3. FORMULES

3.0 INTRO

Einstein ontdekte de beroemde formule $E = m \cdot c^2$ (in dit hoofdstuk leer je wat de $\cdot$ en c^2 betekenen). Dankzij die formule kunnen we kernenergie opwekken en - helaas - atoombommen maken. In hoofdstuk 1 ben je zelf al met formules bezig geweest. Zo heb je gezien dat het aantal grensvlakken van een n-zijdige prisma gelijk is aan $n + 2$.

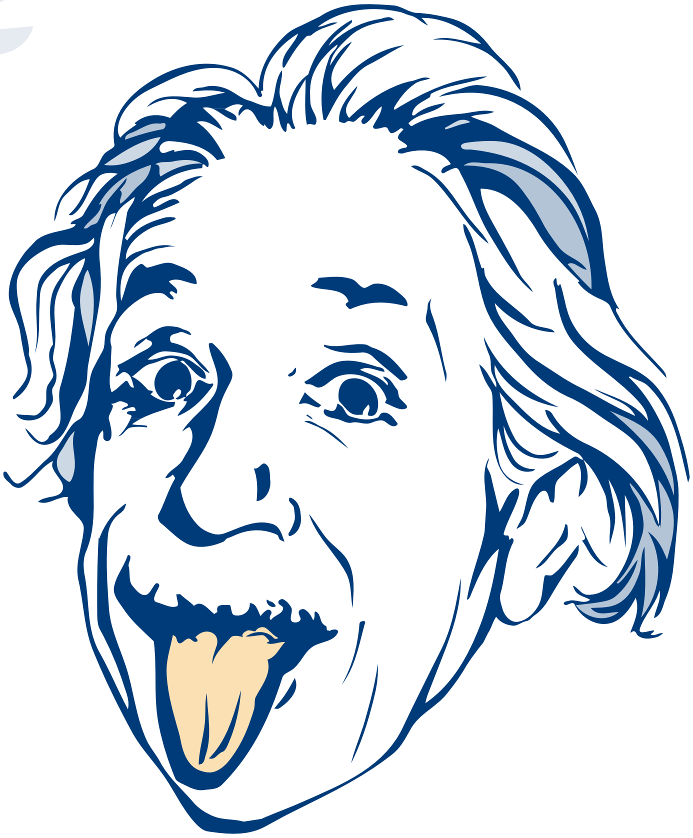
In de bovenstaande voorbeelden legden Einstein en jijzelf verbanden tussen grootheden. We spreken over een verband als de ene grootheid afhangt van de andere. Mensen zijn gek op het leggen van verbanden. We doen dat zelfs onbewust. Ook jij legt verbanden. Lees maar eens de volgende voorbeelden.

- Hoe groter het grasveld, des te langer duurt het maaien. De grootheid maaitijd is afhankelijk van de grootheid grootte van het grasveld.
- Hoe langer het telefoongesprek, des te hoger zijn de kosten. De grootheid kosten is afhankelijk van de grootheid beltijd.
- Hoe meer hoeken in een veelhoek, des te meer zijden. De grootheid aantal zijden is afhankelijk van de grootheid aantal hoeken.

1 Noem zelf twee voorbeelden van een verband tussen grootheden. Zeg wat de grootheden zijn.

Maar wat zijn formules dan precies? Een formule beschrijft heel precies het verband tussen bepaalde grootheden. Je zou dat met hele zinnen kunnen doen, maar dat is langdradig en geeft vaak misverstanden. In plaats daarvan worden in formules voor de grootheden letters gebruikt. Zo stelt in de formule van Einstein de letter E de grootheid energie voor, m de massa en c de snelheid van het licht. Aan het gebruik van formules moet je wennen. Voor buitenstaanders lijkt het wel een soort geheimschrift. In dit hoofdstuk ga je zelf formules maken en leer je de eerste regels waarmee je met formules kunt werken. Dit onderdeel van de wiskunde heet **algebra**.

2 Verzamel minstens twee formules. Zoek bijvoorbeeld eens op Internet of in een (wiskunde)boek. Misschien kent iemand uit jouw omgeving er eentje. Zet bij jouw formules waarvoor ze gebruikt worden en wat de letters betekenen.



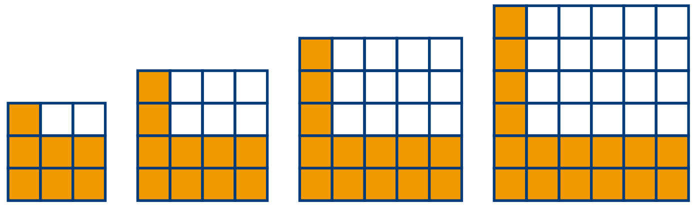
Albert Einstein (1879 - 1955)

3.1 PATRONEN EN FORMULES

Patronen beschrijven met formules

3 Hiernaast is een rij vierkante roosters getekend. Er zit regelmaat in de rij. De onderste twee rijen en de linker zijkant zijn gekleurd.

a Teken het eerstvolgende patroon.
b Neem de tabel over en vul hem in.



zijde vierkant	3	4	5	6	7
aantal gekleurde hokjes					

c Hoeveel gekleurde hokjes heeft het vierkant met zijde 20?

De leerlingen van klas 1a hebben opgave 3c op verschillende manieren opgelost.

Hans: $3 \times 20 - 2$
Minke: $20 \times 20 - 19 \times 18$
Stef: Er komen steeds 3 gekleurde hokjes bij. Bij zijde 7 heb je 19 gekleurde hokjes. Dus bij zijde 20 komen er 13 keer 3 gekleurde hokjes bij. Het antwoord is dan $19 + 3 \times 13 = 58$.
Irene: $2 \times 20 + 18$
Paul: Uit mijn tabel lees ik 58 af.
Ines: $3 \times 19 + 1$

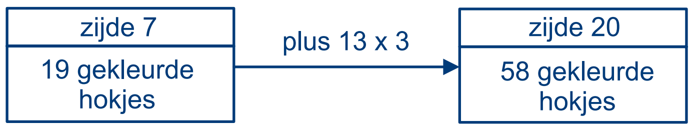
d Controleer of deze berekeningen goed zijn.
e Staat jouw berekening erbij?

Vaak kun je de manier waarop je iets berekend hebt, toelichten met een plaatje. Hiernaast staan plaatjes die horen bij de berekeningen van klas 1a.

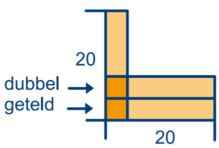
f Schrijf op welk plaatje bij welke leerling hoort.

zijde vierkant	7	8	9	...	19	20
aantal gekleurde hokjes	19	22	25	...	55	58

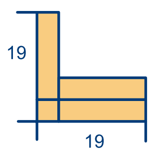
plaatje 1



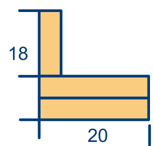
plaatje 2



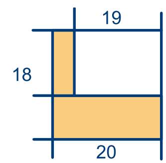
plaatje 3



plaatje 4



plaatje 5



plaatje 6

Dolf schrijft in zijn schrift:
het aantal gekleurde hokjes is $3 \times$ lengte zijde $- 2$.
Hij heeft nu een regel gevonden waarmee hij voor elk vierkant uit de rij het aantal gekleurde hokjes kan bepalen.

g Controleer of de regel van Dolf klopt.

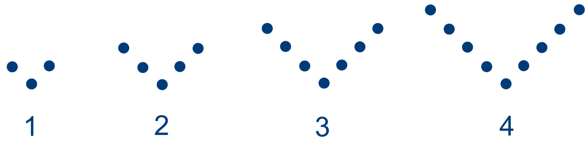
Een regel als aantal gekleurde hokjes $= 3 \times$ lengte zijde $- 2$ heet een formule. Een **formule** beschrijft heel precies het verband tussen grootheden (hier het aantal gekleurde hokjes en de lengte van de zijde). De woorden in een formule worden vaak vervangen door letters. De formule wordt dan:

$$h = 3 \times z - 2$$

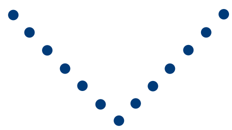
Als je een formule zo opschrijft, moet je er wel bijzetten wat de letters betekenen:
h is het aantal gekleurde hokjes
z is de lengte van de zijde

Omdat de waarde van de letters kan variëren, noemen we deze **variabelen**.

4 Met behulp van stippen kun je patronen maken. In het onderstaande plaatje zie je de eerste vier V-patronen. Elk patroon heeft een nummer.



Hieronder zie je een V-patroon met 13 stippen.



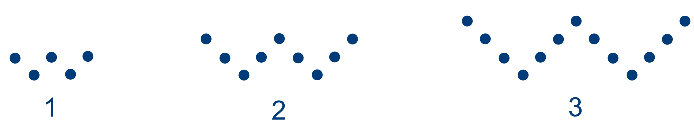
a Welk nummer hoort bij dit patroon?
b Neem de tabel over en vul hem in.

nummer	1	2	3	4	5	6	7
aantal stippen	3						

c Hoeveel stippen heeft het V-patroon met nummer 25?
d Bestaat er een V-patroon met 45088 stippen? Geef uitleg.
e Kun je met alle stippen van twee V-patronen (ze hoeven niet hetzelfde nummer te hebben) een nieuw V-patroon maken? Geef uitleg.
f Bedenk een manier om bij een gegeven nummer het aantal stippen van het V-patroon te vinden.
g Geef jouw manier ook in formulevorm. Noem het nummer n en het aantal stippen in het V-patroon V.

Je kunt jouw formule controleren door enkele getallen in te vullen.
h Neem voor n de waarden 3, 4 en 5 en ga na of je fomule klopt.

5 Door wat stippen toe te voegen aan een V-patroon, krijg je een W-patroon. Hiernaast staan de eerste drie W-patronen.

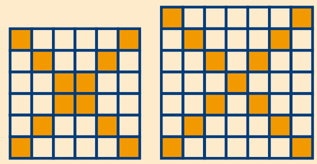


a Neem de tabel over en vul hem in.

nummer	1	2	3	4	5	6	7
aantal stippen	5						

b Hoeveel stippen heeft het W-patroon met nummer 25?
c Bedenk een formule voor het aantal stippen in het patroon met nummer n. Vergeet niet je formule te controleren.
d Noem het W-getal W en het V-getal V. Wat is het verband tussen een W-getal en een V-getal met nummer n? Is dit $W = 2 \times V$ of toch niet?

4 In een vierkant van n bij n hokjes worden de hokjes op de diagonalen gekleurd. Hieronder zie je dat voor $n = 6$ en $n = 7$.



a Zoek een formule voor het aantal gekleurde hokjes. Onderscheid twee gevallen.
b Zoek ook een formule voor het aantal witte hokjes. Onderscheid twee gevallen.

In een kubus van n bij n bij n blokjes worden de blokjes op de vier lichaamsdiagonalen gekleurd.
c Zoek een formule voor het aantal gekleurde blokjes. Onderscheid weer twee gevallen.

Afspraken over vermenigvuldigen

Voordat je verder kunt met het maken van formules, moeten we eerst een aantal afspraken maken.

Afspraak over het ×-teken
In formules zul je vaak de letter x gebruiken. Dat geeft natuurlijk verwarring met de × van vermenigvuldigen. Daarom schrijf je voortaan in plaats van de × voor vermenigvuldiging een punt. Dus $3 \times 5 = 15$ wordt nu $3 \cdot 5 = 15$. En $12 \times x$ wordt $12 \cdot x$.

6 **a** Schrijf op de juiste manier volgens de afspraak en bereken de uitkomst:
$15 \times 3 =$
$4 \times 2{,}5 =$
$12 \times 6 \times 2 =$

b Bereken:

$25 \cdot 4 =$	$4 \cdot 25 =$
$15 \cdot 6 =$	$6 \cdot 15 =$
$13 + 15 =$	$15 + 13 =$
$16 + 34 =$	$34 + 16 =$
$4 : 2 =$	$2 : 4 =$
$40 : 5 =$	$5 : 40 =$
$17 - 7 =$	
$38 - 16 =$	

c Kun je ook $7 - 17$ en $16 - 38$ berekenen?

d Welke van de volgende beweringen zijn juist (a en b stellen getallen voor)?

$a \cdot b = b \cdot a$	$a + b = b + a$
$a : b = b : a$	$a - b = b - a$

Afspraak over de volgorde
Als x een getal is dan is $x \cdot 3$ hetzelfde getal als $3 \cdot x$. Voortaan schrijf je $x \cdot 3$ altijd als $3 \cdot x$. Net zo schrijf je $a \cdot 5$ als $5 \cdot a$. Dus bij het product van een getal en een variabele zet je altijd het getal voorop.

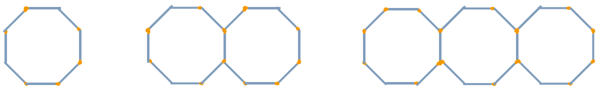
e Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Denk aan de afspraak over volgorde. De eerste som is als voorbeeld al gemaakt.
$3 \cdot 5 \cdot a = 15 \cdot a$
$a \cdot 3 \cdot 4 =$
$3 \cdot a \cdot 6 =$

Voor de optelling maken we een dergelijke afspraak niet; of je nu $8 + a$ opschrijft of $a + 8$, dat maakt niet uit.

f Schrijf zo eenvoudig mogelijk; de eerste som is al gemaakt.
$a + 3 + 5 = a + 8$
$7 + a + 3 =$
$a + 9 + 5 =$

Oefenen met formules maken

7 Met lucifers kun je goed patronen leggen. Bekijk eens het volgende patroon.

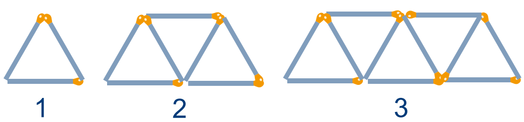


a Neem de tabel over en vul hem in.

patroonnummer	1	2	3	4	5	6
aantal lucifers	8					

b Uit hoeveel lucifers bestaat het patroon met nummer 25?
c Bestaat er een patroon met 708 lucifers? Geef uitleg.
d Bedenk een formule waarmee je het aantal lucifers kunt berekenen als je het nummer van het patroon kent. Vergeet niet je formule te controleren.

8 Hieronder zijn de lucifers in een ander patroon gelegd.

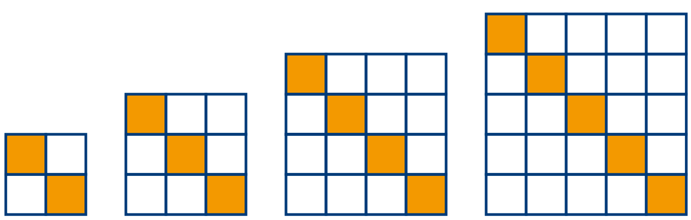


a Bedenk zelf een manier hoe je het aantal lucifers kunt berekenen zonder de patronen te hoeven tekenen en vul hiermee de tabel in.

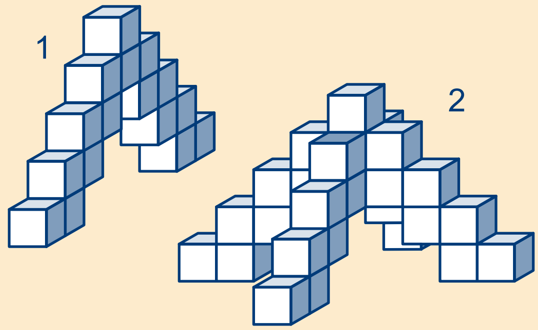
patroonnummer	4	7	10	30	100
aantal lucifers					

b Bestaat er een patroon met 40996 lucifers? Geef uitleg.
c Bedenk een formule waarmee je het aantal lucifers kunt berekenen als je het nummer van het patroon kent. Vergeet niet je formule te controleren.

9 Hiernaast zijn vierkante roosters getekend. De hokjes op de diagonaal zijn steeds gekleurd.
a Bedenk een formule waarmee je het aantal gekleurde hokjes kunt berekenen als je de lengte van de zijde kent. Vergeet niet je formule te controleren.
b Bedenk een formule waarmee je het aantal witte hokjes kunt berekenen als je de lengte van de zijde kent. Controleer je antwoord.



7 In deze opdracht bekijken we twee typen trappen, die zijn opgebouwd uit kubusjes. Hieronder staan de trappen van hoogte 5. Trap 1 kun je van twee kanten bestijgen, trap 2 van vier kanten. De trappen zijn “hol”: de treden zijn twee blokken dik.



a Uit hoeveel kubusjes is elk van deze twee trappen opgebouwd?

We maken nog twee van zulke trappen, maar dan groter: 7 kubusjes hoog.
b Uit hoeveel kubusjes zijn de twee grotere trappen opgebouwd?
c Geef bij elk type een formule voor het aantal kubusjes van de trap van hoogte *n*.

3.2 KWADRATEN

Wat zijn kwadraten?

10 a Kleur op ruitjespapier zes vierkanten van verschillende grootte.
b Schrijf in elk van de vierkanten uit hoeveel hokjes dat vierkant bestaat.
c Schrijf de aantallen hokjes nog een keer op van klein naar groot.

De getallen die je zojuist hebt opgeschreven, noemen we kwadraten.
d Kun je een vierkant maken dat uit 121 hokjes bestaat? Zo ja, hoeveel hokjes breed en hoog is dat vierkant? Is 121 een kwadraat?
e Kun je een vierkant maken dat uit 55 hokjes bestaat? Is 55 een kwadraat?
f Is 144 een kwadraat? Waarom?

> 81 is een **kwadraat**, want $81 = 9 \cdot 9$.
> Je kunt ook zeggen: 81 is het kwadraat van 9.
>
> Je kunt $9 \cdot 9$ ook schrijven als 9^2.
> Spreek uit: negen-kwadraat.
>
> Je kunt $n \cdot n$ ook schrijven als n^2.
> Spreek uit: n-kwadraat.

g Neem over en vul in.
.... is het kwadraat van 7
169 is een kwadraat, want 169 = ... ·....
225 is het kwadraat van ....

$20^2 = 20 \cdot 20 =$
$21^2 =$ .... =
$16^2 =$ .... =
$25^2 =$ .... =

h Bereken de kwadraten van de getallen van 1 tot en met 20. Schrijf ze in een tabel zoals hiernaast.
i Leer de kwadraten van de getallen 1 tot en met 20 uit je hoofd.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4								
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2										

Anne wil uitrekenen van welk getal 529 het kwadraat is. Ze redeneert als volgt:
$20^2 = 400$, dat is te klein; $25^2 = 625$, dat is te groot.
Nu moet ik nog 21, 22, 23 en 24 berekenen.
j Waarom hoeft Anne 22 en 24 niet te proberen?
k Neem over en vul in.

529 = ... ²　　　1600 = ... ²
841 = ... ²　　　1681 = ... ²

als $n = 15$, dan $n^2 =$ ......
als $n = 30$, dan $n^2 =$ ......
als $n =$ ...... , dan $n^2 = 289$
als $n =$ ...... , dan $n^2 = 10000$

> **Wetenswaardigheid**
> Het aantal hokjes van een vierkant in een rooster is een kwadraat. Daarom spreek je ook wel van “vierkantsgetallen”. Hoezeer “kwadraat” en “vierkant” bij elkaar horen, blijkt uit andere talen: het Duits, het Frans en het Engels gebruiken hetzelfde woord voor “vierkant” als voor “kwadraat” namelijk Quadrat, Carré en Square.

Kwadraten in formules

11 a Hoeveel cm is de omtrek van een vierkant met zijde 5 cm?
b Neem de tabel over en vul hem in.

Zijde vierkant (in cm)	5	8	15	25	99
Omtrek (in cm)					

c Hoe kun je de omtrek van een vierkant berekenen als je de zijde kent?
d Geef een formule waarmee je de omtrek kunt berekenen als je de zijde kent. Gebruik voor de zijde de letter z.
e Neem de tabel over en vul hem in.

Zijde vierkant (in cm)	5	8	15	25	99
Oppervlakte (in cm^2)					

f Met welke formule kun je de oppervlakte berekenen als je de zijde kent? Gebruik de letter z voor de zijde.

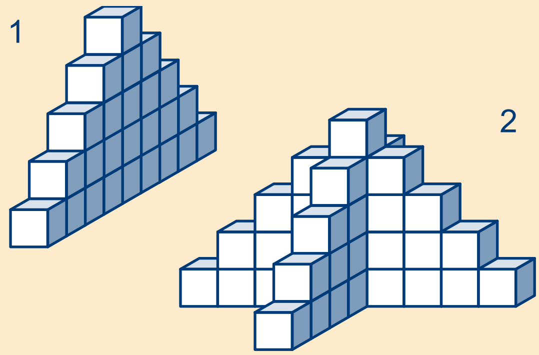
Van een vierkant is de omtrek 144 cm.
g Bereken de oppervlakte. Schrijf op hoe je aan je antwoord gekomen bent.

Van een ander vierkant is de oppervlakte 144 cm^2.
h Bereken de omtrek van dat vierkant. Schrijf op hoe je aan je antwoord gekomen bent.

Paul beweert:
Als je de lengte van de zijden van een vierkant verdubbelt, dan worden de omtrek en de oppervlakte van het vierkant ook dubbel zo groot.
i Wat is er waar van deze bewering?

12 De gemeente legt een speeltuintje aan. Onder de schommels wordt met rubberen tegels een plateau aangelegd. Er zijn 650 vierkante tegels beschikbaar. De afmetingen van de tegels zijn 30 bij 30 cm. Met de tegels wordt onder de schommel een zo groot mogelijk vierkant plateau aangelegd. Wat worden de afmetingen van het plateau?

11 We bekijken twee typen trappen, die zijn opgebouwd uit kubusjes. Hieronder staan de trappen van hoogte 5. Trap 1 kun je van twee kanten bestijgen, trap 2 van vier kanten.



a Uit hoeveel kubusjes is elk van deze twee trappen opgebouwd?

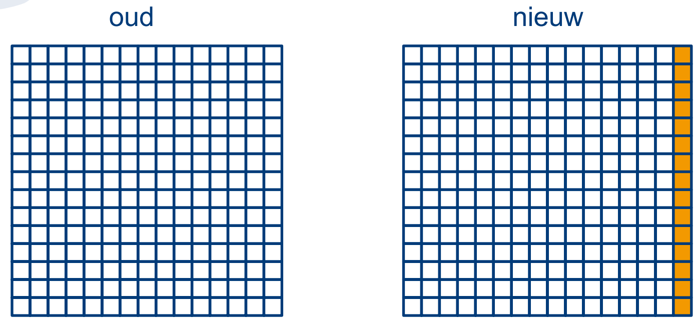
We maken nog twee van zulke trappen, maar dan groter: 7 kubusjes hoog.
b Uit hoeveel kubusjes zijn de twee grotere trappen opgebouwd?
c Geef bij elk type een formule voor het aantal kubusjes van de trap van hoogte n.

3.3 FORMULES EN GELIJKHEDEN

Opstellen van gelijkheden

13 Hiernaast is het terras van de heer Pieters getekend. Het telt 15 bij 15 tegels.
De heer Pieters maakt zijn terras breder: hij legt er aan de rechterkant een rij tegels bij.

a Hoeveel tegels telt zijn nieuwe terras?

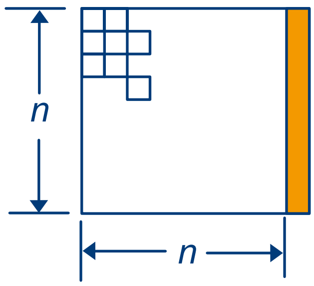


Anne en Vinja hebben elk op hun eigen manier het aantal tegels van het nieuwe terras van de heer Pieters uitgerekend.

b Lees de redeneringen van Anne en Vinja goed en vul op de lege plekken de juiste getallen in.

> **Anne**
> De lengte van het nieuwe terras is .... tegels.
> De breedte van het nieuwe terras is .... tegels.
> Het nieuwe terras heeft dus .... · .... = ... tegels.

> **Vinja**
> Het oude terras had .... tegels.
> Er komen .... tegels bij.
> Het nieuwe terras heeft dus .... + ... = ... tegels.



De heer Klaassen heeft ook een vierkant terras. We weten niet hoe breed het terras is. Het aantal tegels dat op één rij ligt noemen we n. Ook de heer Klaassen maakt z'n terras breder. Hij legt er aan de rechterkant een rij tegels bij.
We gaan op de manier van Anne en Vinja berekenen hoeveel tegels het nieuwe terras telt.

c Vul de lege plekken in de redenering van Anne in. Gebruik steeds de letter n.

> **Anne**
> De lengte van het nieuwe terras is .... tegels.
> De breedte van het nieuwe terras is .... tegels.
> Het nieuwe terras heeft dus .... · .... tegels.

d Welke formule hoort bij de redenering van Anne?

Jonneke beweert dat de haakjes in $n \cdot (n+1)$ overbodig zijn en schrijft als formule $n \cdot n + 1$ op.

e Ga na of dit klopt.

f Vul de lege plekken in de redenering van Vinja op. Gebruik steeds de letter n.

> **Vinja**
> Het oude terras had .... tegels.
> Er komen .... tegels bij.
> Het nieuwe terras heeft dus .... + ... tegels.

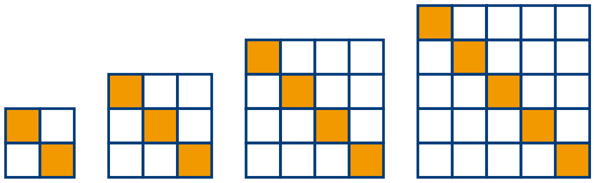
g Welke formule hoort bij de redenering van Vinja?

De formules van Anne en Vinja zien er verschillend uit. Toch zijn ze gelijk. Blijkbaar geldt $n \cdot (n+1) = n^2 + n$.

h Ga dit na voor $n = 5$ en $n = 10$.

De formules $n \cdot (n+1)$ en $n^2 + n$ zien er verschillend uit maar na het invullen van een willekeurig getal voor n geven ze dezelfde uitkomst. Zo krijg je de **gelijkheid**: $n \cdot (n+1) = n^2 + n$.

14 Bekijk nog eens de roosters van opgave **9**. De hokjes op de diagonaal zijn steeds gekleurd.



Anne en Vinja berekenen ieder op hun eigen manier het aantal witte hokjes bij het rooster van 100 bij 100 hokjes.

a Lees de redeneringen van Anne en Vinja goed en vul op de lege plekken de juiste getallen in.

> **Anne**
> Het hele rooster bestaat uit .... hokjes.
> Van die hokjes zijn er .... gekleurd.
> Dus zijn er .... − .... = ... witte hokjes.

> **Vinja**
> Het rooster bestaat uit .... horizontale rijen.
> In elke rij zijn er .... hokjes wit.
> Dus in totaal zijn er .... · .... = ... witte hokjes.

b Welke redenering heb jij bij opgave **9** gebruikt om het aantal witte hokjes te berekenen?

We bekijken nu een rooster van n bij n hokjes. We berekenen op twee manieren het aantal witte hokjes.

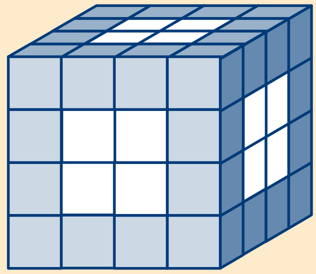
c Vul de lege plekken in de onderstaande redeneringen op (gebruik de letter n).

> **Anne**
> Het hele rooster bestaat uit .... hokjes.
> Van die hokjes zijn er .... gekleurd.
> Dus zijn er .... − .... witte hokjes.

> **Vinja**
> Het rooster bestaat uit .... horizontale rijen.
> In elke rij zijn er .... hokjes wit.
> Dus in totaal zijn er .... · .... witte hokjes.

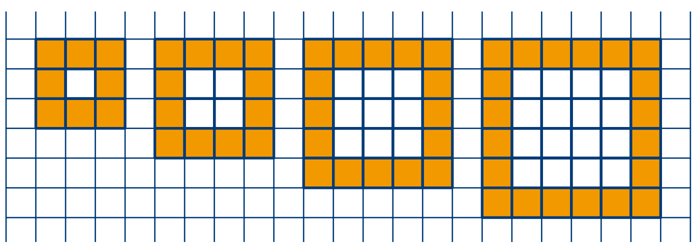
d Welke gelijkheid heb je nu gevonden?

14 Hieronder zie je een grote kubus met zijde 4 die is opgebouwd uit blokjes met zijde 1. Gekleurd worden de blokjes aan de randen van de grote kubus.



a Hoeveel gekleurde blokjes telt de kubus met zijde 4?
b Bereken op twee manieren het aantal gekleurde blokjes in een kubus met zijde 21.
c Bedenk formules bij de twee manieren die je hebt gebruikt om het aantal gekleurde blokjes te berekenen. Noem de zijde van de kubus n.
d Welke gelijkheid heb je nu gevonden?

15 In het rooster hiernaast is de letter O in allerlei groottes gekleurd. De breedte van de letters varieert van 3 tot 6.



a Hoeveel gekleurde hokjes telt elk van de O's?
b Bereken op twee manieren het aantal gekleurde hokjes bij een breedte van 21.
c Bedenk formules bij de twee manieren die je hebt gebruikt om het aantal gekleurde hokjes te berekenen. Noem de breedte van de letter b.
d Welke gelijkheid heb je nu gevonden?

3.4 DRIEHOEKSGETALLEN

Wat zijn driehoeksgetallen?

16 In de supermarkt is appelmoes in blik in de aanbieding. Jan, een creatieve medewerker van de supermarkt, stapelt midden in de winkel een driehoekstoren van blikken. Hiernaast zie je een voorbeeld van zo'n driehoekstoren bestaande uit 10 blikken. Er staan 4 blikken op de onderste rij.

a Hoeveel blikken heb je nodig om een driehoekstoren te bouwen met 6 blikken op de onderste rij?

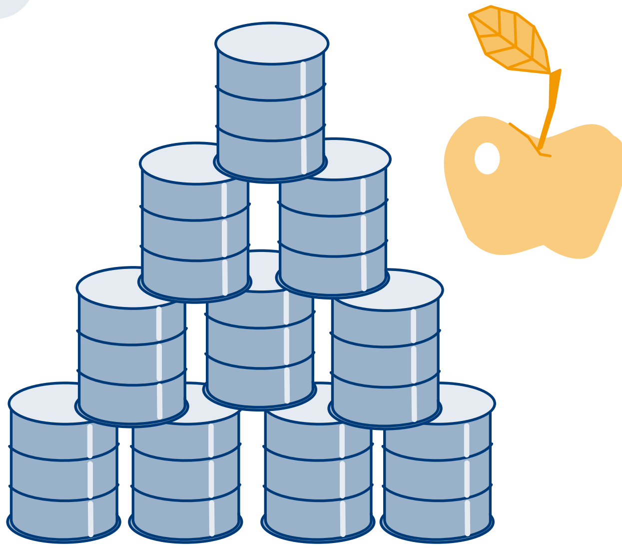
b Noem nog vier andere aantallen blikken waarmee je een driehoekstoren kunt bouwen.

Jan krijgt van zijn chef 50 blikken. Met die blikken bouwt hij een zo groot mogelijke driehoekstoren.

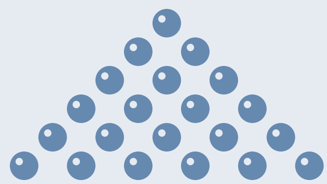
c Hoeveel lagen telt de toren? Hoeveel blikken houdt Jan over?

d Hoeveel blikken zijn er op de onderste rij als de toren 10 blikken hoog is?

e Hoeveel blikken telt de toren dan in totaal?



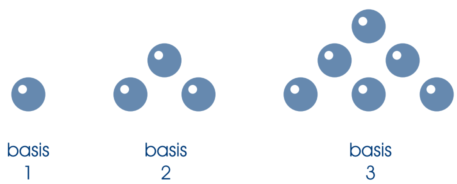
Getallen die je door een driehoekig patroon kunt voorstellen worden **driehoeksgetallen** genoemd. Je kunt er een stippenplaatje bij maken. Het aantal stippen op de onderste rij heet de **basis** van het driehoeksgetal. Hiernaast staat een stippenplaatje van het driehoeksgetal met basis 6.



17 a Teken een stippenplaatje van de driehoeksgetallen met basis 4 en basis 5.

b Neem de tabel over en vul de eerste tien driehoeksgetallen in.

Basis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Driehoeksgetal										



c Welk getal moet je bij het driehoeksgetal met basis 9 optellen om het driehoeksgetal met basis 10 te krijgen?

Het driehoeksgetal met basis 21 is 231.

d Wat is dan het driehoeksgetal met basis 22?

e En wat is het driehoeksgetal met basis 20?

18 Vinja is een ster met de computer. Ze heeft een programmaatje geschreven dat voor haar de eerste 1000 driehoeksgetallen heeft uitgerekend. Het driehoeksgetal met basis 1000 blijkt 500500 te zijn. Voor jou zal het geen probleem zijn om nu het driehoeksgetal met basis 1001 uit te rekenen.

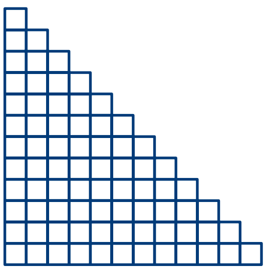
a Doe dat.

Als ik jou vraag om het driehoeksgetal met basis 300 uit te rekenen, zul je waarschijnlijk lang bezig zijn. Stel dat je er 100 euro mee kunt verdienen.

b Hoe zou je het dan doen?

Driehoeksgetallen berekenen

19 Hieronder is een trap getekend. De onderste rij van de trap bestaat uit 12 hokjes. De rij daarboven bestaat uit elf hokjes, de rij daarboven uit 10, enzovoorts. Het aantal hokjes van de trap is dus $1 + 2 + 3 + ... + 11 + 12$.



a Knip uit ruitjespapier twee keer deze trap.

Je kunt de twee trappen zo tegen elkaar schuiven dat er een rechthoek ontstaat.

b Plak die rechthoek in je schrift.

c Hoeveel hokjes hoog is de rechthoek? En hoeveel breed? Uit hoeveel hokjes bestaat de rechthoek?

De rechthoek bestaat uit twee trappen van 12 breed.

d Hoeveel hokjes telt de trap van 12 breed?

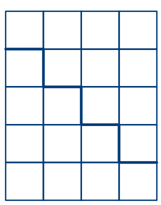
Het driehoeksgetal met basis 12 kun je dus op twee manieren berekenen:

$1 + 2 + 3 + ... + 11 + 12 = 78$

$13 \cdot 12 : 2 = 78$

Dus: $1 + 2 + 3 + ... + 11 + 12 = 13 \cdot 12 : 2$

Hieronder zie je twee trappen van 4 breed die samen een rechthoek vormen. De breedte van de rechthoek is 4 hokjes.



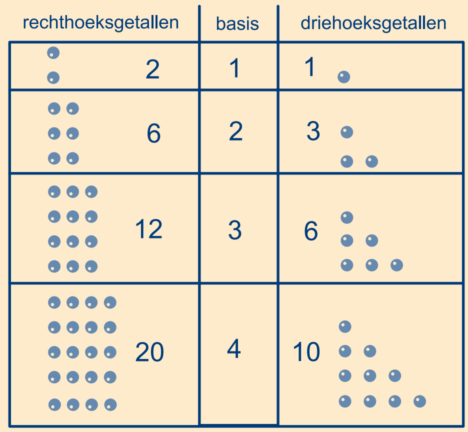
e Hoeveel hokjes is de rechthoek hoog? Hoeveel hokjes telt de rechthoek dus?

f Hoeveel hokjes telt de trap van 4 breed?

g Neem de tabel over en vul hem in.

Breedte van de trap	4	5	12	100
Hoogte van de rechthoek				
Aantal hokjes van de rechthoek				
Aantal hokjes van de trap				

19 In de figuur hieronder staan de eerste vier rechthoeksgetallen en de eerste vier driehoeksgetallen met bijbehorende stippelpatronen.



a Bedenk een formule waarmee je het rechthoeksgetal met basis n kunt berekenen.

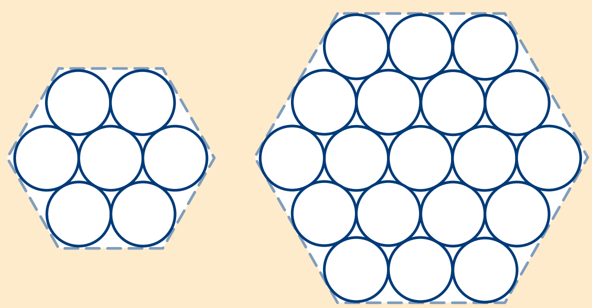
Vergelijk de rechthoeksgetallen en de driehoeksgetallen met elkaar.

b Welke formule past bij het n-de driehoeksgetal (met basis n)?

c Wat valt je op als je twee opeenvolgende driehoeksgetallen bij elkaar optelt?

d Bereken met behulp van de formule voor de driehoeksgetallen de som van de eerste 300 getallen, dus: $1 + 2 + 3 + ... + 298 + 299 + 300 =$

20 In een fabriek worden ronde buizen met staaldraad gebundeld. De bundels zijn zeskantig. In het plaatje staan de bundels met “basis” 2 en met “basis” 3 (de staaldraad is gestippeld).



In de bundel met basis 2 zitten zes buizen aan de buitenkant; in de bundel met basis 3 zijn dat er twaalf.

a Hoeveel buizen zitten aan de buitenkant in de bundel met basis 4?

b Zoek een formule voor het aantal buizen dat aan de buitenkant zit in de bundel met basis n.

h Geef een formule waarmee je het aantal hokjes van de trap kunt berekenen als je de breedte van de trap kent. Gebruik voor de breedte van de trap de letter b.
i Bereken met behulp van de formule het aantal hokjes van een trap die 300 hokjes breed is.
j Bereken de uitkomst:
$1 + 2 + 3 + ... + 299 + 300 =$
k Bereken de uitkomst (in je antwoord komt de letter n voor):
$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n =$

Carl Friedrich Gauss (één van de grootste wiskundigen aller tijden) verbaasde op 9-jarige leeftijd zijn meester met een slimme methode om de getallen 1 tot en met 100 op te tellen. De meester had deze som opgegeven. Terwijl zijn klasgenoten moeizaam rekenden, zag Gauss de truc en schreef de uitkomst meteen op zijn lei. Wil je weten hoe hij dit deed? Bestudeer dan 'De truc van Gauss' op de site van De Wageningse Methode.

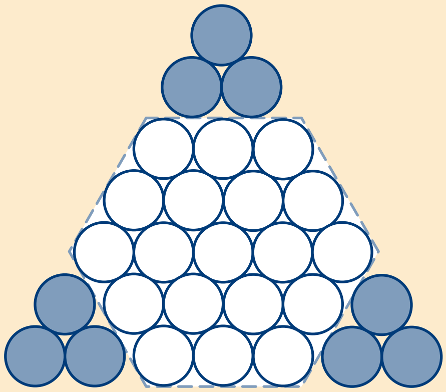
Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

20 Hiernaast zie je een driehoek bestaande uit witte en blauwe driehoekjes.
a Hoeveel driehoekjes zijn er blauw?
b En hoeveel driehoekjes zijn er wit?
c Hoeveel driehoekjes zijn er in totaal? Is het totaal aantal driehoekjes een kwadraat?

21 Ed onderhandelt in december met zijn baas over zijn loon voor het nieuwe jaar. Zijn baas stelt voor, hem 20 euro per week te geven. Ed doet een tegenvoorstel: de eerste week wil hij één euro, de tweede week twee euro, de derde week drie euro, enzovoorts. Tot het einde van het jaar. Zijn baas is erg verbaasd over dit voorstel van Ed en gaat meteen akkoord.
Is dat een verstandige keus van de baas van Ed?

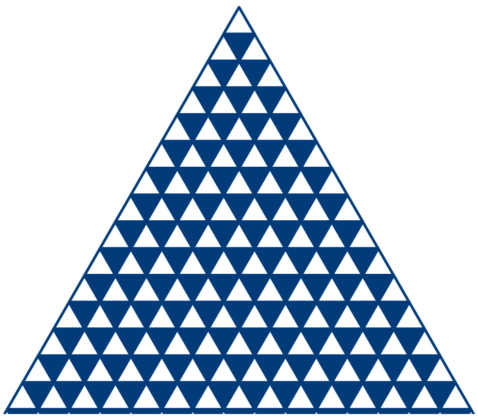
De bundel bij basis 5 telt in totaal 61 buizen.
c Vind met dit gegeven hoeveel buizen de bundel met basis 6 in totaal telt.

In de figuur hieronder zie je hoe je het zeshoeksgetal met basis 3 kunt krijgen door van het driehoeksgetal met basis 7 drie driehoeksgetallen met basis 2 af te trekken.



d Bereken op deze manier het zeshoeksgetal met basis 3.
e Bereken ook op deze manier het zeshoeksgetal met basis 4.

Om het zeshoeksgetal met basis n te krijgen, moet je van een groot driehoeksgetal drie keer een klein driehoeksgetal aftrekken.
f Wat is de basis van het grote driehoeksgetal?
g En van het kleine driehoeksgetal?
h Bereken nu het zeshoeksgetal met basis 10.



De oppervlakte met en zonder haakjes

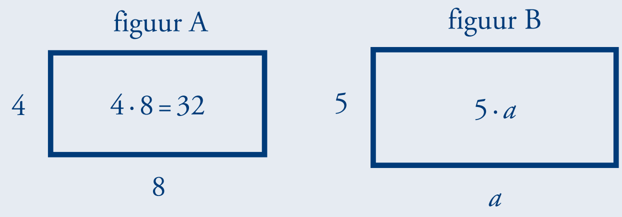
22 a Controleer de sommen hiernaast en zet het rijtje nog een beetje voort. Vreemd toch?

b Bedenk twee sommen die veel verder in de rij zouden voorkomen. Is de uitkomst nog steeds hetzelfde?

Hoe kun je dit nou verklaren? Dat leer je in deze paragraaf.

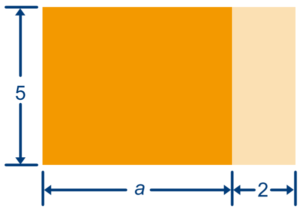
$1 \cdot 2 = 1 + 1$
$2 \cdot 3 = 4 + 2$
$3 \cdot 4 = 9 + 3$
$4 \cdot 5 = 16 + 4$
$5 \cdot 6 = 25 + 5$
....

De oppervlakte van figuur A kun je eenvoudig vinden. De rechthoek heeft een lengte van 4 en een breedte van 8. De oppervlakte krijg je door de lengte te vermenigvuldigen met de breedte, dus $4 \cdot 8 = 32$.
In figuur B is de lengte 5 en wordt de breedte gegeven door de variabele a. De oppervlakte van deze rechthoek is dan $5 \cdot a$.



23 Bepaal de onbekende oppervlaktes en zijden in de onderstaande rechthoeken.

24 Hiernaast staat een rechthoek die is verdeeld in een donker en een licht deel. De breedte van het donkere deel is niet bekend; die noemen we a. We gaan de oppervlakte van de rechthoek op twee manieren schrijven.



a Neem de onderstaande twee berekeningen over en vul ze in.

1e manier: lengte · breedte	
lengte rechthoek	....
breedte rechthoek	.... ×
oppervlakte rechthoek	....

2e manier: donkere deel + lichte deel	
oppervlakte donkere deel	....
oppervlakte lichte deel	.... +
oppervlakte rechthoek	....

Je hebt nu de oppervlakte op twee manieren berekend. De twee uitkomsten zijn dus gelijk.

b Welke gelijkheid vind je nu?

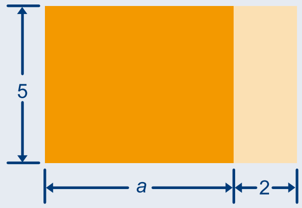
Je kunt de bovenstaande gelijkheid controleren door enkele getallen in te vullen.

c Controleer de gelijkheid voor $a = 7$ en voor $a = 100$.

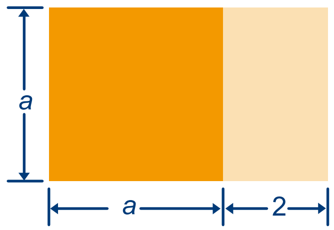
Je kunt de oppervlakte van de rechthoek hiernaast op twee manieren opschrijven:

met haakjes: $5 \cdot (a + 2)$
zonder haakjes: $5 \cdot a + 10$

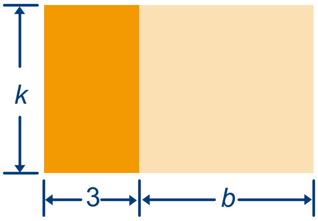
Deze uitdrukkingen zien er verschillend uit, maar na het invullen van een willekeurig getal voor a geven ze dezelfde uitkomst. Zo krijg je de gelijkheid $5 \cdot (a + 2) = 5 \cdot a + 10$.



25 Hiernaast staat weer een rechthoek getekend die verdeeld is in een donker en een licht stuk.
a Schrijf de oppervlakte van de rechthoek weer op twee manieren op.
b Welke gelijkheid vind je nu?
c Controleer de gelijkheid voor $a = 5$ en $a = 10$.



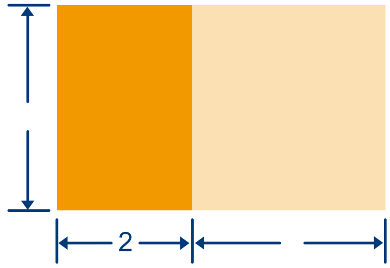
26 Welke gelijkheid vind je als je de oppervlakte van de rechthoek hiernaast op twee manieren opschrijft? Vergeet niet je antwoord te controleren.



Je hebt steeds de oppervlakte van rechthoeken op twee manieren geschreven: één keer met haakjes en één keer zonder haakjes. Daaruit kon je dan een gelijkheid opstellen. Zo heb je gezien dat:

$5 \cdot (a + 2) = 5 \cdot a + 10$
$a \cdot (a + 2) = a \cdot a + 2 \cdot a = a^2 + 2 \cdot a$
$k \cdot (3 + b) = 3 \cdot k + k \cdot b$

27 De rechthoek hiernaast is verdeeld in twee stukken. De oppervlakte is $3 \cdot (2 + a)$.
a Neem de rechthoek hiernaast over en vul de juiste maten in.
b Schrijf de oppervlakte van de rechthoek zonder haakjes.



Je hebt nu $3 \cdot (2 + a)$ zonder haakjes geschreven. Andersom kan ook: iets zonder haakjes met haakjes schrijven.

In de uitdrukking $3 \cdot a + 30$ staan geen haakjes. Het is de oppervlakte van een rechthoek die in twee stukken is verdeeld. De lengte van de rechthoek is 3.
c Neem de rechthoek hiernaast over en vul de ontbrekende maten in.
d Schrijf de oppervlakte van de rechthoek met haakjes.

3.5 DE DISTRIBUTIEWETTEN

Oefenen met en zonder haakjes

28 Schrijf zonder haakjes. Teken er zelf een geschikte rechthoek bij. Als je het zonder rechthoek te tekenen kunt, is dat prima.
$a \cdot (3 + b) =$
$(100 + x) \cdot 4 =$
$k \cdot (99 + k) =$

29 Drie van de uitdrukkingen links zijn gelijk aan drie van de uitdrukkingen rechts.

$5 \cdot (n + 10)$	$5 \cdot n + 50 \cdot n$
$(n + 50) \cdot n$	$0 \cdot n + 50$
$n \cdot (5 + 50)$	$n + 50 \cdot n$
$0 \cdot (n + 10)$	$5 \cdot n + 50$
$(n + 5) \cdot 50$	$50 \cdot n + 250$

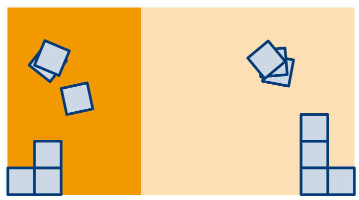
a Schrijf de drie gelijkheden op.
b Verander twee van de overgebleven uitdrukkingen zodat je nog twee gelijkheden kunt opschrijven.
c Verzin er zelf nog twee gelijkheden bij.

30 Neem de opgaven over en vul de lege plekken in.
$3 \cdot a + 12 = 3 \cdot a + 3 \cdot .... = 3 \cdot (.... + ...)$
$7 \cdot a + 35 = 7 \cdot a + 7 \cdot .... = 7 \cdot (.... + ...)$
$a \cdot b + 3 \cdot a = a \cdot b + a \cdot 3 = a \cdot (.... + ...)$

31 Een rechthoekig terras is geheel geplaveid met tegels van 1 bij 1 meter. Op het linker stuk liggen 35 tegels, op het rechterstuk liggen 56 tegels. Wat zijn de lengte en de breedte van het terras? Schrijf op hoe je aan je antwoord gekomen bent.

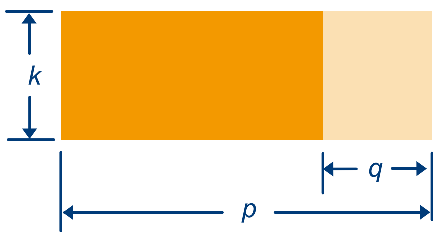
28 Paul en Hans krijgen dezelfde twee getallen. De getallen moeten gekwadrateerd en opgeteld worden. Paul kwadrateert de getallen eerst en telt ze dan bij elkaar op. Hans telt de getallen eerst op en kwadrateert het resultaat.
Leg uit waarom Hans altijd de grootste uitkomst krijgt. Teken geschikte vierkanten om dit te laten zien.

Noem de getallen a en b en maak tekeningen bij de bewerkingen $a^2 + b^2$ en $(a + b)^2$.



De distributiewetten

32 De rechthoek hiernaast bestaat uit twee stukken: een donker en een licht stuk. De lengte van de rechthoek is k en de totale breedte is p. De breedte van het lichte stuk is q.
We gaan de oppervlakte van het donkere stuk op twee manieren schrijven.



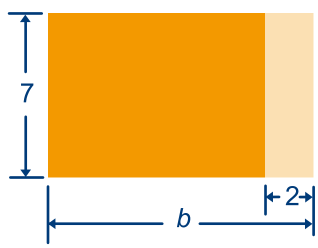
a Neem de onderstaande twee berekeningen over en vul ze in.

1^e^ manier: lengte · breedte	
lengte donkere deel	....
breedte donkere deel	.... ×
oppervlakte donkere deel	....

2^e^ manier: totale oppervlakte – lichte deel	
totale oppervlakte	....
oppervlakte lichte deel	.... –
oppervlakte donkere deel	....

b Welke gelijkheid kun je nu opschrijven?

33 De lengte van de rechthoek hiernaast is 7. De breedte van de hele rechthoek is b. Het lichte deel heeft breedte 2. De oppervlakte van het donkere deel is dan $7 \cdot (b - 2)$.
Schrijf de oppervlakte van het donkere deel ook zonder haakjes.



34 Schrijf zonder haakjes. Teken er een geschikte rechthoek bij als je dat handig vindt. Kun je het zonder rechthoek, dan is het ook prima.
$7 \cdot (b - 5) =$
$k \cdot (8 - p) =$

35 Neem de opgaven over en vul de lege plekken in.
$4 \cdot a - 40 = 4 \cdot a - 4 \cdot .... = 4 \cdot (.... - ....)$
$a^2 - 3 \cdot a = a \cdot a - a \cdot .... = a \cdot (.... - ....)$
$a \cdot b - 3 \cdot a = a \cdot b - a \cdot .... = ... \cdot (.... - ....)$

Je hebt nu twee gelijkheden leren kennen:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Deze gelijkheden heten **distributiewetten**. Distributie komt van het werkwoord distribueren en dat betekent verdelen.

36 In de bovenstaande gelijkheden stellen a, b en c getallen voor. In de tweede gelijkheid moet het getal c kleiner zijn dan het getal b.
a Leg uit waarom.

We gaan de gelijkheid $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ eens nader bekijken. Neem eens voor a het getal 4, voor b het getal 8 en voor c het getal 3.
b Welk getal staat er dan links van het =-teken? En rechts? Klopt dat?

Je hebt nu de gelijkheid $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ gecontroleerd voor $a = 4$, $b = 8$ en $c = 3$.
c Controleer de gelijkheid $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ voor $a = 10$, $b = 18$ en $c = 8$.

De distributiewetten zien er misschien wat moeilijk uit, maar eigenlijk pas je deze wetten al jaren (onbewust) toe. Bijvoorbeeld als je $13 \cdot 25 + 7 \cdot 25$ en $6 \cdot 101$ uit je hoofd uitrekent.

Voorbeelden
$13 \cdot 25 + 7 \cdot 25 = 25 \cdot (13 + 7) = 25 \cdot 20 = 500$
$6 \cdot 101 = 6 \cdot (100 + 1) = 6 \cdot 100 + 6 \cdot 1 = 600 + 6 = 606$

37 Bereken zo ook de volgende sommen. Bij de sommen waar de variabele a in voorkomt, blijft in je antwoord de variabele a staan. Schrijf een tussenstap op.
a $98 \cdot 25 + 2 \cdot 25 = ... \cdot (.... + ...) =$
$11 \cdot a + 89 \cdot a =$
$1 \cdot 29 + 2 \cdot 29 + 3 \cdot 29 + 4 \cdot 29 =$
$1 \cdot a + 2 \cdot a + 3 \cdot a + 4 \cdot a =$
b $39 \cdot 25 - 19 \cdot 25 = ... \cdot (.... - ....) =$
$51 \cdot 25 - 11 \cdot 25 =$
$765 \cdot a - 760 \cdot a =$
$123 \cdot a - 20 \cdot a - 3 \cdot a =$
c $17 \cdot 99 = ... \cdot (.... - ....) =$
$9 \cdot 1005 =$
$19 \cdot 998 =$

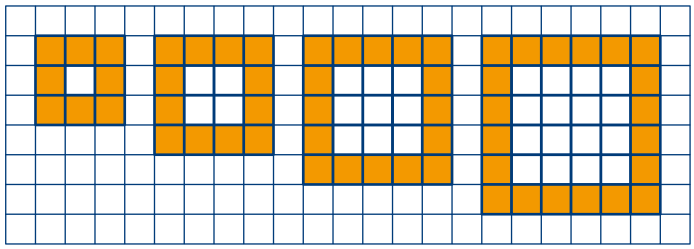
37 Bereken de volgende som op een handige manier.
$1 \cdot 50 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 50 + ... + 29 \cdot 50 + 30 \cdot 50 =$

Oefenen met de distributiewetten

38 Schrijf zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk.
$4 \cdot (a + 5) =$
$(p - 3) \cdot a =$
$3 \cdot (x + a - 2) =$
$(3 - x + 2) \cdot x =$

39 Neem de opgaven over en vul de lege plekken in.
$\ldots. \cdot (x + 2) = 7 \cdot x + 14$
$\ldots. \cdot (x - \ldots.) = 2 \cdot x - 10$
$\ldots. \cdot (x - 4) = \ldots. - 20$
$4 \cdot (x - \ldots.) = \ldots. - 4$
$\ldots. \cdot (\ldots. + \ldots.) = 5 \cdot a + 5 \cdot b$
$\ldots. \cdot (\ldots. + \ldots.) = x^2 + 6 \cdot x$

40 In paragraaf 3 heb je formules verzonnen bij het rooster hiernaast. De letter O is in allerlei groottes gekleurd. De breedte b van de letters varieert van 3 tot 6. Ines heeft de volgende formule verzonnen voor het aantal gekleurde hokjes H:
$H = 4 \cdot (b - 2) + 4$
Schrijf deze formule zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk. Controleer of de formule die je zo gevonden hebt, klopt.



41 Bedenk drie opgaven die je maatje op moet lossen. In de opgaven moeten de distributiewetten voorkomen. Jij lost de opgaven op die je van je maatje hebt gekregen.

42 In opgave **22** heb je kennis gemaakt met een vreemde rij. Probeer een verklaring te vinden voor deze rij.

Noem de twee getallen die met elkaar worden vermenigvuldigd n en $n + 1$. Teken een plaatje bij deze vermenigvuldiging.

$1 \cdot 2 = 1 + 1$
$2 \cdot 3 = 4 + 2$
$3 \cdot 4 = 9 + 3$
$4 \cdot 5 = 16 + 4$
$5 \cdot 6 = 25 + 5$
....

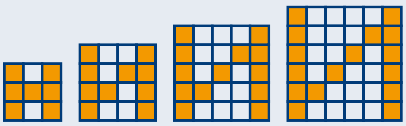
afspraken

In plaats van de × voor vermenigvuldiging schrijf je voortaan een punt. Dus $3 \times 5 = 15$ wordt nu $3 \cdot 5 = 15$. En $12 \times x$ wordt $12 \cdot x$.

Bij het product van een getal en een variabele zet je altijd het getal voorop. Dus in plaats van $x \cdot 3$ schrijf je voortaan altijd $3 \cdot x$.

patronen en formules

Hieronder is een rij vierkante roosters getekend. Er zit regelmaat in de rij.

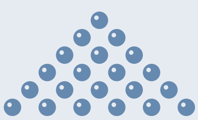


De **formule** $g = 3 \cdot z - 2$ geeft het verband tussen de grootheden 'aantal gekleurde blokjes' (g) en 'lengte van de zijde' (z). Omdat de waarde van de letters kan variëren, noemen we deze **variabelen**. Je kunt een formule controleren door enkele getallen in te vullen.

Om de regelmaat in een rij patronen te ontdekken, kan het helpen om:
- het volgende patroon uit de rij te tekenen;
- een tabel te maken.

driehoeksgetallen

Hieronder staat een stippenplaatje van het driehoeksgetal 21. Het plaatje bestaat uit 21 stippen.



Getallen die je door een driehoekig stippenpatroon kunt voorstellen, worden **driehoeksgetallen** genoemd. Het aantal stippen op de onderste rij heet de **basis** van het driehoeksgetal.

Het driehoeksgetal met basis 6 kun je op twee manieren berekenen:

1e manier:	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
2e manier	$(6 + 1) \cdot 6 : 2 = 21$

Dus: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (6 + 1) \cdot 6 : 2$

Het stippenplaatje van het driehoeksgetal met basis n bestaat uit $1 + 2 + 3 + ... + n = (n + 1) \cdot n : 2$ stippen.

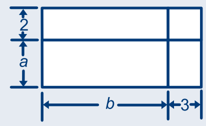
kwadraten

81 is een **kwadraat**, want $81 = 9 \cdot 9$.
Je kunt ook zeggen: 81 is het kwadraat van 9.

Je kunt $9 \cdot 9$ ook schrijven als 9^2.
Spreek uit: negen-kwadraat.

Je kunt $n \cdot n$ ook schrijven als n^2.
Spreek uit: n-kwadraat.

gelijkheden

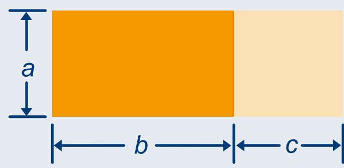


De oppervlakte van de rechthoek hierboven kun je op twee manieren berekenen:

lengte · breedte:	$(a + 2) \cdot (b + 3)$
de som van de delen:	$a \cdot b + 3 \cdot a + 2 \cdot b + 6$

Deze uitdrukkingen zien er verschillend uit, maar na het invullen van willekeurig getallen voor a en b geven ze dezelfde uitkomst. Zo krijg je de **gelijkheid** $(a + 2) \cdot (b + 3) = a \cdot b + 3 \cdot a + 2 \cdot b + 6$.

de distributiewetten

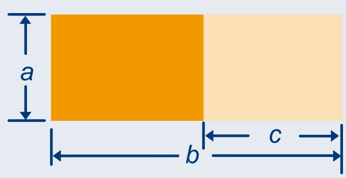


Je kunt de oppervlakte van de rechthoek hierboven op twee manieren schrijven:

met haakjes:	$a \cdot (b + c)$
zonder haakjes:	$a \cdot b + a \cdot c$

Zo vind je de gelijkheid $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Bij de oppervlakte van het donkere stuk in de figuur hieronder hoort de gelijkheid $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.



De gelijkheden

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

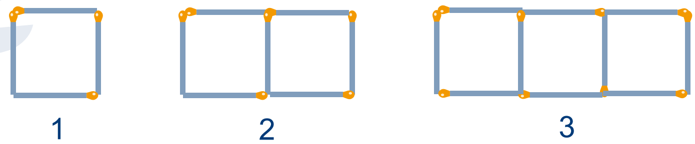
heten de **distributiewetten**.

3.7 EXTRA OPGAVEN

1 Hiernaast is met lucifers een patroon gelegd.
a Neem de tabel over en vul hem in.

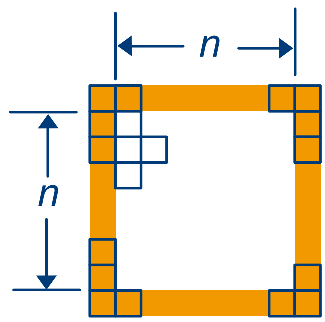
patroonnummer	1	2	3	4	5	6
aantal lucifers	4					

b Uit hoeveel lucifers bestaat een patroon met nummer 50?
c Bestaat er een patroon met 660 lucifers? Geef uitleg.
d Bedenk een formule waarmee je het aantal lucifer kunt berekenen als je het nummer van het patroon kent. Vergeet niet je formule te controleren.

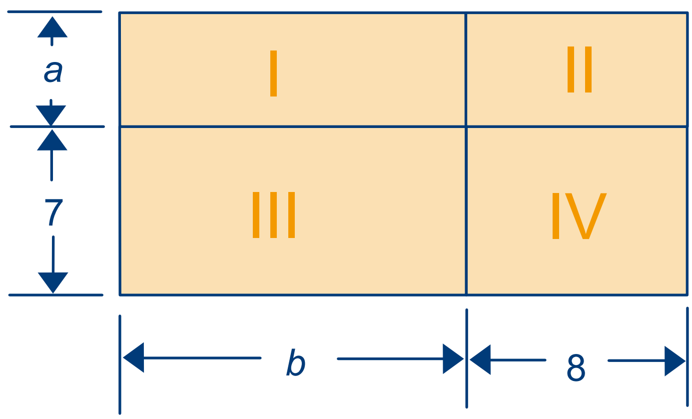


2 Hiernaast is een vierkant tegelplateau getekend van 10 bij 10 tegels. Het tegelplateau wordt uitgebreid door er aan alle vier de kanten een rij bij te leggen. Zie het plaatje hiernaast.
a Hoeveel tegels worden er in totaal bijgelegd?
b Bereken op twee manieren hoeveel tegels het nieuwe plateau telt.

Van een ander vierkant plateau weten we niet hoeveel tegels er liggen. Het aantal tegels dat er op één rij ligt noemen we n. Ook rondom dit tegelplateau wordt een nieuwe rij tegels aangelegd.
c Bereken op twee manieren hoeveel tegels het nieuwe plateau telt (in je antwoorden komt de letter n te staan).
d Welke gelijkheid kun je nu opschrijven?
e Controleer de gelijkheid voor $n = 10$.
f Je weet dat $100^2 = 10000$. Bereken op een handige manier 102^2.



3 Hiernaast zie je een rechthoek die verdeeld is in vier stukken: I, II, III en IV.
a Wat is de oppervlakte van stuk I? En van stuk II? En van stuk III? En van stuk IV?
b Wat is dan de oppervlakte van de vier stukken samen?
c Je kunt de oppervlakte van de rechthoek op nog een andere manier schrijven. Doe dat.
d Welke gelijkheid vind je?
e Controleer de gelijkheid voor $a = 3$ en $b = 12$.



Anne heeft ook een gelijkheid bij een rechthoek gemaakt. Het plaatje van de rechthoek kan ze niet meer vinden. De gelijkheid is:
$(x+1)\cdot(y+3) = x\cdot y + 3\cdot x + y + 3$.
f Teken de rechthoek bij Annes gelijkheid.

4 **a** Bereken het driehoeksgetal met basis 27.
b Bereken $1 + 2 + 3 + ... + 148 + 149 + 150$.

5 Schrijf zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk.
$5 \cdot (x + 2) =$
$(x + 2) \cdot 8 =$
$3 \cdot (9 - c) =$
$(p - 2) \cdot a =$
$a \cdot (p + a) =$
$2 \cdot (p + 3) =$

6 Neem de opgaven over en vul de lege plekken in.
$3 \cdot (x + ...) = 3 \cdot x + 18$
$3 \cdot (x - ....) = ... - 3$
$.... \cdot (p - 4) = 6 \cdot p - ....$
$.... \cdot (p + 4) = ... + 20$
$.... \cdot (.... - ....) = p^2 - 10 \cdot p$

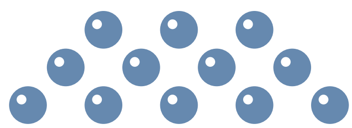
7 Bereken de volgende sommen op een handige manier. Maak gebruik van de distributiewetten.
$499 \cdot 8 + 501 \cdot 8 =$
$499 \cdot a + 501 \cdot a =$
$765 \cdot 4 - 760 \cdot 4 =$
$123 \cdot 7 - 20 \cdot 7 - 3 \cdot 7 =$
$13 \cdot 102 =$
$998 \cdot 14 =$

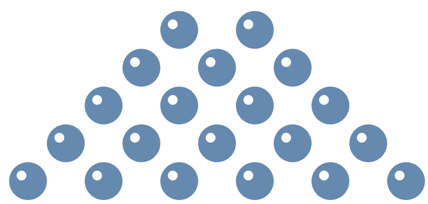
8 Anne krijgt elk jaar van haar vader rozen op haar verjaardag: net zo veel als ze oud is geworden. Op haar eerste verjaardag kreeg ze één roos; op haar tweede kreeg ze er twee, enzovoorts. Dit jaar is Anne 20 geworden en kreeg ze dus 20 rozen. Hoeveel rozen heeft Anne in totaal al van haar vader gehad?

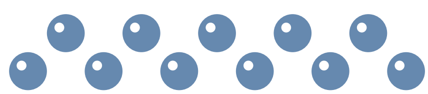
9 Bij het getal 12 kun je een ‘stapel’ maken; zie het plaatje hiernaast: in elke volgende rij is er één rondje meer. Dat dat kan, komt doordat $12 = 3 + 4 + 5$. Zo’n getal noemen we een stapelgetal.
- Een stapelgetal is de som van (minstens twee) opeenvolgende getallen.
- 20 is een stapelgetal, want $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ (een stapel van hoogte 5).
- 11 is ook een stapelgetal, want $11 = 5 + 6$ (een stapel van hoogte 2).
- Een stapel moet minstens hoogte 2 hebben.
- Niet alle getallen zijn stapelgetallen. Het kleinste stapelgetal is 3.

a Onderzoek welke getallen stapelgetallen zijn en welke niet. Ga tot en met 40.
b Elk oneven getal is een stapelgetal. Kun je dat uitleggen?
c Bekijk de getallen goed die geen stapelgetal zijn. Wat - denk je - is het volgende getal dat geen stapelgetal is?

Naar een idee van Dave Odegard, in het tijdschrift Pythagoras


12


20


11

10 Om te voorkomen dat de kanonskogels over het dek van een schip rolden, werden ze vroeger op een speciale manier gestapeld (zie de foto hiernaast). Sir Walter Raleigh (gunsteling van koningin Elizabeth I, zeevaarder en avonturier) was door zijn beroep geïnteresseerd in het netjes opstapelen van kanonskogels. Hij vroeg zich af of er een manier is om het aantal kanonskogels te berekenen dat nodig is voor een piramide met een willekeurige hoogte. Hij ging met dit probleem naar zijn wis- en sterrenkundig adviseur Thomas Harriot. Harriot begon met het opstellen van een tabel zoals hieronder.

Aantal lagen	1	2	3	4	5	6	7
Aantal kogels							

a Neem de tabel over en vul hem in.

Harriot loste vervolgens het probleem zonder moeite op. Hij vond de formule
$K = L \cdot (L+1) \cdot (2 \cdot L+1) : 6$
In deze formule stelt K het aantal kogels voor en L het aantal lagen.

b Controleer of de formule klopt voor $L = 1$ tot en met $L = 7$.

Nadat Harriot de formule voor het aantal kanonskogels had gevonden, werd het probleem moeilijker gemaakt. De vraag rees wat het kleinste aantal kanonskogels is waarmee je zowel een vierkant als een piramide kunt maken.

c Het aantal kanonskogels moet in dat geval een kwadraat zijn. Leg uit waarom.

Een oplossing van dit probleem is een piramide bestaande uit 1 laag en dus ook uit 1 kogel. Maar zijn er meer oplossingen voor dit probleem?

d Onderzoek of het lukt om zowel een vierkant als een piramide te maken wanneer het aantal kanonskogels tussen 0 en 400 ligt.

Ook dit probleem werd opgelost. Het blijkt dat met de kogels van een piramide bestaande uit 24 lagen een vierkant gevormd kon worden.

e Bereken uit hoeveel kogels de piramide bestaat. Gebruik hiervoor de formule uit onderdeel **b**.

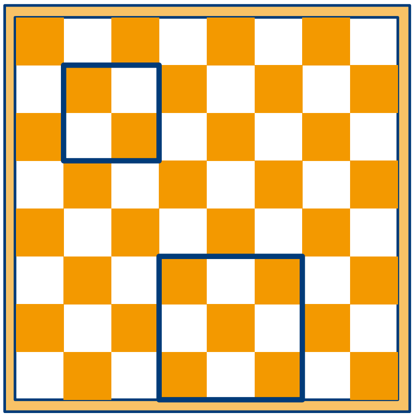
f Wat zijn de afmetingen van het vierkant dat met de kogels gemaakt kan worden?

Het was de wiskundige Watson die in 1918 bewees dat dit ook de enige oplossing van het probleem is.

11 Op een dunne grasspriet lopen vijftig mieren richting het uiteinde. Ze lopen allemaal met dezelfde snelheid. Wanneer een mier bij het uiteinde aankomt, keert hij om. Wanneer twee mieren elkaar tegenkomen dan botsen ze en keren allebei om. Hoeveel botsingen vinden er in totaal plaats?

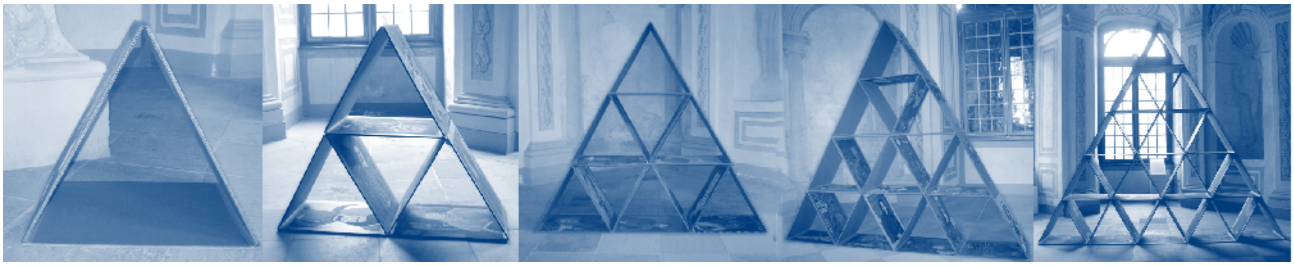
Naar een probleem uit het tijdschrift Pythagoras

12 Een schaakbord heeft acht rijen van elk acht vierkantjes. Dus heb je vierenzestig vierkantjes, de zogenaamde velden. Maar er zitten meer vierkanten verstopt in het schaakbord. In het plaatje is een 2×2-vierkant (van vier velden dus) getekend en een 3×3-vierkant.



a Onderzoek hoeveel 2×2-vierkanten er in het schaakbord verstopt zitten?
b En hoeveel 3×3-vierkanten?
c En hoeveel $n \times n$-vierkanten?
d Hoeveel vierkanten zitten er in totaal in het schaakbord verstopt?
e Onderzoek nu hoeveel vierkanten er in totaal in een dambord (10×10 velden) verstopt zitten.

13 In een museum in Bruchsal (Duitsland) staan de hieronder afgebeelde kaartenhuizen. Kinderen hadden grote kaarten beschilderd en die op een bepaalde manier opgestapeld. Je kunt deze bouwwerken zelf ook maken met gewone speelkaarten.



Nummer de kaartenhuizen: 1, 2, 3, 4, 5.
a Hoeveel kaarten heb je nodig voor elk van deze kaartenhuizen?
b Hoeveel kaarten heb je nodig voor het kaartenhuis met nummer n (n is een variabele)?


formule 1