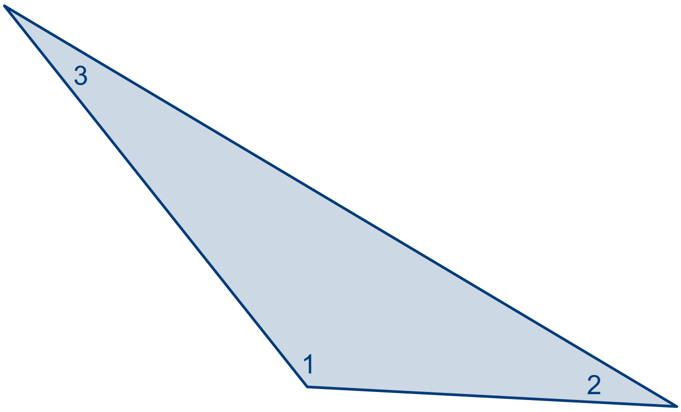
a Knip de vier exemplaren uit en leg daarmee een grotere driehoek. Plak die in je schrift.

b De grote driehoek heeft ook weer drie hoeken. Vergelijk de hoeken van de grote driehoek met de hoeken van een kleine driehoek. Zijn ze even groot?

c Halverwege de zijden van de grote driehoek komen steeds drie kleine driehoeken samen.
Wat zijn de nummers van de hoeken die daar samenkomen?

d Dezelfde vragen voor de driehoek die hiernaast staat.

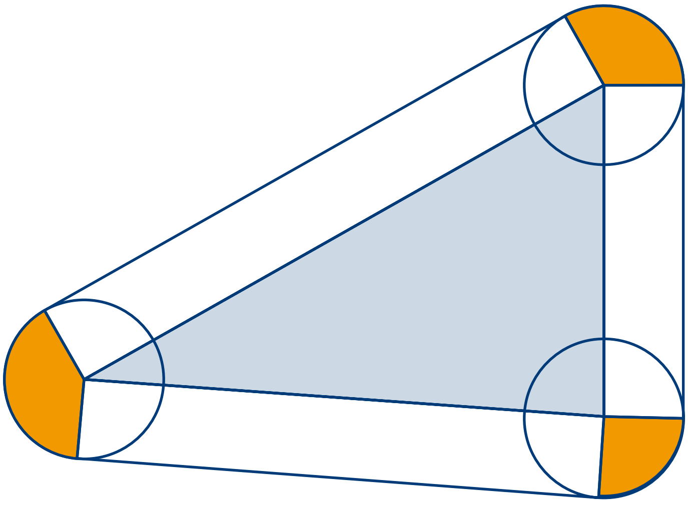




2 In de tekening hiernaast zijn op de zijden van de eerste driehoek van de vorige opgave rechthoeken getekend van 1 cm breedte. Tussen die rechthoeken in staan cirkelbogen met straal 1 cm.

a Wat weet je van die drie okergekleurde stukken cirkel?

b Teken een driehoek die lijkt op de tweede driehoek van opgave 1. Teken op de zijden van de driehoek rechthoeken met breedte 1 cm. En daartussen cirkelbogen.
Wat weet je van de drie cirkelsegmenten?



8.1 HOEKEN

Ronddraaien

3 De haan op de kerktoren geeft de windrichting aan. Hij wijst pal naar het noorden. Hiernaast is dat aangegeven met een pijl. De haan zit bij het witte open rondje. Neem de pijl over in je schrift.

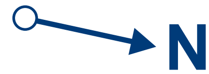
a Teken er pijlen bij die naar het oosten, het zuiden en het westen wijzen, alledrie beginnend bij het open rondje.

De vier pijlen verdelen het vlak in vier gelijke stukken. De richting zuidoost zit midden tussen het zuiden en het oosten in.

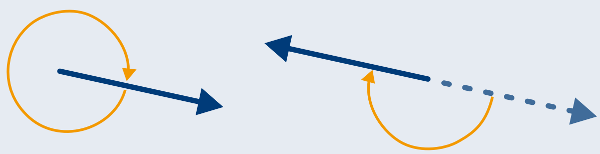
b Teken zo nauwkeurig mogelijk ook in die richting een pijl.

Midden tussen zuidoost en zuid zit de richting “zuidzuidoost”.

c Teken ook in die richting een pijl.



Als de pijl een keer helemaal ronddraait, zeggen we dat hij over een hoek van **360°** is gedraaid; hij wijst dan weer in dezelfde richting. Als je een half rondje draait, zeggen we dat hij over een hoek van **180°** is gedraaid; hij wijst dan in *tegengestelde* richting. Het teken ° spreek je uit als *graden*.



4 **a** Hoeveel graden is de hoek tussen de richtingen noord en west?

b En tussen de richtingen zuid en zuidoost?

De richting zuidzuidoost ligt midden tussen zuidoost en zuid in.

c Hoeveel graden is de hoek tussen de richtingen zuidzuidoost en zuidoost?

We werken voor “een keer helemaal rond” met 360° en niet met bijvoorbeeld 100 graden. En dat is altijd al zo gedaan. Dat gaat helemaal terug op de Babyloniërs, een volk dat 3000 jaar geleden in het huidige Irak leefde. De Babyloniërs werkten in het *zestigtallig stelsel*. Dat wil zeggen dat zij hun getalstelsel niet baseerden op 1, 10, 100, 1000, maar op 1, 60, 3600, 216000, enz. Hun invloed zie je ook nog in de tijdrekening: een uur telt 60 minuten en een minuut telt 60 seconden.

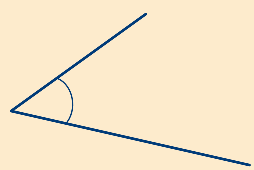
5 Je gaat één heel rondje (360°) verdelen in even grote stukken.

a Verdeel één keer rond in vier even grote hoeken. Die hoeken zijn “haaks” of “recht”. Hoeveel graden is elk van de stukken?

b Verdeel elk kwart op het oog in drie even grote hoeken. Eén stuk is dus het twaalfde deel van een keer rond. Hoeveel graden is elk van de stukken?

c Neem een van de twaalf stukken en verdeel dat weer in drieën. Hoeveel graden is elk van de stukken?

5 Teken een hoek, ongeveer zoals hiernaast.



a Verzin een manier om die hoek heel precies in twee even grote stukken te verdelen.

d Teken zo goed mogelijk een stukje van 1°. Dat is dus het 360ste deel van een keer rond.

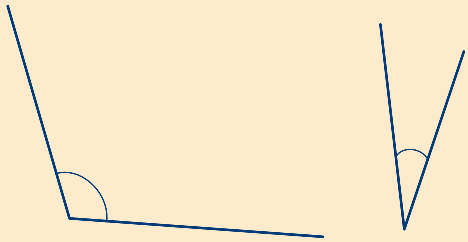
6 Iemand doet een deur open. De deur wordt over een hoek van 45° gedraaid. Op je werkblad staat een bovenaanzicht van de situatie.

a Teken de geopende deur in het bovenaanzicht.
b Ook als de deur over 135° opengedraaid wordt.

b Je kunt de hoek nu ook in vier even grote stukken verdelen. Hoe?
c In hoeveel stukken kan het nog meer?

Er is een handige manier om een hoek met de passer te verdubbelen. Of om hem drie of vier of … keer zo groot te maken.
d Kun jij die manier bedenken?

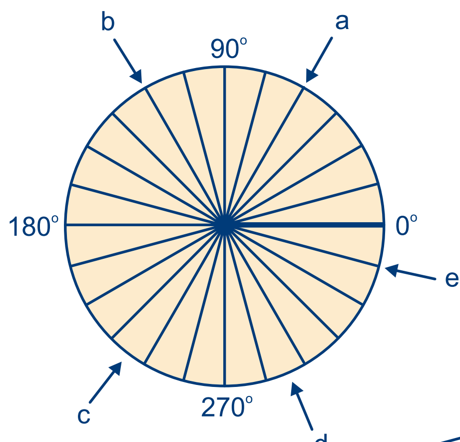
6 Hieronder staan twee hoeken. De linker is duidelijk groter dan de rechter.



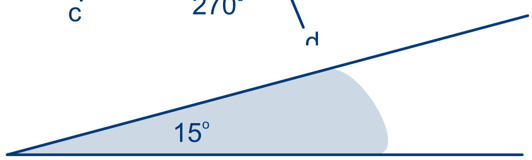
Hoeveel keer zo groot ongeveer? Verzin een manier om dat te meten.

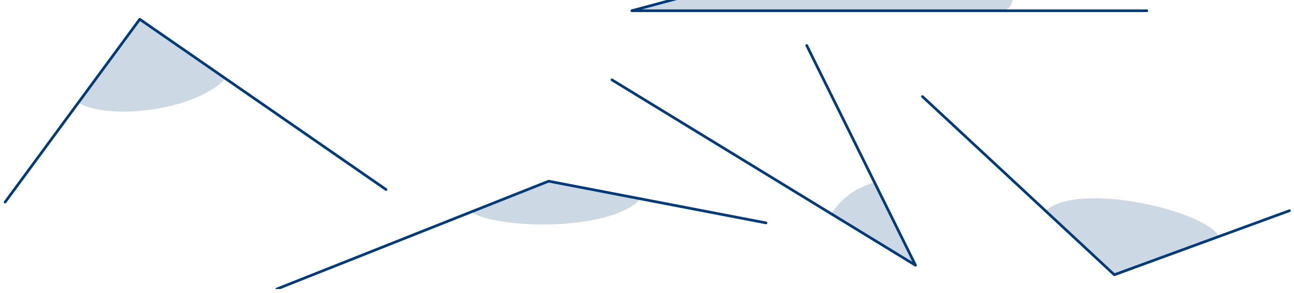
De grootte van hoeken

7 Met een meetlat meet je op hoe lang een lijnstuk is. Hoe groot een hoek is meet je met een hoekmeter.
a Noteer voor elke pijl hoeveel graden daarbij hoort.
b Bekijk de applet 8.1 - *Hoekmeter*. Pak het rode punt en varieer de hoek.



8 Hiernaast staat een hoek van 15°.
Schat hoe vaak die hoek van 15° in elk van de vier hoeken hieronder past.

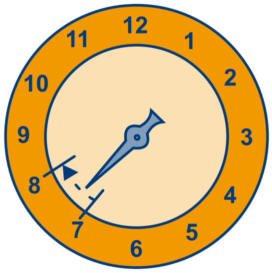




9 **a** Over hoeveel graden draait de grote wijzer van een klok in:
- een uur?
- tien minuten?
- één minuut?

b Over hoeveel graden draait de kleine wijzer van een klok in:
- één uur?
- één minuut?

c Hoeveel graden is de hoek tussen de wijzers van de klok om:
- drie uur?
- zes uur?
- twee uur?

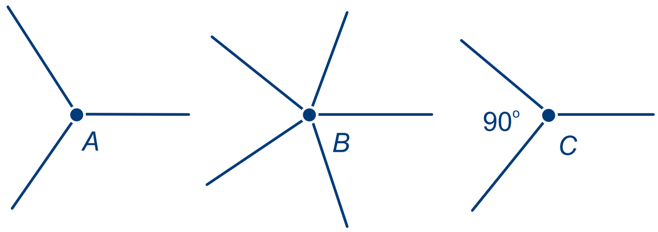


In applet 8.2 - *De klok* kun je de wijzers laten bewegen over elke hoek die je wilt.

10 De drie hoeken die in de figuur bij *A* samenkomen zijn even groot. De vijf hoeken bij *B* ook. Bij *C* komen drie hoeken samen. Twee ervan zijn even groot en de derde is recht.

a Bereken de grootte van elk van de hoeken bij *A* en de grootte van elk van de hoeken bij *B*.

b Bereken ook de grootte van de twee hoeken bij *C* die niet recht zijn.



Soorten hoeken

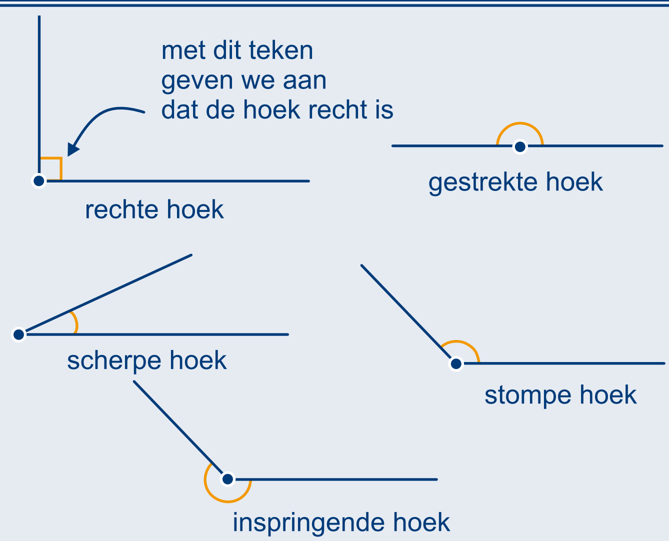
Een **rechte** hoek is een hoek waarvan de benen haaks op elkaar staan. In plaats van haaks zeggen we meestal **loodrecht**.

Een **gestrekte** hoek is een hoek waarvan de benen in elkaars verlengde liggen.

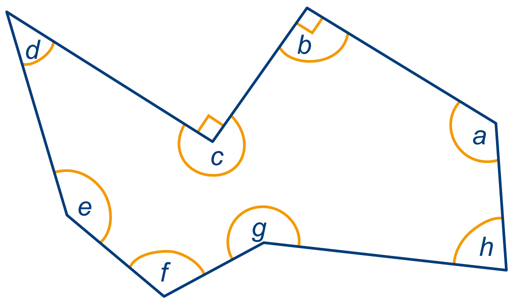
Een **scherpe** hoek is een hoek die kleiner (dus spitser) is dan een rechte hoek.

Een **stompe** hoek is een hoek die groter (dus minder spits) is dan een rechte hoek, maar kleiner dan een gestrekte hoek.

Een **inspringende** hoek is een hoek die groter is dan een gestrekte hoek.

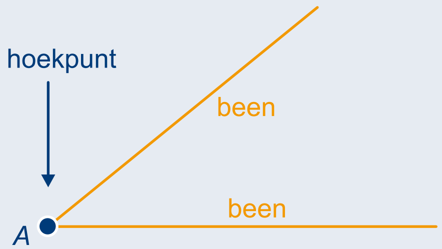


11 Hiernaast is een achthoek getekend.
Geef van elke hoek de passende naam.



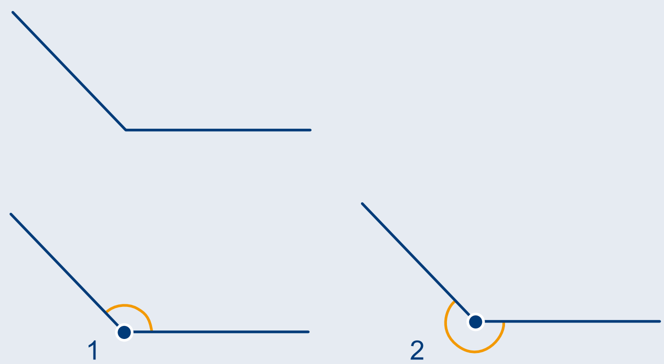
12 Neem over en vul in:
een rechte hoek is ___°,
een scherpe hoek is kleiner dan ___°,
een stompe hoek is groter dan ___° en kleiner dan ___°,
een gestrekte hoek is ___°,
een inspringende hoek is groter dan ___°.

Hieronder is **hoek *A*** getekend.



A is het **hoekpunt**, de plaats waar de twee **benen** van de hoek bij elkaar komen. Hoe lang je de benen van de hoek tekent, is niet van belang.

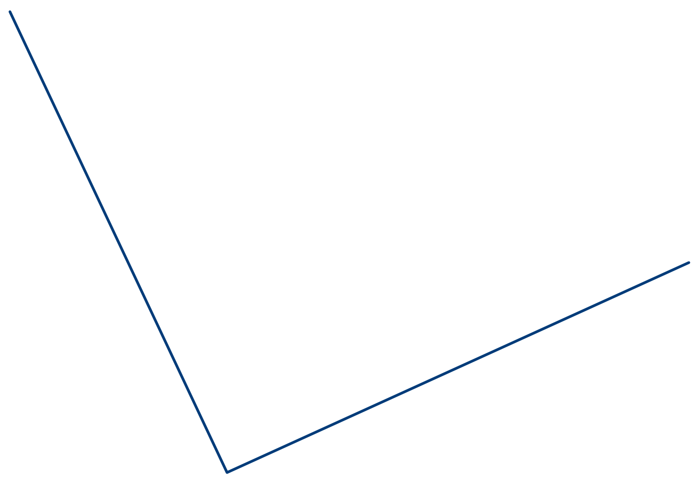
Hieronder zijn eigenlijk twee hoeken getekend: de hoek aan de bovenkant en de (wat grotere) hoek aan de onderkant.



13 a Hoe groot zijn die hoeken 1 en 2 hierboven samen?

In het plaatje hiernaast kun je twee hoeken zien.
De ene hoek is recht.

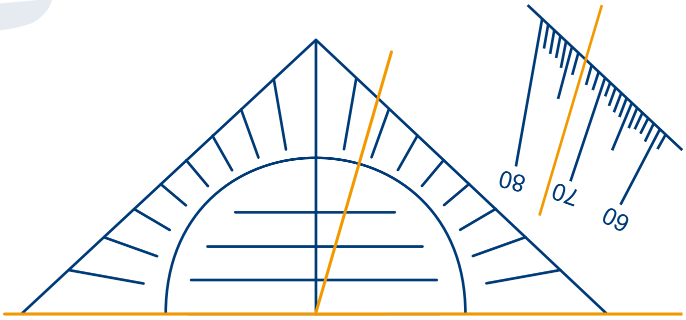
b Hoe groot is de andere hoek?



8.2 DRIEHOEKEN TEKENEN

Meten van hoeken

Met je geodriehoek kun je ook hoeken meten. Er zit een schaalverdeling voor 'links'- en voor 'rechtsdraaiende' hoeken op. Voor de *grootte* van een hoek is het niet belangrijk of hij ontstaan is door links of rechts te draaien.

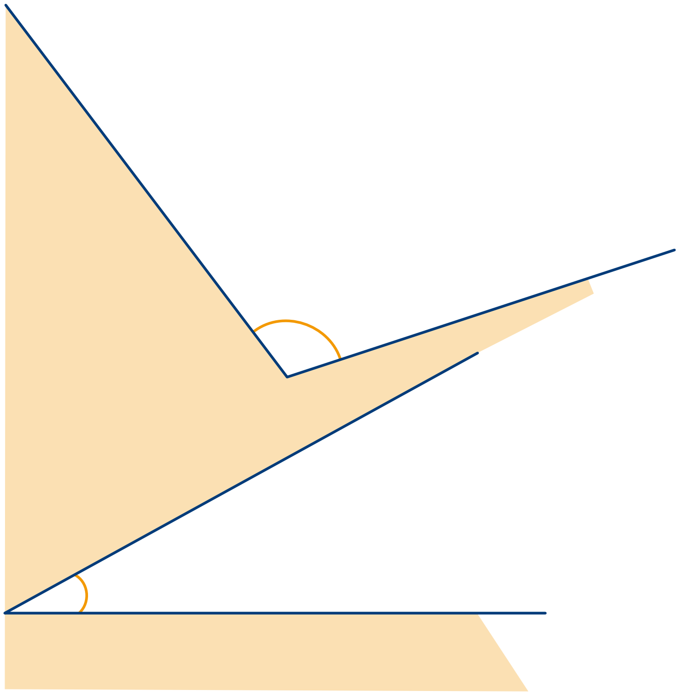


14 De geodriehoek hiernaast ligt over twee hoeken heen, die samen een gestrekte hoek vormen.

a Hoe groot is de linkerhoek en hoe groot is de rechterhoek?

Je kunt de grootte van de hoeken uittellen, maar ook direct aflezen. Je moet wel de goede schaal kiezen: de binnenste of de buitenste.

b Meet de twee hoeken hiernaast met je geodriehoek.



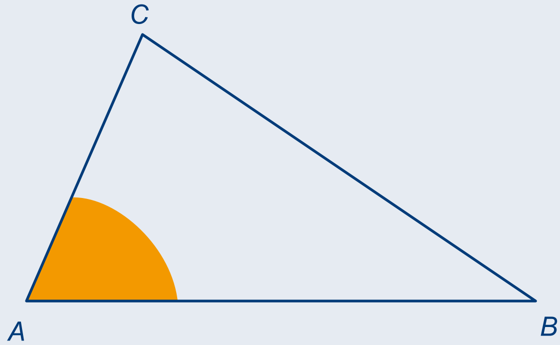
c Teken een hoek van 63° en ook een hoek van 121°.

In applet 8.3 - *Hoeken meten* wordt uitgelegd hoe je hoeken met de geodriehoek meet. Als je dat moeilijk vindt, moet je de applet goed bekijken. Zorg ervoor dat je goed hoeken kunt aflezen.

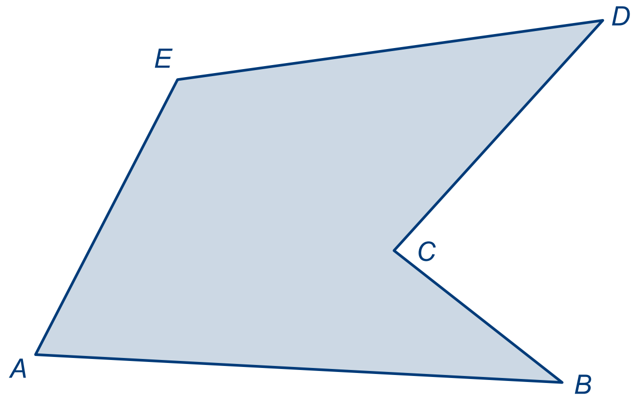
Van de driehoek hiernaast zijn de hoekpunten *A*, *B* en *C*. Daarom noemen we deze figuur: **driehoek *ABC***.

De lengte van zijde *AB* is 68 mm. We schrijven dat zó op: ***AB* = 68 mm**.

De grootte van hoek *A* is 66°.
We schrijven dat zó op: **∠*A* = 66°**.
We zeggen: *hoek A is 66 graden*.
∠ is een afkorting voor de grootte van een hoek.



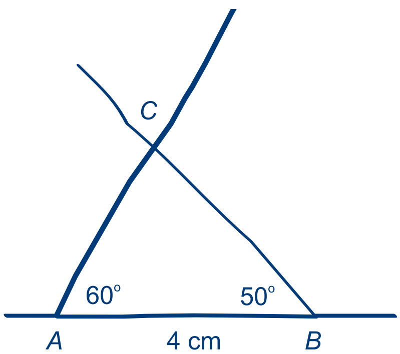
15 a Meet met de geodriehoek in driehoek *ABC* (op de vorige bladzijde):
de zijden van *AC* en *BC* en de hoeken *B* en *C*.
b Meet de hoeken van de vijfhoek hiernaast. Let op: één van de hoeken is inspringend, dus groter dan 180°.



Tekenen van hoeken

16 a Teken een driehoek waarvan één zijde 5 cm lang is, één zijde $3\frac{1}{2}$ cm en de derde zijde $2\frac{1}{2}$ cm lang is. Gebruik je passer en werk zéér precies.
Meet hoe groot de hoeken zijn.
b Teken met passer en liniaal een driehoek waarvan alle zijden 3 cm lang zijn. Meet hoe groot de hoeken zijn.

17 Van driehoek *ABC* weten we: $AB = 4$ cm, $\angle A = 60°$ en $\angle B = 50°$. Hieronder is een schetsje van deze driehoek getekend. De afmetingen kloppen niet, maar je kunt wel een beetje zien wat het moet worden.



We gaan deze driehoek heel precies tekenen.

Teken eerst een lijnstuk van 4 cm, dan de hoeken van 60° en 50°. Maak de driehoek af.
Zet de goede letters bij de hoekpunten.

18 Van driehoek *PQR* weten we: $PQ = 5$ cm, $\angle P = 30°$ en $\angle Q = 30°$.
a Teken de driehoek. Maak eventueel eerst op klad een schetsje van de driehoek.
b Meet hoek *R* en de zijden *PR* en *QR*.

In applet 8.4 - *Driehoeken tekenen* komen vijf verschillende gevallen aan de orde.

16 Een driehoek heeft een zijde van 4 en een zijde van 3 cm.
a Hoe lang kan de derde zijde zijn?
b Hoe groot kan de hoek tussen de zijden van 3 en 4 cm zijn?

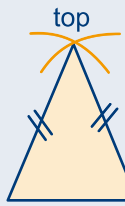
17 Een driehoek heeft een zijde van 4 cm. De hoek aan de ene kant van die zijde is 90°, de hoek aan de andere kant noemen we *a*.
a Hoe groot kan *a* zijn?
b Hoe lang kan de zijde tegenover hoek *a* zijn?
c Hoe lang kan de zijde tegenover de rechte hoek zijn?

18 Als we van een driehoek de drie zijden weten, is hij vastgelegd. Als we van een driehoek de drie hoeken weten, is hij nog niet vastgelegd
a Waarom niet?
b Is een driehoek vastgelegd als we twee hoeken weten en de zijde die daartussen in ligt?
c Is een driehoek vastgelegd als we twee zijden weten en de hoek die daartussen in ligt?

19 Van driehoek *KLM* is bekend: *KL* = 3 cm, $\angle L$ = 115° en *LM* = 3 cm.
a Maak (op klad) een schetsje van driehoek *KLM*, begin met hoek *L*. Geef in je schets aan wat je van de driehoek weet.
b Teken driehoek *KLM*.
c Meet de hoeken *K* en *M* en de zijde *KM*.

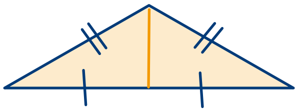
Hiernaast is een **gelijkbenige** driehoek getekend. Dat is een driehoek met twee even lange zijden.

Het hoekpunt waar de even lange zijden bij elkaar komen noemen we de **top** van de gelijkbenige driehoek en de zijde tegenover de top noemen we de **basis**.



De streepjes geven aan dat de zijden even lang zijn.

20a Teken een gelijkbenige driehoek met één zijde van 5 cm en twee zijden van 3 cm.
b Trek de lijn die de top verbindt met het midden van de zijde van 5 cm. Die lijn verdeelt de driehoek in twee helften.
Meet de zijden van deze helften.
c Omdat de zijden van de twee helften precies even lang zijn, zijn de twee helften hetzelfde en zijn hun hoeken even groot.
Meet hoe groot die hoeken zijn.

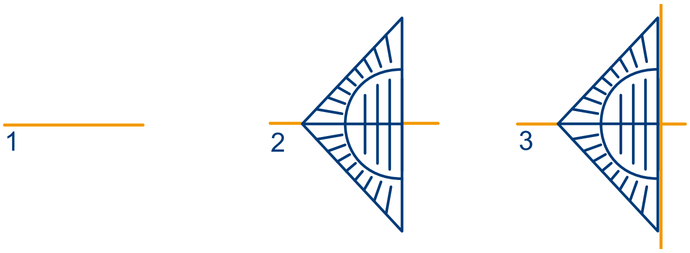


De Grieken in de oudheid vonden het niet voldoende als je in een tekening ‘ziet’, dat twee hoeken in een gelijkbenige driehoek even groot zijn. Zij vonden dat je dat moet beredeneren. In de opgave hierboven staat zo’n redenering.

In een gelijkbenige driehoek zijn de hoeken tegenover de twee even lange zijden even groot.

Overigens geldt ook: als twee hoeken in een driehoek gelijk zijn, is de driehoek gelijkbenig.

Met je geodriehoek kun je als volgt een rechte hoek tekenen.
1. Teken een been van de rechte hoek.
2. Leg de geodriehoek over het been; aan beide kanten eenzelfde stuk geodriehoek.
3. Teken het tweede been.



Zie ook applet 8.5 - *Loodlijn tekenen.*

21 a Teken een rechthoek van 5 bij 3 cm. Teken daarin een diagonaal.

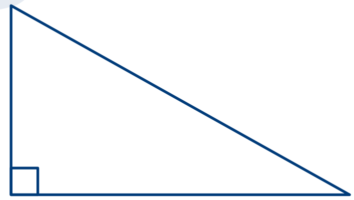
De diagonaal verdeelt de rechthoek in twee gelijke driehoeken. Een van de hoeken van zo’n driehoek ken je: die is 90°.
b Meet hoe groot de twee andere hoeken zijn.

21 De driehoeken die je krijgt als je een vierkant langs een diagonaal in tweeën deelt, hebben een bekende vorm:
de vorm van een geodriehoek.
Hoe groot zijn de hoeken van een geodriehoek dus?

8.3 SPECIALE DRIEHOEKEN

Soorten driehoeken

Een driehoek met een rechte hoek noemen we een **rechthoekige** driehoek.

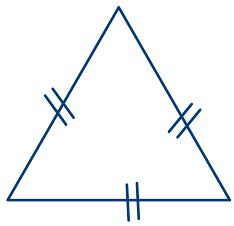


22 a Teken een rechthoekige gelijkbenige driehoek met twee zijden van 4 cm.
b Teken een gelijkbenige driehoek met een zijde van 3 cm en een zijde van 5 cm. Er zijn twee mogelijkheden.
c Teken een rechthoekige driehoek met een zijde van 3 cm en een zijde van 5 cm. Er zijn twee mogelijkheden.

23 a Teken een driehoek ABC met $\angle A = 35°$. Maak $AB = 5$ cm en $AC = 3$ cm.
b Teken een driehoek KLM met $\angle K = 35°$. Maak $KL = 5$ cm. Zorg ervoor dat $LM = 3$ cm; daarbij kun je je passer goed gebruiken. Er zijn twee mogelijke plaatsen voor M.

23 Teken een driehoek met een hoek van 35° en zijden van 4 en 5 cm. Er zijn drie verschillende mogelijkheden; teken ze alledrie.

Een driehoek met drie gelijke zijden heet een **gelijkzijdige** of **regelmatige** driehoek.



24 Wat weet je van de hoeken van een gelijkzijdige driehoek?

25 a Hoeveel scherpe hoeken kan een driehoek hebben?
b Hoeveel rechte hoeken kan een driehoek hebben?
c Hoeveel stompe hoeken kan een driehoek hebben?

In een driehoek zijn altijd twee hoeken scherp.

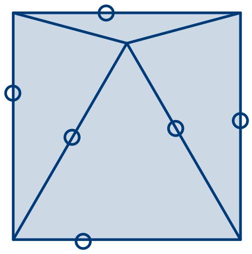
Als de derde hoek ook scherp is, dan noemen we de driehoek **scherphoekig**.

Als de derde hoek recht is, noemen we de driehoek **rechthoekig**.
Als de derde hoek stomp is, noemen we de driehoek **stomphoekig**.

26 Waar of niet waar?
a Elke gelijkzijdige driehoek is scherphoekig.
b Elke gelijkbenige driehoek is scherphoekig.
c Elke driehoek kun je verdelen in twee rechthoekige driehoeken.

26 Waar of niet waar?
a Elke driehoek kun je verdelen in twee scherphoekige driehoeken.
b Elke driehoek kun je verdelen in twee stomphoekige driehoeken.
c Elke driehoek kun je verdelen in drie stomphoekige driehoeken.
d Elke driehoek kun je verdelen in drie gelijkbenige driehoeken.
e Elke rechthoekige driehoek kun je verdelen in twee gelijkbenige driehoeken.

27 Een vierkant is verdeeld in vier driehoeken. Gelijke zijden zijn met eenzelfde teken aangegeven.



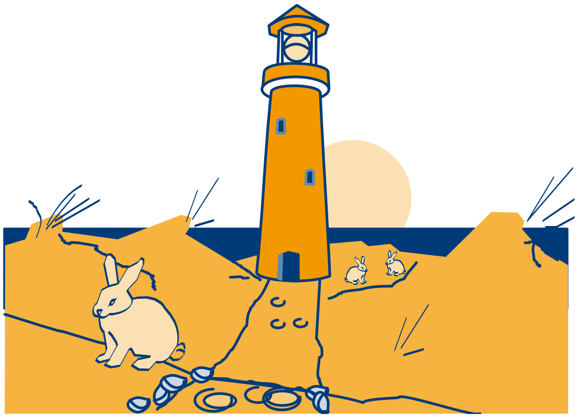
a Zeg van de vier driehoeken zo goed mogelijk van wat voor soort hij is. Gebruik gelijkzijdig en/of gelijkbenig.
b De driehoeken hebben in totaal twaalf hoeken. Sommige hoeken zijn gelijk.
Van hoeveel verschillende groottes zijn de hoeken?

28 Een ladder van 5 meter staat tegen een muur. De voet van de ladder staat 1 meter van de muur af.
a Teken het zijaanzicht op schaal 1 : 100.
b Meet hoe groot de hoek is die de ladder met de grond maakt.
c Meet hoe hoog de ladder tegen de muur reikt.

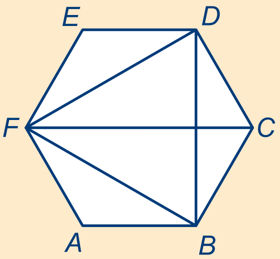
29 Een sluis is 9 meter breed. De twee sluisdeuren zijn elk 5 meter. Als de sluisdeuren dicht zijn, maken ze een stompe hoek met elkaar.
a Teken het bovenaanzicht op schaal.
b Meet hoe groot de hoek is die de sluisdeuren met elkaar maken.

Kijklijnen

30 De vuurtorenwachter loopt naar de vuurtoren.
Achter de toren spelen konijntjes in het gras.
Ze lopen niet meer weg voor de vuurtorenwachter.
Het plaatje op de volgende bladzijde is een bovenaanzicht. Daarin kun je zien waar de konijntjes op een gegeven moment zitten.

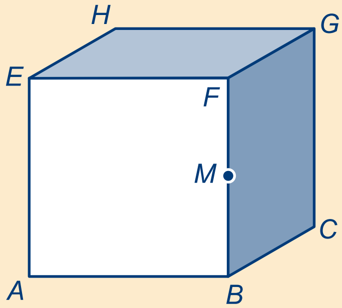


27 *ABCDEF* is een regelmatige zeshoek. Er zijn vier diagonalen getekend.

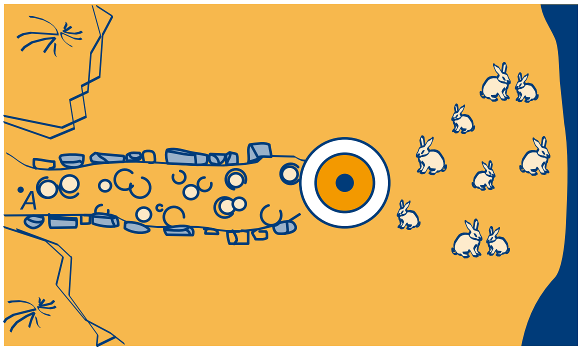


a Zeg van elk van de volgende driehoeken of hij gelijkbenig/gelijkzijdig en ook of hij scherphoekig/rechthoekig/stomphoekig is:
ABF , *BDF* , *BCF.*

ABCDEFGH is een kubus. *M* is het midden van *BF*.



b Zeg van elk van de volgende driehoeken of hij gelijkbenig/gelijkzijdig en scherphoekig/recht-hoekig/stomphoekig is:
ABC, *AMC* , *BCG* , *BGE*, *EHM.*



a Hoeveel konijntjes kan de vuurtorenwachter zien als hij bij *A* op het pad staat? Teken kijklijnen, links en rechts langs de vuurtoren.
Meet de hoek tussen die kijklijnen.

Thuis vertelt de vuurtorenwachter: "Als ik naar de toren loop, kom ik steeds dichter bij de konijntjes. Ze lopen niet weg. Toch zie ik steeds minder konijntjes."

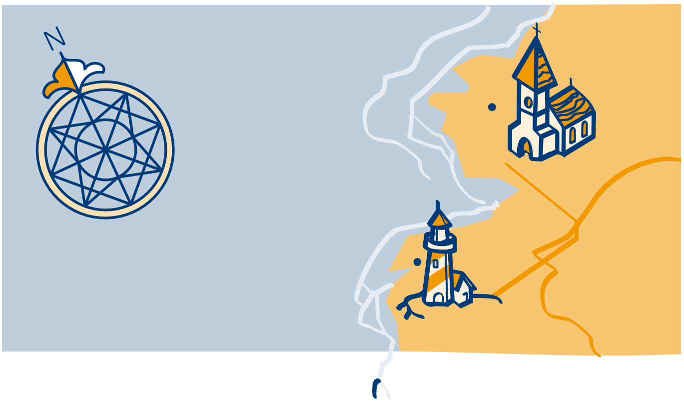
b Hoe komt dat? Leg dat met het kaartje uit.

Als de vuurtorenwachter dicht genoeg bij de vuurtoren komt, ziet hij vanaf een bepaalde plek helemaal geen konijntjes meer.

c Zoek dat punt. Hoe groot is dan de hoek tussen de linker en rechter kijklijn langs de vuurtoren?

Met de applet 8.6 - *Konijnen* kun je dit uitvoeren.

31 Hiernaast is een deel van een eiland getekend. De precieze plaats van de vuurtoren en de kerk is met een stip aangegeven. Links op het kaartje is een windroos getekend. De pijl wijst naar het noorden.



Op zee, in de buurt van dit eiland, vaart een boot. Als de stuurman naar het oosten kijkt, ziet hij de kerktoren.

a Geef met een lijn de punten op zee aan waar de boot zou kunnen zijn.

Als de stuurman naar het zuidoosten kijkt, ziet hij de vuurtoren.

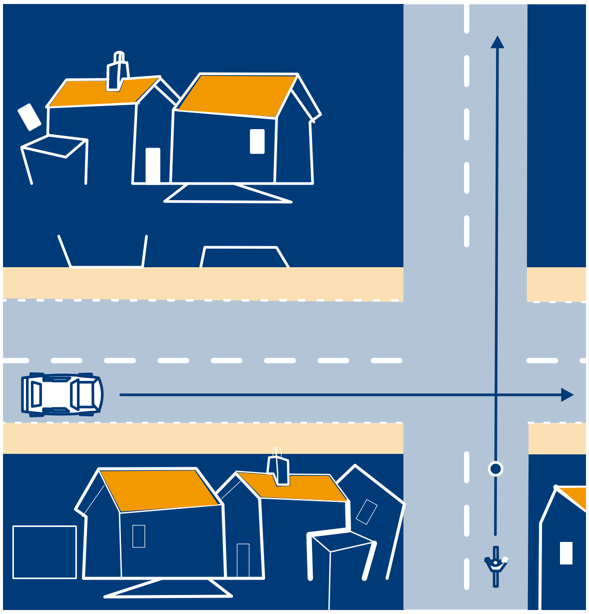
b Geef op het kaartje de plaats van het schip aan. Laat zien hoe je die plaats gevonden hebt.

Ronnie woont op dit eiland. Als hij vanuit zijn huis naar het noorden kijkt, ziet hij de kerk. Als hij naar het noordwesten kijkt, ziet hij de vuurtoren.

c Teken op het kaartje de plaats van het huis. Laat ook nu weer zien hoe je die plaats gevonden hebt.

Met applet 8.7 - *Boot* kun je dit uitvoeren.

32 Een auto en een fiets naderen een gevaarlijke kruising. De kruising is zo gevaarlijk door de dichte bebouwing langs de wegen. Ze willen allebei recht door.



Hierboven zie je waar de auto en de fiets zich op een bepaald moment bevinden.

a Zien ze elkaar op dat moment? Waarom (niet)?

b Hoe groot is de kijkhoek van de fietser op dat moment? Dat is de hoek tussen de meest linkse en meest rechtse kijklijn die niet door de bebouwing wordt tegengehouden.

De fiets rijdt 20 km/u en de auto 50 km/u.

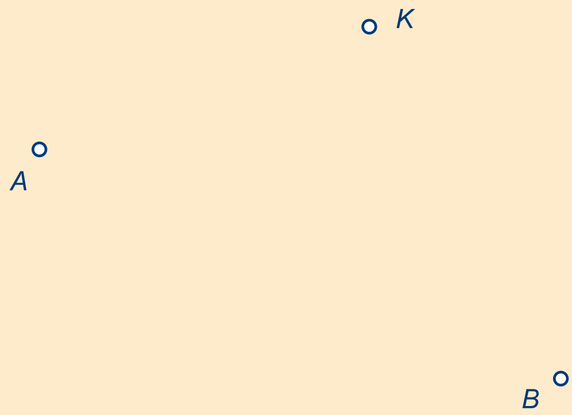
c Geef aan waar de voorkant van de auto is als de voorkant van de fiets bij de plek is die met het rondje is aangegeven.
Zien ze elkaar nu?

Veronderstel dat ze geen van beiden opletten en gewoon hun weg vervolgen zonder vaart te minderen.

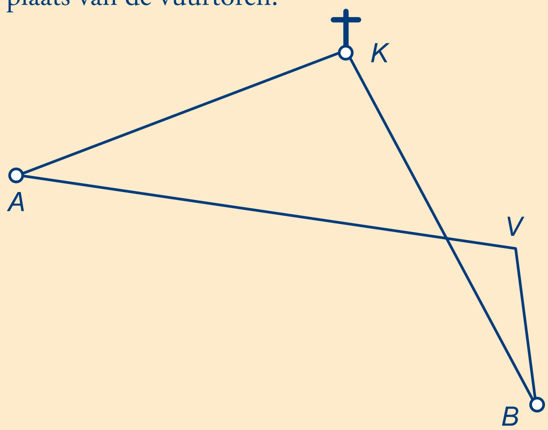
d Krijgen we een botsing?

Met applet 8.8 - *Blikveld* kun je dit uitvoeren.

32 In het plaatje hieronder is K de plaats van de kerktoren. Er is ook een vuurtoren V. Ad staat bij plaats A; de richtingen vanuit A naar K en naar V maken een hoek van 30° met elkaar. Bea staat bij plaats B; de richtingen vanuit B naar K en naar V maken een hoek van 20° met elkaar.



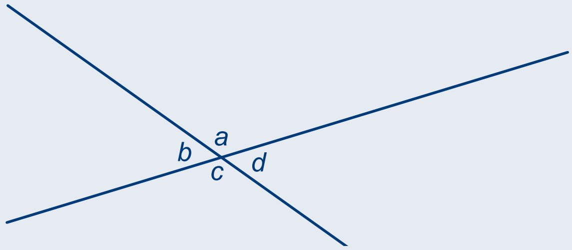
Er zijn vier mogelijke plaatsen voor V die aan deze gegevens voldoen. Eén ervan is hieronder getekend.
Teken de andere drie mogelijkheden voor de plaats van de vuurtoren.



8.4 DE HOEKENSOM VAN EEN DRIEHOEK

Redeneren met hoeken

Hiernaast zie je twee lijnen die vier hoeken met elkaar maken: *a*, *b*, *c* en *d*.
De hoeken *a* en *c* liggen "tegenover elkaar". Daarom zeggen we dat *a* en *c* **overstaande hoeken** zijn.
Om dezelfde reden zijn *b* en *d* ook overstaande hoeken.



Je zult waarschijnlijk niet twijfelen aan het volgende.
- De hoeken *a* en *c* zijn even groot.
- De hoeken *b* en *d* zijn even groot.

We kunnen dat ook beredeneren. Dat doen we in de volgende opgave.

33 a Stel dat hoek $b = 37°$.
Hoe groot is hoek *a* dan? En hoek *c*?
b Hoe groot zijn *a* en *c* als $b = 38°$?

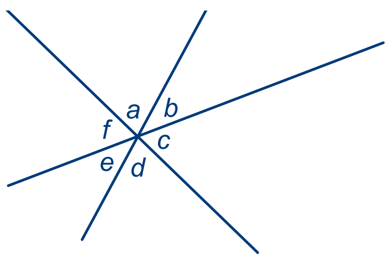
33 Bekijk het bovenstaande plaatje.
a Druk hoek *a* uit in hoek *b*.
b Druk hoek *c* uit in hoek *b*.
c Wat kun je concluderen over de grootte van de hoeken *a* en *c*?

Wat je hierboven begrepen hebt, is altijd waar:

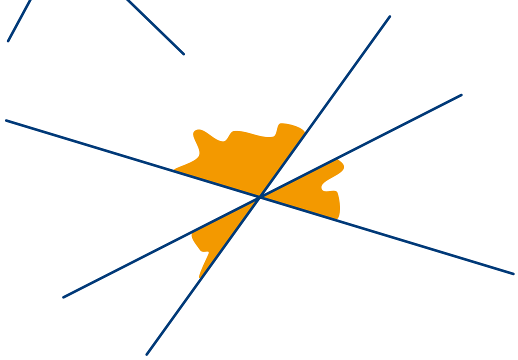
overstaande hoeken zijn even groot.

Dit is de moeite waard om te onthouden. We zullen het later vaak gebruiken in een redenering.
Een dergelijke bewering in de wiskunde die altijd waar is noemen we een **stelling**.

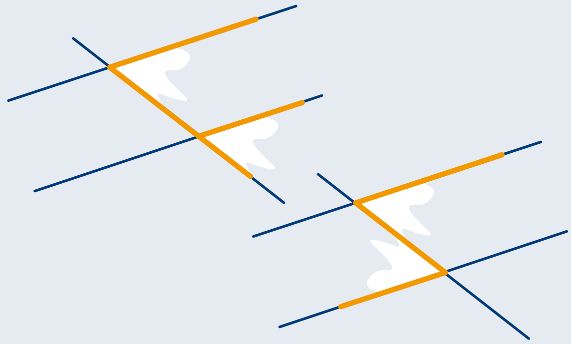
34 Van de hoeken in de figuur hiernaast weten we: $a = 75°$ en $b = 40°$.
a Hoe groot zijn de hoeken *d* en *e*? Hoe weet je dat?
b Hoe groot zijn de hoeken *c* en *f*?



35 Drie lijnen gaan door één punt. Er zijn zes hoeken bij het snijpunt. Drie van die hoeken zijn aangegeven.
Hoe groot zijn die drie hoeken samen? Schrijf ook op hoe je je antwoord hebt gevonden.



Hiernaast staan twee evenwijdige lijnen die door een derde lijn gesneden worden. Hierin kun je de letter F ontdekken. Het paar aangegeven hoeken in de eerste figuur noemen we daarom **F-hoeken**.
Je kunt in zo'n plaatje ook de letter Z ontdekken. Het paar aangegeven hoeken in de tweede figuur noemen we daarom **Z-hoeken**.



36 In het plaatje hierboven kun je nog meer F-hoeken ontdekken.

a Geef op je werkblad alle paren F-hoeken aan. Gebruik voor elk paar een andere kleur.

Behalve het paar Z-hoeken dat hierboven is aangegeven is er nog een paar Z-hoeken te ontdekken in het plaatje.

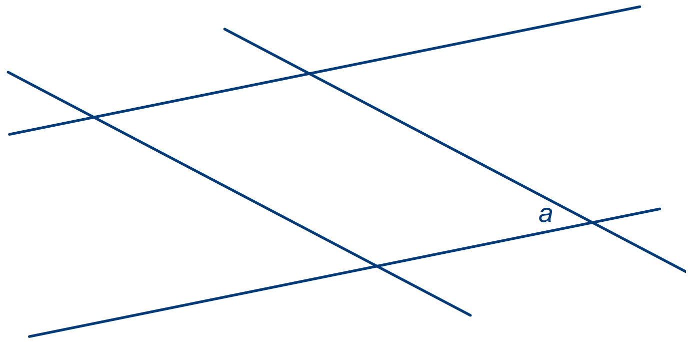
b Geef in je werkschrift dat paar Z-hoeken aan.

F-hoeken zijn even groot.

Z-hoeken zijn even groot.

Dit is ook weer een voorbeeld van een stelling. Vanaf nu kun je hiervan gebruik maken.

37 Twee evenwijdige lijnen worden gesneden door twee andere evenwijdige lijnen. Neem de figuur over in je schrift.



a Hoe noem je de figuur die binnen de vier lijnen ligt (die dus door de vier lijnen wordt begrensd)?

b Hoeveel hoeken zie je in totaal in de figuur?

c Een van de hoeken is *a*.
Kleur rood: de hoek die met *a* een paar overstaande hoeken vormt.
Kleur groen: beide hoeken die met *a* een paar F-hoeken vormen.
Kleur blauw: beide hoeken die met *a* een paar Z-hoeken vormen.

Er zijn nog twee scherpe hoeken in de figuur die niet gekleurd zijn. Die vormen met een van de groene hoeken een paar Z-hoeken of een paar F-hoeken.

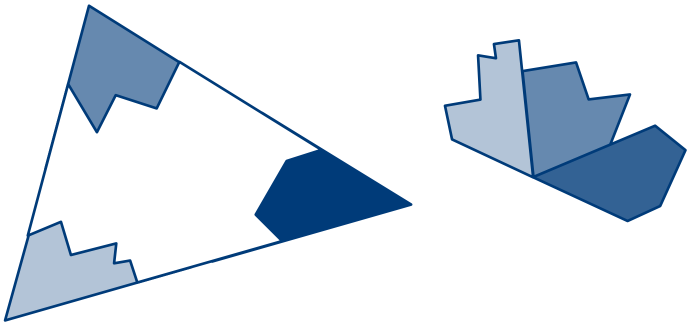
d Wat weet je nu over de grootte van de scherpe hoeken in de figuur.

e Hoe weet je nu ook dat alle stompe hoeken in de figuur even groot zijn?

8.4 DE HOEKENSOM VAN EEN DRIEHOEK

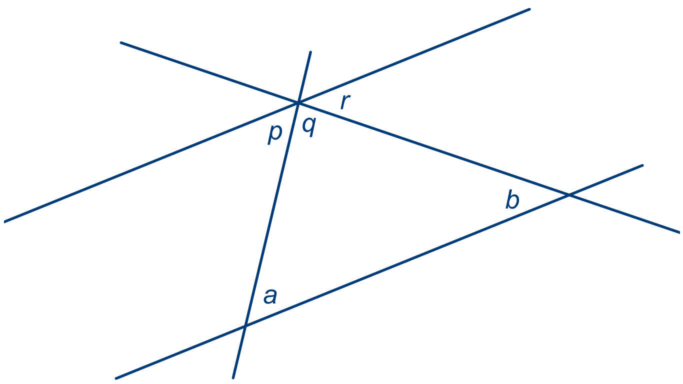
samenvatting
In het vervolg van dit hoofdstuk gaan we rekenen en redeneren. We baseren ons daarbij op de volgende stellingen.
- Een gestrekte hoek is 180°.
- Overstaande hoeken zijn gelijk.
- F-hoeken zijn gelijk.
- Z-hoeken zijn gelijk.

De hoekensom

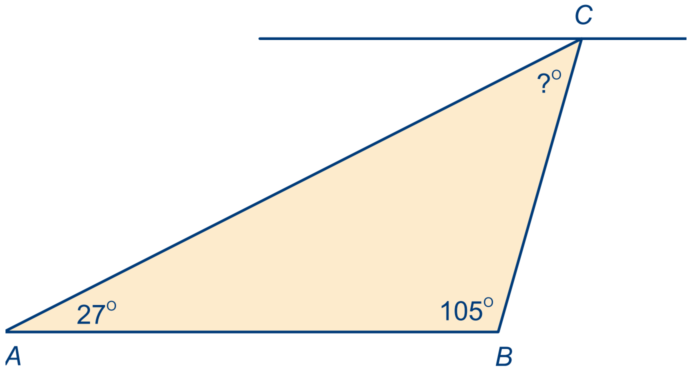


38 We gaan nu een experiment doen met de hoeken van een driehoek.
a Teken een driehoek op een stuk papier en knip hem uit.
Van die driehoek scheuren we de hoeken af en leggen de drie stukken met de hoekpunten tegen elkaar aan.
Wat valt je op?
b Herhaal dit experiment met een andere driehoek.

In de applet 8.9 - *Hoekensom* gebeurt dit bij verschillende driehoeken.



39 Drie lijnen gaan door één punt; een vierde lijn is evenwijdig aan een van de lijnen. In de figuur zijn twee hoeken aangegeven: a en b.
a Welke van de hoeken p, q en r is gelijk aan a? Waarom?
b Welke van de hoeken p, q en r is gelijk aan b? Waarom?
c Stel dat je weet dat $a = 57°$ en b = 42°. Hoe groot is hoek q dan?
d Stel dat je weet dat $a = 58°$ en $b = 41°$. Hoe groot is hoek q dan?
e Hoe kun je hoek q berekenen als je de hoeken a en b kent?



40 In driehoek ABC zijn twee hoeken gegeven: $\angle A = 27°$ en $\angle B = 105°$.
Door punt C is een lijn getekend, die evenwijdig is aan AB.
a Neem de figuur over in je schrift.

Er zijn nu drie hoeken bij C. Twee daarvan ken je al met behulp van Z-hoeken.
b Hoe groot is de derde hoek bij C (de middelste)?

Zodra je in driehoek ABC twee hoeken kent: $\angle A$ en $\angle B$, kun je $\angle C$ uitrekenen.
c Met welke rekensom?

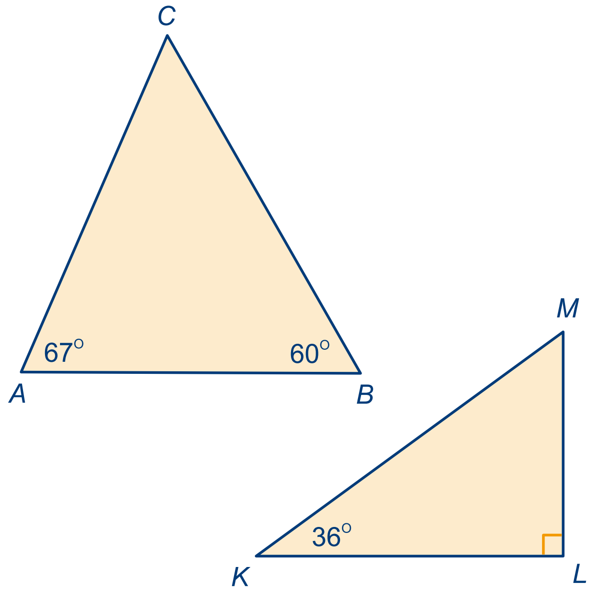
hoekensom van een driehoek

De som van de hoeken van een driehoek is 180°.

Als je dus twee hoeken van een driehoek kent, kun je de derde hoek berekenen.

In de applet 8.10 - *Bewijs hoekensom* zie je nog eens het bewijs van deze stelling gedemonstreerd.

41 Hieronder zijn twee driehoeken getekend. In beide zijn twee van de hoeken gegeven.



a Bereken $\angle C$. Schrijf netjes je berekening op.
b Bereken $\angle M$. Schrijf netjes je berekening op.

40 In paragraaf 8.0 - INTRO, opgave 2 heb je in feite ook al gezien dat de hoekensom van een driehoek 180° is.
Leg dat uit.

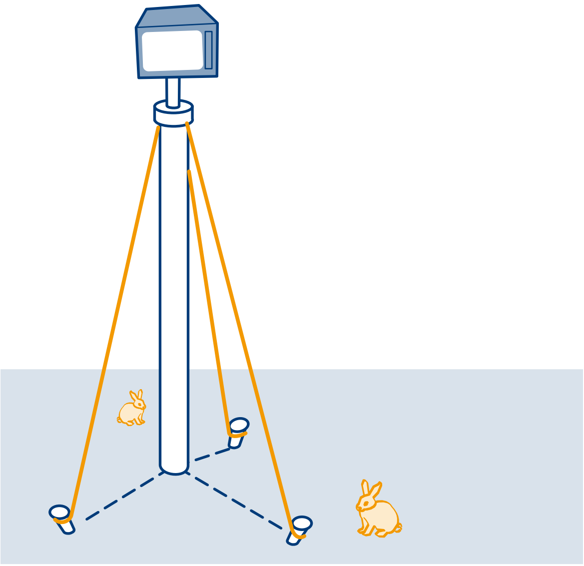
41 Van driehoek ABC is $\angle A = 66°$.
a Stel dat de driehoek rechthoekig is. Hoe groot is dan de andere scherpe hoek?
b Stel dat de driehoek gelijkbenig is. Hoe groot zijn de andere hoeken?
(Er zijn twee mogelijkheden.)

Oefenen met de hoekensom

42 ABC is een gelijkbenige driehoek waarin $\angle A$ en $\angle B$ even groot zijn en $\angle C = 50°$.
a Maak op klad een schetsje van driehoek ABC.
b Bereken $\angle A$.

43 a Teken een gelijkzijdige driehoek waarbij de lengte van een zijde 3 cm is.
Bereken hoe groot één hoek is van een gelijkzijdige driehoek.
b Teken een gelijkbenige rechthoekige driehoek met twee zijden van 3 cm.
Bereken hoe groot de hoeken van de driehoek zijn.

44 Op een vlak terrein staat een camera op een mast. De mast is met drie kabels vastgezet. De hoek die elk van de kabels met de grond maakt is 63°.



a Waarom wordt zo'n mast met drie en niet met een of twee kabels vastgezet?
b Meet de drie hoeken die de drie kabels met de grond maken in de tekening hierboven.

In de tekening zijn de hoeken niet even groot als ze in werkelijkheid zijn. Dat komt omdat je schuin op de driehoeken kijkt.

In werkelijkheid zijn de hoeken die de kabels met de grond maken alledrie 63°.
Neem aan dat de mast precies verticaal staat.
c Bereken hoe groot de hoek is die zo'n lijn boven met de mast maakt.

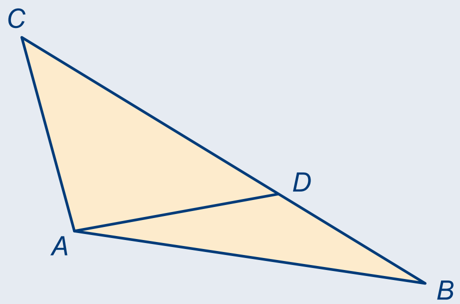
42 a Van een rechthoekige driehoek is een van de scherpe hoeken $a°$.
Geef een formule voor de grootte van de andere scherpe hoek.
b Van een gelijkbenige driehoek is de tophoek $t°$.
Geef een formule voor de grootte van de basis hoeken.

43 a Hoe groot zijn de hoeken van een gelijkzijdige driehoek?
b Hoe groot zijn de hoeken van een gelijkbenige rechthoekige driehoek?

44 Uit het feit dat de hoekensom van een driehoek 180° is, volgt dat een driehoek hoogstens één rechte hoek kan hebben.
Leg dat uit.

De notatie $\angle ABC$

In de figuur hieronder is duidelijk wat we bedoelen met $\angle B$ en met $\angle C$. Maar welke hoek is $\angle A$?



Daar komen drie hoeken voor in aanmerking:

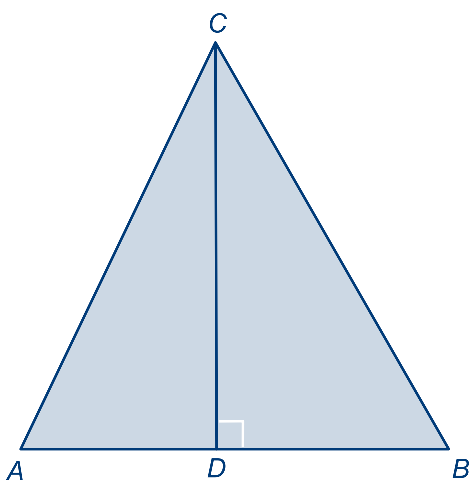
Om verwarring te voorkomen, noteren we deze drie hoeken verschillend. We noemen de hoeken achtereenvolgens: $\angle CAB$, $\angle DAB$ en $\angle CAD$.
Van $\angle CAB$ is het ene been CA en het andere been AB.
Het hoekpunt staat dus in het midden.
In plaats van $\angle CAB$ kun je net zo goed schrijven: $\angle BAC$.

45 **a** Wat zijn de benen van $\angle DAB$ in het plaatje bij de theorie hierboven?
Hoe zou je deze hoek ook kunnen noemen?

In het plaatje bij de theorie hiervoor zijn ook drie hoeken bij punt D.

b Hoe groot is $\angle CDB$?
Hoe kun je de andere twee hoeken bij D opschrijven?

46 In driehoek ABC geldt: $\angle A = 65°$ en $\angle B = 60°$.
CD verdeelt driehoek ABC in twee driehoeken.
De twee hoeken bij D zijn elk 90°.

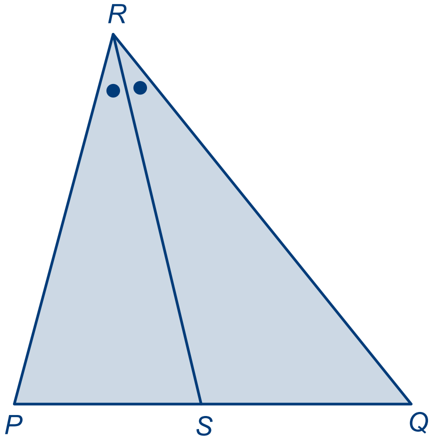


Bereken $\angle ACD$ en $\angle BCD$.
Hoe kun je dit laatste antwoord in driehoek ABC controleren?

46 **a** In een driehoek verhouden zich de hoeken als 1 : 2 : 3. Hoe groot zijn de hoeken?

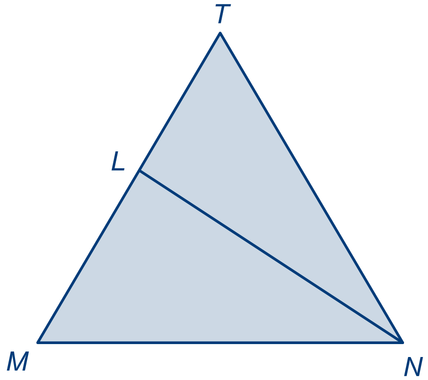
b In een driehoek is de grootste hoek 15° groter dan de middelste hoek en is de kleinste hoek 15° kleiner dan de middelste hoek. Hoe groot zijn de hoeken?

47 In driehoek PQR geldt: $\angle P = 75°$ en $\angle Q = 55°$. Driehoek PQR is in twee driehoeken verdeeld door lijnstuk RS. De twee hoeken bij R zijn even groot. (Dat geven we aan met de stippen in de hoeken.)



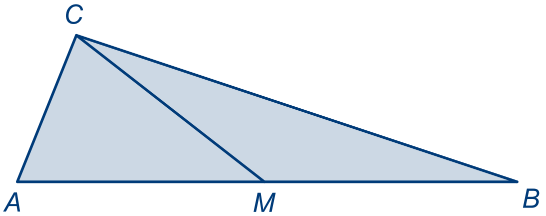
a Bereken $\angle PRS$ en $\angle QRS$.
b Bereken $\angle PSR$ en $\angle QSR$.
Controleer je antwoord.

48 Driehoek MNT is gelijkzijdig. Punt L ligt op MT, zo dat $\angle NLT = 94°$.



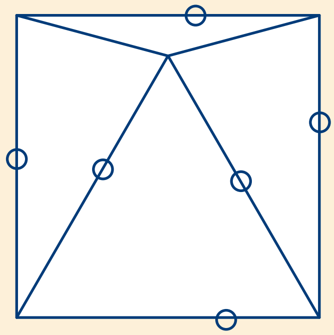
Bereken $\angle MNL$.

49 In driehoek ABC is M het midden van AB. Bovendien is gegeven dat $CM = AM = BM$. Veronderstel dat $\angle A = 68°$.



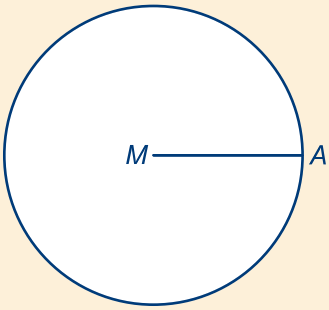
a Bereken achtereenvolgens: $\angle AMC$, $\angle BMC$, $\angle MCB$.
b Hoe groot is $\angle ACB$?

47 Een vierkant is verdeeld in vier driehoeken. Gelijke lijnstukken zijn met eenzelfde teken aangegeven:



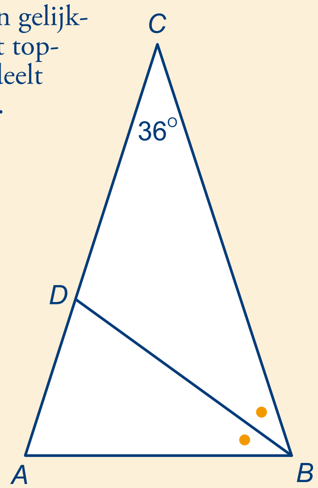
Bereken de hoeken van de stomphoekige driehoek.

48 Teken een cirkel met middelpunt M, met daarop een punt A.



a Teken de punten B en C zo dat $\angle BMA = 66°$ en $\angle CMA = 140°$ (B en C aan weerszijden van MA).
b Bereken de hoeken van driehoek MBC.

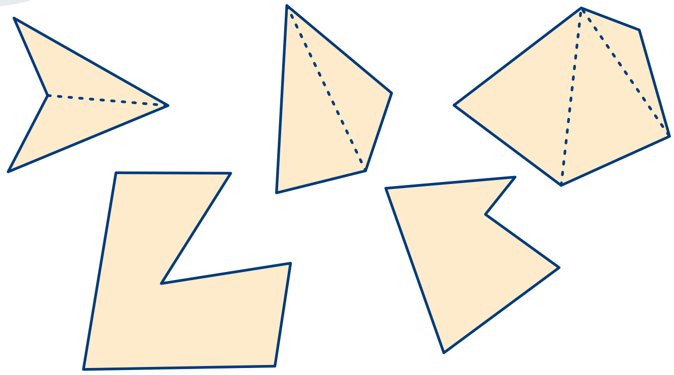
49 Driehoek ABC is een gelijkbenige driehoek met tophoek 36°. Lijn BD deelt $\angle ABC$ doormidden.



a Bereken de hoeken van driehoek ABD.
b Hoe weet je nu zeker dat $AB = BD = CD$?

8.6 VEELHOEKEN

De hoekensom van een veelhoek



50 Er zijn hiernaast enkele veelhoeken getekend: twee vierhoeken, twee vijfhoeken en één zeshoek. Drie veelhoeken zijn in driehoeken verdeeld.

a Neem de andere twee veelhoeken over in je schrift en verdeel ze in driehoeken (alleen stippenlijntjes van hoekpunt naar hoekpunt tekenen).
b Bereken de som van de hoeken in een vierhoek.
c Bereken de som van de hoeken in een vijfhoek.
d Bereken de som van de hoeken in de zeshoek.
e Je hebt nu de hoekensom berekend van een vierhoek, vijfhoek en zeshoek. Zet de resultaten in een tabel zoals hieronder staat. Vul de tabel aan met de hoekensom van een zevenhoek en een elfhoek.

	driehoek	**vierhoek**	**vijfhoek**	**zeshoek**	**zevenhoek**	**elfhoek**	***n*-hoek**
hoekensom	**180°**						

f Schrijf in de tabel een formule voor de hoekensom van een *n*-hoek (een veelhoek met *n* hoekpunten).

51 Een vierhoek heeft drie hoeken van 65°.
a Hoe groot is de vierde hoek?

De twee zijden tussen de hoeken van 65° zijn allebei 3 cm.
b Teken de vierhoek.
c Meet de andere twee zijden.

52 Een vijfhoek heeft vier hoeken van 95°.
a Hoe groot is de vijfde hoek?

De drie zijden tussen de hoeken van 95° zijn alledrie 3 cm.
b Teken de vijfhoek.
c Hoe lang zijn de andere twee zijden?

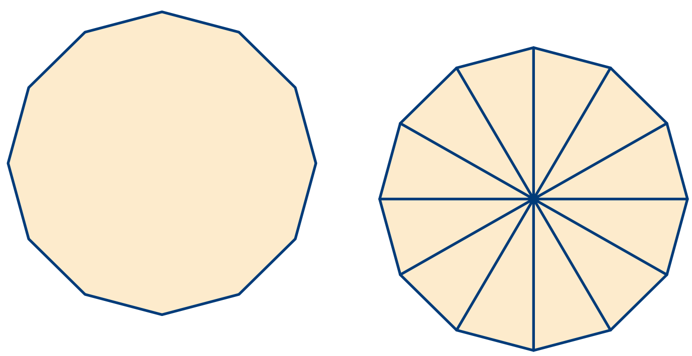
51 a Hoeveel stompe hoeken kan een vierhoek hebben?
b Hoeveel inspringende hoeken kan een vierhoek hebben?

52 a Hoeveel stompe hoeken kan een vijfhoek hebben?
b Hoeveel inspringende hoeken kan een vijfhoek hebben?

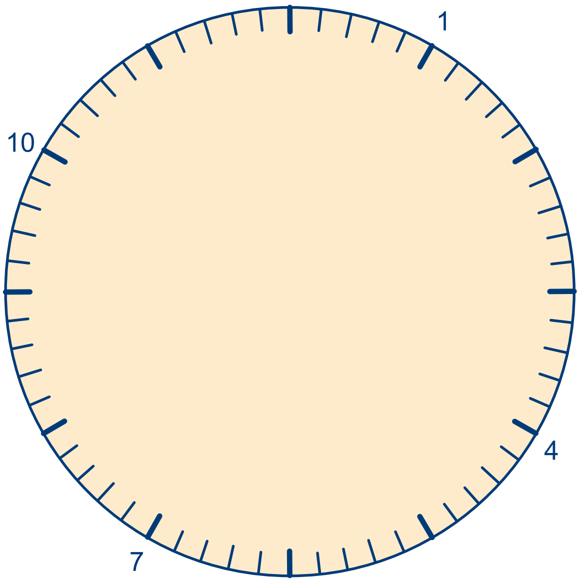
Regelmatige veelhoeken

53 Bekijk het linker plaatje van een regelmatige twaalfhoek.
a Hoe groot zijn de hoeken van een twaalfhoek samen? Gebruik de formule in de tabel.
b Hoe groot is dus één hoek in een regelmatige twaalfhoek?

Bekijk het rechterplaatje van de regelmatige twaalfhoek. Het middelpunt is verbonden met de hoekpunten; zodoende is er een waaier ontstaan van twaalf driehoekjes rond dat middelpunt.
c Hoe groot zijn de hoeken van één zo'n driehoekje?



54 Je kunt regelmatige veelhoeken tekenen met behulp van een klok. Als je de punten 1, 4, 7 en 10 verbindt, krijg je een regelmatige vierhoek, dus een vierkant.



a Teken in de klok een regelmatige driehoek, een regelmatige zeshoek en een regelmatige tienhoek. Maak daarbij gebruik van de urenstreepjes of de minutenstreepjes.
b Bereken hoe groot één hoek in een regelmatige tienhoek is. Dat kan op twee manieren; één manier is genoeg.

55a Hoe groot zijn de hoeken van een regelmatige honderdhoek tezamen?
b Hoe groot is elk van de hoeken van een regelmatige honderdhoek?

54 Je kunt een regelmatige vijftienhoek tekenen door minutenstreepjes op een klok te verbinden.
a Hoeveel verschillende regelmatige vijftienhoeken kun je op een klok op die manier maken?

Je kunt niet een regelmatige achthoek op een klok tekenen met minutenstreepjes als hoekpunten.
b Waarom niet?
c Welke regelmatige veelhoeken kun je op een klok tekenen? Zeg van elk soort ook hoeveel verschillende er zijn.

55 De hoeken van een n-hoek zijn tezamen $(n–2)\cdot 180°$. Hierin is n een positief geheel getal, groter dan 2.
a Hoe groot is elke hoek van een regelmatige n-hoek?
b Hoe groter n, des te groter de hoek van een regelmatige n-hoek.
Hoe groot moet je n nemen opdat de hoeken 170° zijn?

Meetkunde begint eenvoudig maar groeit tot een ingewikkeld bouwwerk. De eerste die zo'n bouwwerk zorgvuldig opbouwde was de Griek Euclides (ca. 325 - 265 v Chr.). Over zijn leven is weinig met zekerheid bekend, behalve dat hij leraar was in Alexandrië (Egypte). Daar schreef hij zijn beroemde *De Elementen*, waarin hij alle meetkunde die toen bekend was samenvatte. De Elementen bestaat uit 13 boeken. Misschien heeft Euclides ze niet allemaal zelf geschreven, maar had hij de leiding over een heel team van medewerkers.
De Elementen heeft grote invloed gehad op de ontwikkeling van de wetenschap.
Zo was het meetkundeonderwijs in Nederland tot 1960 gebaseerd op De Elementen. Na de Bijbel was het het meest gelezen boek. Je zou dus kunnen zeggen dat Euclides de leraar was met de meeste leerlingen.
Wil je nog meer hierover weten, kijk dan op de internetpagina van de Wageningse Methode.

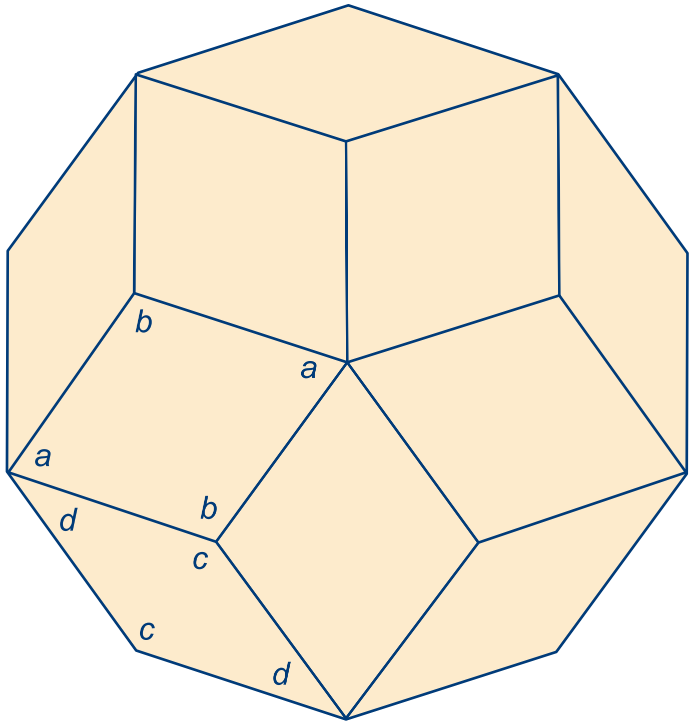
56 De tienhoek hiernaast is verdeeld in twee soorten ruiten.
We gaan alle hoeken die in de figuur zijn aangegeven berekenen. We beginnen in het midden. Daar komen vijf even grote hoeken bij elkaar.

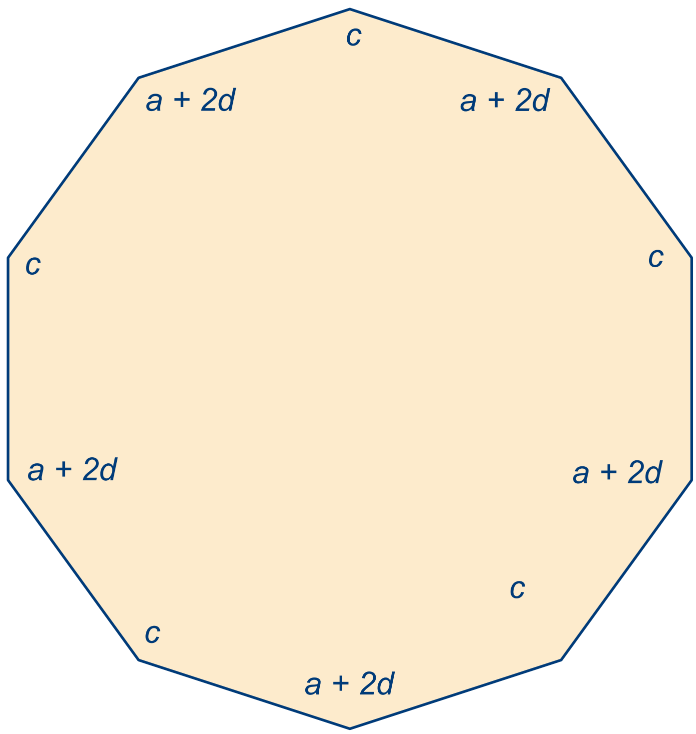
a Bereken eerst $\angle a$, dan $\angle b$.

b Bereken daarna $\angle c$ en ten slotte $\angle d$.

Aan de buitenkant van omtrek van tienhoek zitten afwisselend hoeken ter grootte van c en hoeken ter grootte van a+2d.

c Is de tienhoek een regelmatige tienhoek?

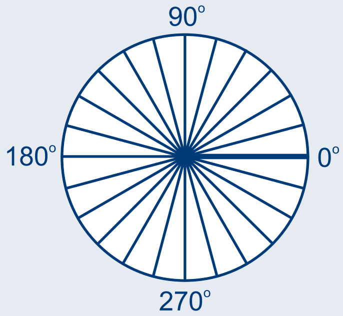




8.7 EINDPUNT

graden

Helemaal rond is 360°.



soorten hoeken

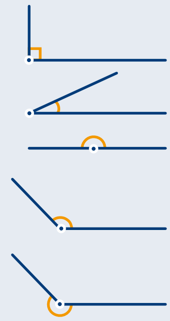
Een **rechte** hoek is 90°.

Een **scherpe** hoek is kleiner dan 90°.

Een **gestrekte** hoek is 180°.

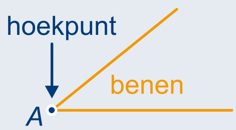
Een **stompe** hoek is groter dan 90° en kleiner dan 180°.

Een **inspringende** hoek is groter dan 180°.

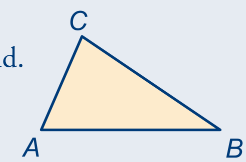


naamgeving en notatie

Hiernaast is **hoek *A*** getekend. Een hoek heeft een **hoekpunt** en twee **benen**.

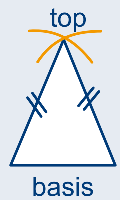


Hiernaast is driehoek *ABC* getekend.
AB is een zijde, $\angle A$ is een hoek.
$AB = 24$ mm, $\angle A = 66°$
$\angle A = \angle BAC = \angle CAB$



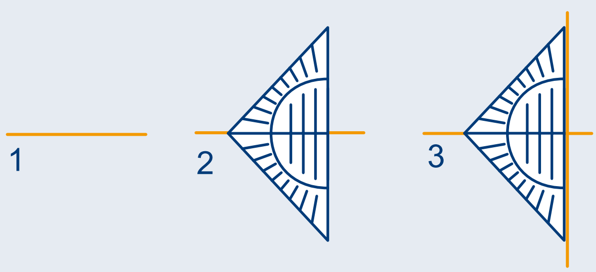
gelijkbenige driehoek

Een **gelijkbenige** driehoek heeft twee even lange benen. De derde zijde is de **basis**; daartegenover ligt de **top**.



Stelling
In een gelijkbenige driehoek zijn de hoeken tegenover de twee even lange zijden even groot. En omgekeerd: als twee hoeken in een driehoek gelijk zijn, is de driehoek gelijkbenig.

zó teken je een rechte hoek



soorten driehoeken

Een **gelijkzijdige** driehoek heeft drie even lange zijden.

Een **scherphoekige** driehoek heeft drie scherpe hoeken.

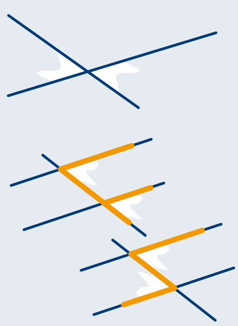
Een **rechthoekige** driehoek heeft één rechte hoek.

Een **stomphoekige** driehoek heeft één stompe hoek.

gelijke hoeken

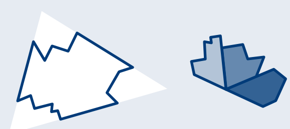
Overstaande hoeken zijn even groot.

Bij twee evenwijdige lijnen die gesneden worden door een derde lijn zijn **F-hoeken** even groot en **Z-hoeken** even groot.

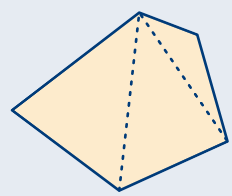


hoekensom

De hoekensom van een driehoek is 180°.

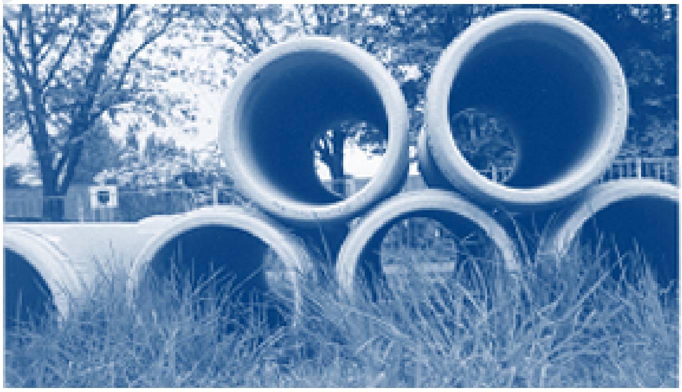


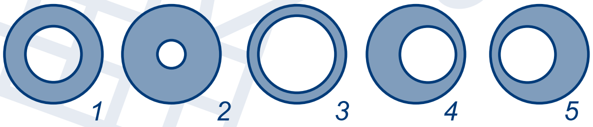
De hoekensom van een *n*-hoek is $(n-2) \cdot 180°$.



8.8 EXTRA OPGAVEN

1 We staan precies recht voor een rioolbuis. We zien dan plaatje 1 hieronder. De binnenkant van de buis is donker en daarachter zien we de lucht: dat is de lichte cirkel. Hieronder staan nog vier plaatjes.





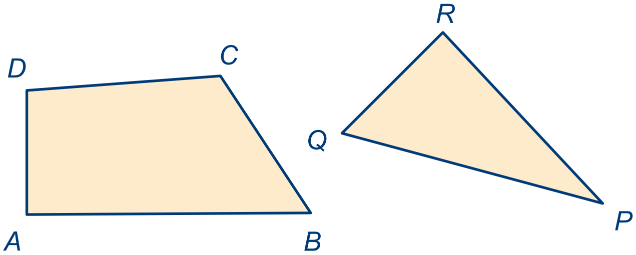
a Welk plaatje krijgen we te zien als we ons naar de buis toe bewegen, 2 of 3?
b Welk plaatje krijgen we te zien als we ons naar rechts bewegen, 4 of 5?

Stel dat de rioolbuis 5 meter lang is en een diameter heeft van 1 meter. Jouw oog bevindt zich 2 meter voor het midden van de buis. Hiernaast staat een schets van een zijaanzicht van de situatie.

c Maak een nauwkeurige tekening op schaal.

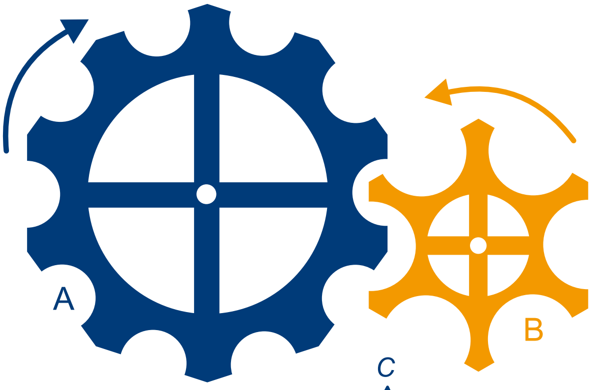
De hoek waaronder je de voorkant ziet is in de schets met een boogje aangegeven.
d Meet die hoek.
e Meet ook de hoek waaronder je de achterkant van de rioolbuis ziet.

2 **a** Meet de hoeken van de driehoek en de vierhoek.
b Hoe kun je controleren of je redelijk goed gemeten hebt? Doe dat.

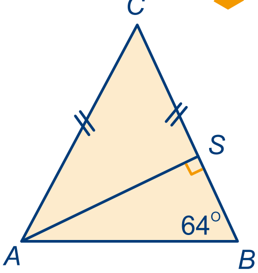


Van een rechthoekige driehoek is een hoek 32°. De langste zijde is 5 cm.
c Hoe groot zijn de andere hoeken?
d Teken de driehoek.

3 **a** Als tandwiel A één tandje verder draait, over hoeveel graden draait A dan?
b Als tandwiel B één tandje verder draait, over hoeveel graden draait B dan?
c Als tandwiel A precies één keer ronddraait, over hoeveel graden draait tandwiel B dan?
d Als tandwiel B precies één keer ronddraait, over hoeveel graden draait A dan?



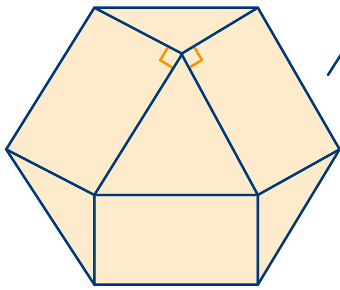
4 *ABC* is een gelijkbenige driehoek met $AC = BC$. $\angle B = 64°$, $\angle ASC = 90°$.
a Bereken $\angle ACB$, $\angle SAB$ en $\angle SAC$.

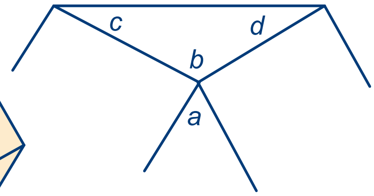


Driehoek *PQR* is gelijkbenig, maar we weten niet welke twee zijden even lang zijn. We weten wel dat $\angle P = 70°$ en $PQ = 3$ cm.
b Teken driehoek *PQR*. Er zijn drie mogelijkheden.

5 In het midden van de figuur hiernaast zie je een gelijkzijdige driehoek. Verder bestaat de figuur uit rechthoeken en gelijkbenige driehoeken.

a Bereken hoe groot de hoeken *a*, *b*, *c* en *d* zijn.





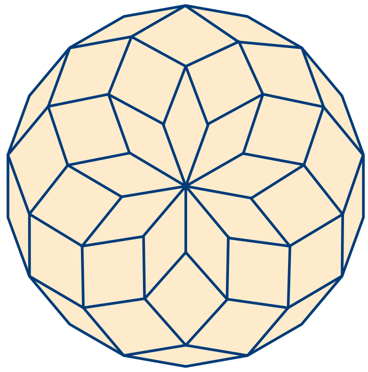
De hele figuur is een zeshoek.

b Hoe groot is elk van de hoeken van de zeshoek?

c Teken een regelmatige zeshoek met zijden van 2 cm.

d Verdeel de zeshoek in een regelmatige driehoek, drie rechthoeken en drie gelijkbenige driehoeken, zoals in de figuur hiernaast.
Meet hoe lang de zijden van de regelmatige driehoek zijn.

6 De figuur hiernaast bestaat uit vier verschillende soorten ruiten.
Bereken de hoeken van elk van de ruiten.
Schrijf ook je berekeningen op.

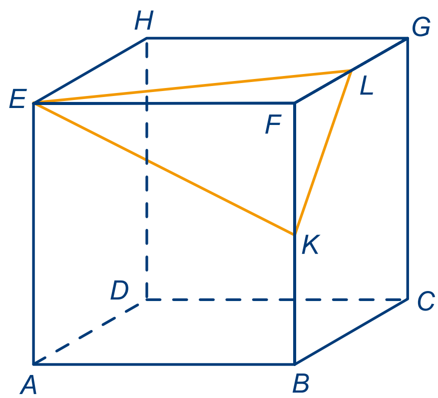


7 Van een kubus met ribbe 3 cm wordt een hoek afgezaagd. Er wordt gezaagd door *K* (het midden van ribbe *BF*), *L* (het midden van ribbe *FG*) en door hoekpunt *E*.

a Maak een plaatje waarin je de lengtes van *EK, KL* en van *EL* nauwkeurig kunt meten.

b Teken driehoek *EKL* op ware grootte.

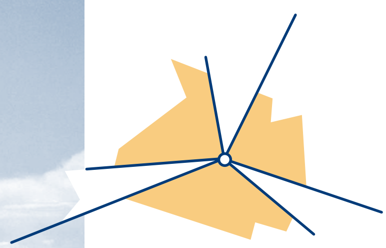
c Meet $\angle EKL$, $\angle ELK$ en $\angle LEK$.



8 In vuurtorens zit een lampenstelsel dat ronddraait. Elke vuurtoren geeft met zijn licht een eigen signaal. Hiernaast zie je het bovenaanzicht van het licht van een vuurtoren. Het signaal bestaat uit twee korte en een lange flits. Bij de lange flits hoort de grootste ‘witte’ hoek, die is 36°. Het lampenstelsel van deze vuurtoren draait in 30 seconden één keer rond.

a Hoeveel seconden is de lange flits vanuit een punt op zee zichtbaar? Schrijf je berekening op.

b Meet de hoek die hoort bij de tijd tussen twee korte flitsen. Hoe lang is de tijdsduur tussen twee korte flitsen? Schrijf je berekening op.



9 Wim zit in de trein. Hij ziet de zon in het midden van de ruit. Ineens ziet hij de zon van plaats veranderen. Daarna ziet hij de zon weer teruggaan naar zijn oude plaats.
Wat is er gebeurd? Leg dit uit met een schetsje van (het bovenaanzicht van) de spoorlijn.

10 Heb je in een attractiepark wel eens in een achtbaan gezeten? Dan heb je ook een looping gemaakt, helemaal over de kop. In deze opgave gaat het ook over "ronddraaien": op een klaverblad, met een euro munt en met een kermisattractie.

Ad de Vrij rijdt op de snelweg vanuit het westen. Hij moet naar het noorden. Dat gaat niet zomaar; daarvoor moet hij op het klaverblad $\frac{3}{4}$ ronddraaien.

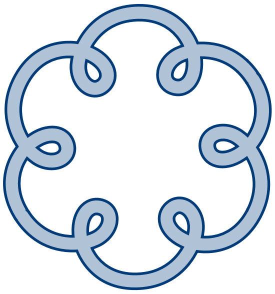
a Geef op je werkblad aan hoe Ad de Vrij rijdt.
Hoe groot is de draaihoek waarover Ad draait?

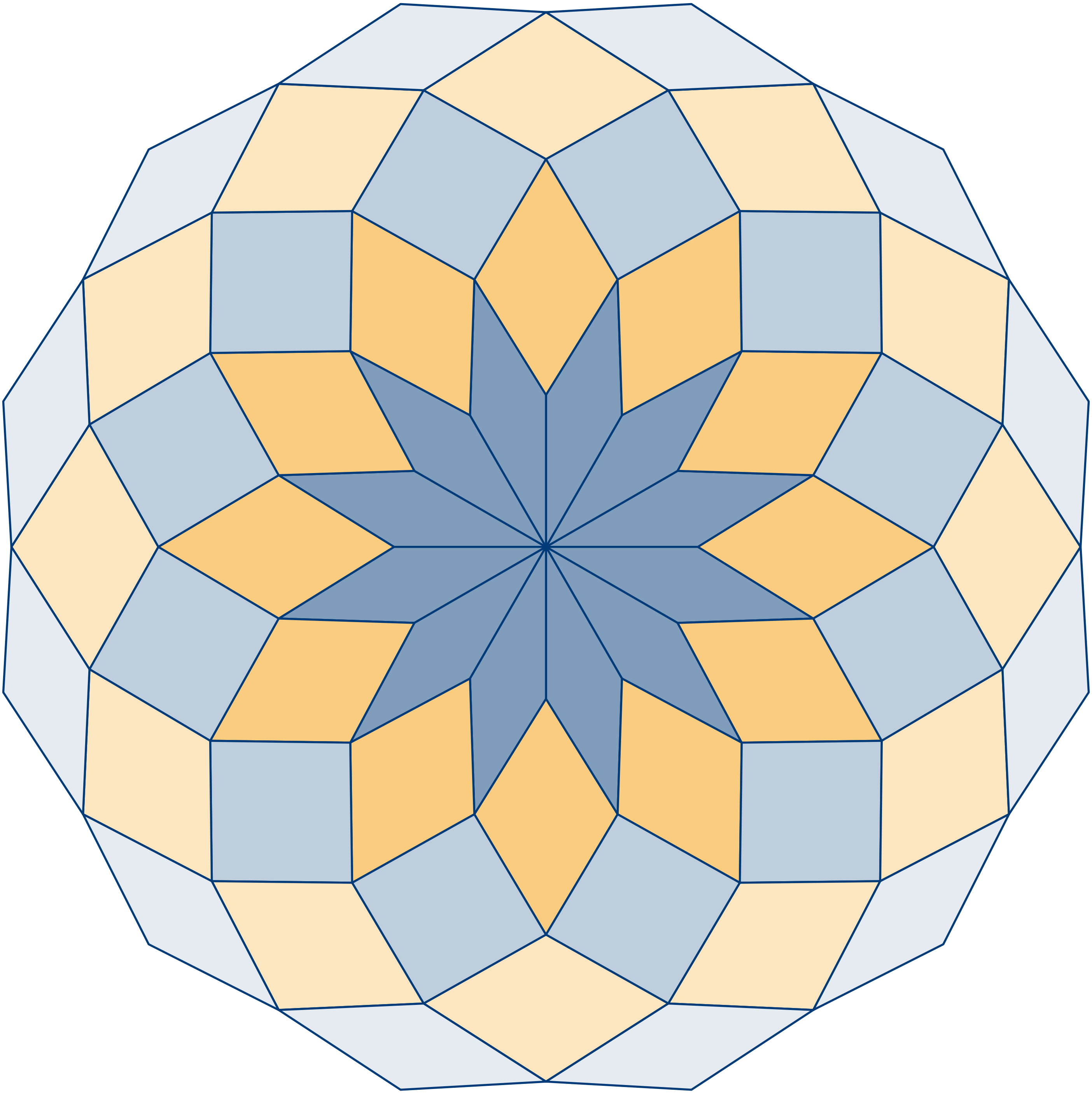
Twee munten van 1 euro liggen naast elkaar op tafel. De linker drukken we stevig op het tafelblad, de rechter draaien we - zonder slippen - om de andere; totdat hij weer op zijn oorspronkelijke plaats terug is.

b Hoeveel keer is de draaiende munt dan om zijn as gedraaid?

Anneke rijdt met een speelgoedautootje over de route hiernaast. Het is een baan, die een karretje van de calypso wel maakt. Ze begint op een zekere plek. De baan staat ook in je werkschrift.

c Hoe vaak is het autootje rondgedraaid om zijn as als het weer op die plek terug is?





Zie de applet 8.11 - *Mozaïek*.