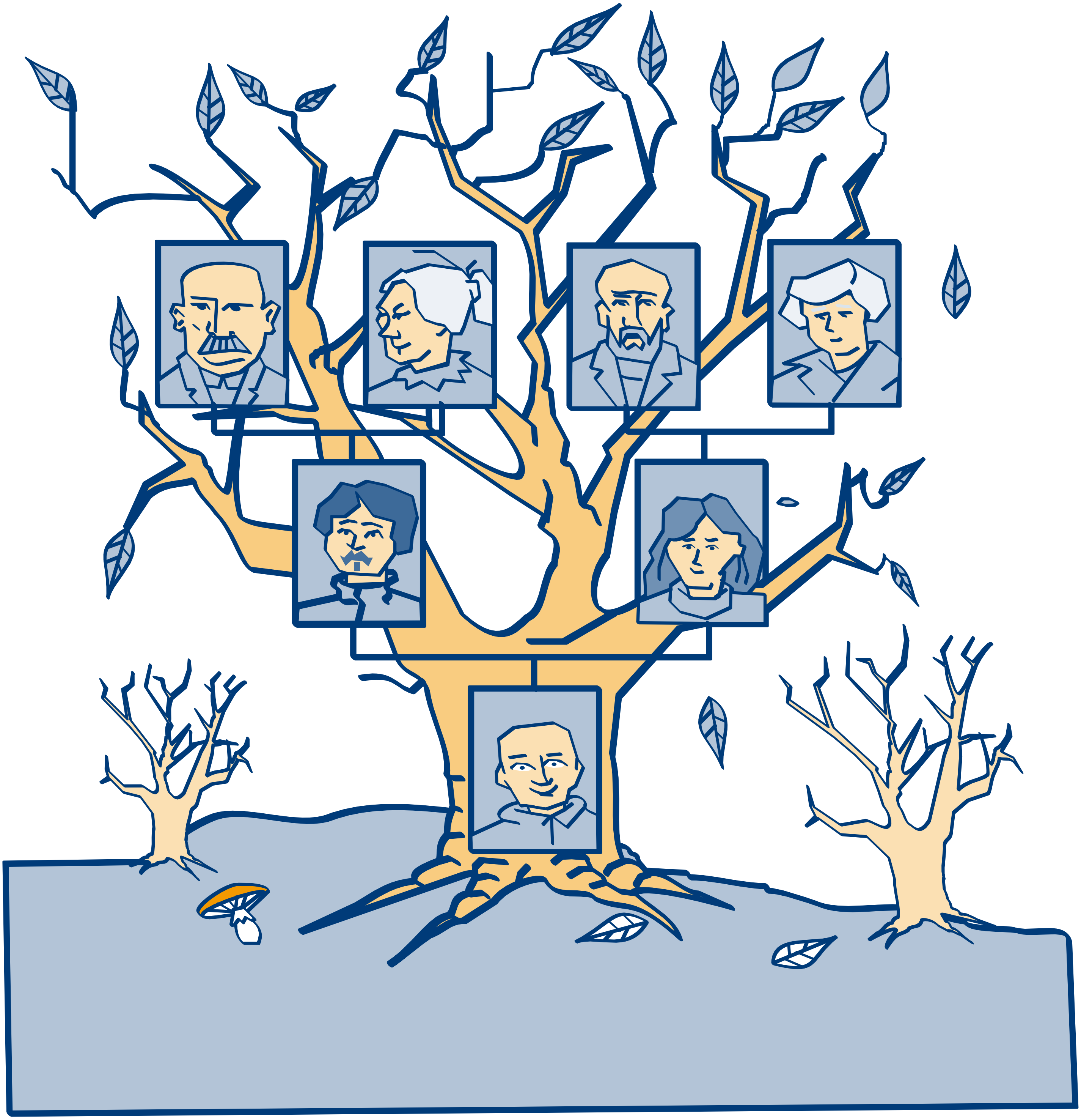
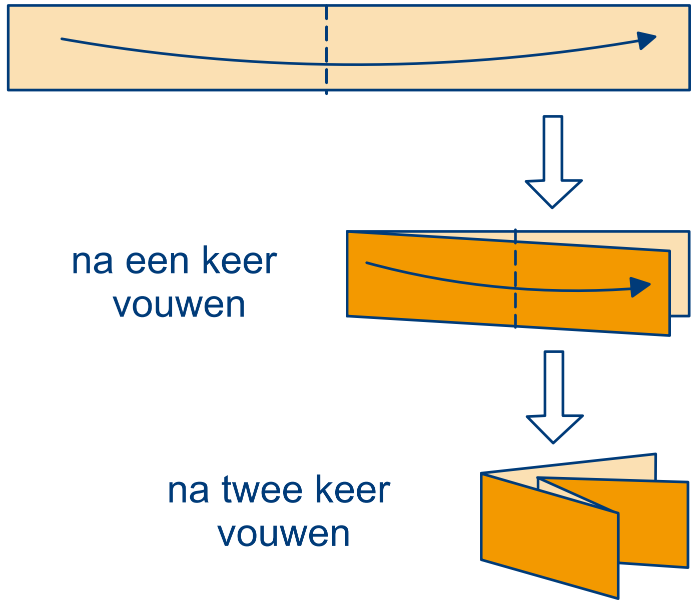
11. MACHTEN

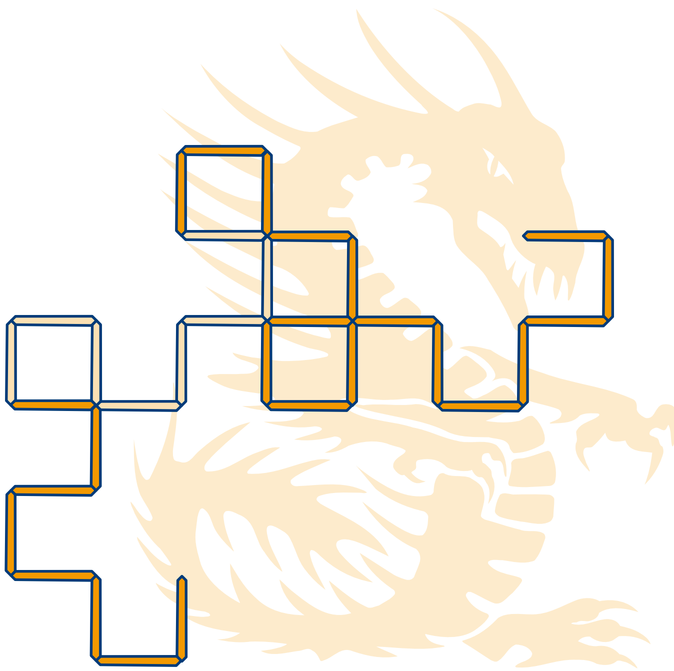


Fractals



1 **a** Neem een strook papier. Vouw de linkerkant op de rechterkant. Vouw weer de linkerkant op de rechter. Doe dat nog twee keer. Je hebt dan dus in totaal 4 keer gevouwen.
b Vouw de strook open. In hoeveel stukjes is de strook door de vouwen verdeeld?
c Hoeveel stukjes krijg je als je 6 keer vouwt?

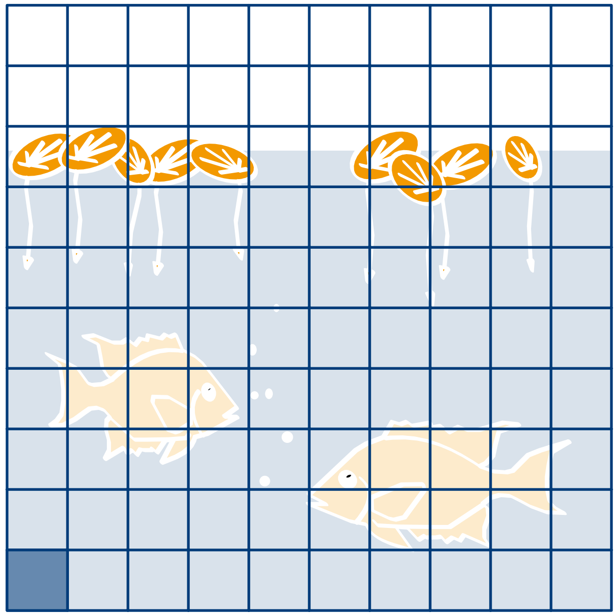
Vijf keer vouwen gaat misschien nog net. Wat je dan krijgt, zie je rechtsonder getekend. Dit is een begin van de draakkromme. Als je de strook nog een extra keer vouwt, krijg je meer en kortere kronkels. Je kunt de draak ook verlengen, namelijk door twee gevouwen stroken achter elkaar te plakken. Zes of meer keer vouwen is in de praktijk niet goed mogelijk.
De computer kent dergelijke problemen niet.
Ga de site van de Wageningse Methode. Bekijk Applet 11.1 - Draak. Je ziet daar je hoe de draakkromme wordt opgebouwd.



Over fractals
De draakkromme die je in de applet hebt zien ontstaan, is een voorbeeld van een fractal.
Een fractal is een meetkundige figuur waarin een zelfde motief zich (op steeds kleinere schaal) blijft herhalen. Dat houdt dus nooit op. Maar na een aantal stappen zie je veranderingen niet meer: dan is het motiefje zó klein dat het niet meer te zien is. In de praktijk stopt het dan. De fractal is dan niet af, maar het plaatje noemt men toch al een fractal. Op internet zijn talloze fractals te vinden. Kijk maar eens tot welk mooi resultaat je met een eenvoudig motief kunt komen.

11.1 OVERAL MACHTEN

Verdubbelen en halveren



2 Van Ittersum heeft voor het huis een vierkante vijver. Daarin zwemmen mooie vissen. Op een dag drijft er een blaadje eendenkroos in de vijver. Dat is een soort onkruid dat veel in vijvers voorkomt. Een dag later drijven er twee blaadjes. Maar Van Ittersum maakt zich niet ongerust; zijn vissen kan hij nog goed zien. Weer een dag later is het aantal blaadjes weer verdubbeld: hij ziet nu vier blaadjes. Enzovoort: elke dag is het aantal blaadjes twee keer zo groot als de dag ervoor. Na zes dagen ziet Van Ittersum dat de vijver al voor iets meer dan de helft is dichtgegroeid.

a Heb je enig idee na hoeveel dagen de vijver helemaal dichtgegroeid zal zijn met eendenkroos?

Hiernaast is de vijver getekend, verdeeld in honderd vierkantjes. We nemen aan dat één kroosje precies één vierkantje bedekt. Het kroosje van de eerste dag is in de hoek getekend.

b Geef in een rooster van 10 bij 10 aan hoe de vijver in de loop der dagen dichtgroeit. Gebruik voor elke volgende dag een andere kleur.

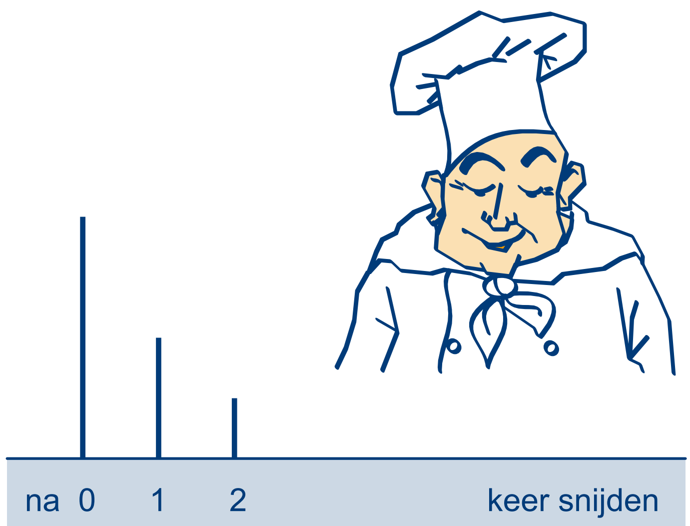
c Neem de tabel over en schrijf daarin het totaal aantal hokjes met kroosjes in de vijver na elke dag.

na ... dagen	0	1	2	3	4	5	6	7
aantal hokjes	1	2	4					

Bekijk nog eens je antwoord op de eerste vraag.

d Blijf je bij je mening?

3 Bakker Van Drempt heeft een geweldig grote banketstaaf gebakken: 128 cm lang. Hij heeft die banketstaaf gebruikt in zijn etalage voor Sinterklaas. Op de laatste middag voor sinterklaasavond gaat hij de staaf verdelen in kleine stukjes voor zijn klanten. Eerst snijdt hij de staaf doormidden. Hij legt de twee helften naast elkaar en snijdt ze dan in een keer doormidden. De vier stukken die hij dan heeft legt hij weer naast elkaar en snijdt ze weer doormidden. Zo snijdt hij door totdat hij meer dan dertig stukjes heeft.
In het plaatje hiernaast is aangegeven hoe lang de stukken zijn na nul, na één en na twee keer snijden.



a Maak een plaatje zoals hiernaast en geef daarin aan hoe lang de stukken zijn na 0, 1, 2, ... keer snijden. Begin met een stuk van 12,8 cm (dus neem schaal 1:10).

b Maak een tabel zoals hieronder en vul hem in.

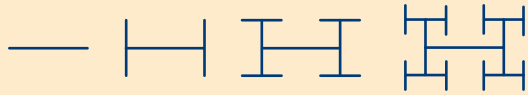
na n keer snijden	0	1	2	3	4	5	6	7
lengte in cm	128	64						
aantal stukken	1	2	4					

4 “Schural doodt 99% van de huishoudbacteriën” staat er op een fles schoonmaakmiddel. Maar de overgebleven bacteriën zorgen ervoor dat hun aantal weer snel op peil komt!
Een bacterie plant zich voort door zich in tweeën te delen. De bacteriën die zodoende ontstaan delen zich na verloop van tijd weer in tweeën, enzovoort. De moeder van Anneke heeft zojuist de gootsteen met Schural schoongemaakt. Maar 1% van de huishoudbacteriën heeft de schoonmaakbeurt overleefd. Neem aan dat een bacterie zich gemiddeld één keer per uur deelt en dat er geen bacteriën sterven.

na *n* uur	0	1	2	3	4	5
percentage bacteriën						

a Neem de tabel over en schrijf daarin hoeveel bacteriën er zijn na 1 uur, na 2 uur, na 3 uur, enz.
b Na hoeveel uur ongeveer is het aantal bacteriën weer even groot als voor de schoonmaakbeurt?

4 Hieronder zie je vier fasen van een patroon dat zich ontwikkelt.



De derde fase heeft 8 uiteinden.
a Hoeveel uiteinden heeft de vijfde fase?

De tiende fase heeft 1024 uiteinden.
b Hoeveel uiteinden heeft de elfde fase?

Egyptisch vermenigvuldigen

5 De moderne mens rekent in het zogenaamde tientallige stelsel. De oude Egyptenaren hadden niet zo’n fraai getalsysteem als wij. Zij konden in hun systeem wel goed optellen en verdubbelen, maar vermenigvuldigen ging niet zo gemakkelijk. Zo werkten ze niet met ´tafels van vermenigvuldiging´. En eigenlijk is de oude Egyptische manier van vermenigvuldigen zo gek nog niet.
Om met 53 te vermenigvuldigen maakten de Egyptenaren een verdubbelingstabel van 53. Hiernaast is die tabel al gedeeltelijk gemaakt.
a Neem hem over in maak hem af.

1	2	4	8	16	32	64
53	106	212				

Nu kunnen we met de tabel bijvoorbeeld $13 \cdot 53$ uitrekenen op de Egyprische manier: door het eerste, derde en vierde getal in de tabel bij elkaar op te tellen vind je de uitkomst van $13 \cdot 53$.
b Leg uit waarom deze drie getallen opgeteld precies $13 \cdot 53$ is. Controleer of het klopt.
c Bereken $17 \cdot 53$ op z’n Egyptisch.
Bereken ook $35 \cdot 53$ op z’n Egyptisch.
Schrijf steeds je berekening op.

Het nadeel is wel dat je als je een ander getal dan 53 wilt vermenigvuldigen, je opnieuw een verdubbelingstabel moet maken.
d Bereken op de Egyptische manier: $9 \cdot 321$, $28 \cdot 321$ en $51 \cdot 321$.

Ga naar de site van de Wageningse Methode.
Met Applet 11.2 - Egyptisch kun je Egyptisch vermenigvuldigen.

Machten van 2

Als je een getal zeven keer verdubbelt, vermenigvuldig je dat getal dus met $2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2$. Dit is een product van 7 factoren 2. We korten dat zó af: 2^7.
We spreken dat zó uit: `twee tot de macht zeven´.

6 Als je 2^7 uitrekent, vind je de uitkomst 128.
a Wat betekent 2^5? Hoe spreek je dat uit? Welk getal is dat?
b Hoe spreek je 2^{10} uit? Reken uit welk getal dit is.
c Neem de tabel hiernaast over en vul hem verder in.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2				32					

7 Een probleem is nog welk getal 2^0 moet voorstellen. Bekijk daarvoor nog even de huishoudbacteriën van de vorige bladzijde.
Na 3 uur was er weer 8%, dat is 2^3,
na 2 uur was er weer 4%, dat is 2^2,
na 1 uur was er weer 2%, dat is 2^1.
a Hoeveel procent was er na 0 uur?
b Wat moet volgens dit systeem 2^0 dus zijn?

Machten van 10

Net zoals we afgesproken hebben dat we 2^3 voor $2{\cdot}2{\cdot}2$ schrijven, schrijven we 10^5 voor $10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10$.

8 Machten van 10 zijn heel gemakkelijk. Die kun je allemaal uit je hoofd uitrekenen.
a Bereken 10^7.

Als je 10^7 uitschrijft, krijg je een getal van 8 cijfers, namelijk één 1 en zeven 0'en.
b Uit hoeveel cijfers bestaat 10^{11}, als je dit getal helemaal opschrijft?
c Uit hoeveel cijfers bestaat 10^n, als je dit getal helemaal op zou schrijven? (n is een positief geheel getal).

Het ligt weer voor de hand om voor $10^0 = 1$ te nemen.

Namen van machten van 10

10^3 = duizend
10^6 = miljoen
10^9 = miljard
10^{12} = biljoen
10^{15} = biljard
10^{18} = triljoen

Machtsverheffen gaat vóór vermenigvuldigen.

9 Dus: $5{\cdot}10^3 = 5{\cdot}1000 = 5000$.

Bereken:
$5{\cdot}10^3 + 2{\cdot}10^2 + 7{\cdot}10^1 + 10^0$
$7{\cdot}10^7 + 5{\cdot}10^5 + 3{\cdot}10^3 + 10^1$
$3{\cdot}10^3 + 46{\cdot}10^2 + 11{\cdot}10^1$
$10^3{\cdot}(2{\cdot}10^3 + 2{\cdot}10^2 + 2{\cdot}10^1 + 2{\cdot}10^0)$
$10^2{\cdot}(10^2{\cdot}(10^2 + 1)+1)+1$

Verschillende bewerkingen
Met 3 en 5 kun je verschillende rekenkundige bewerkingen uitvoeren:

optellen → de som 3 + 5
aftrekken → het verschil 3 – 5 of 5 – 3
vermenigvuldigen → het product 3 · 5
delen → het quotiënt 3 : 5 of 5 : 3
machtsverheffen → de macht 3^5 of 5^3

1 km	=	10 hm	1 m	=	10 dm
1 hm	=	10 dam	1 dm	=	10 cm
1 dam	=	10 m	1 cm	=	10 mm

10 Bekijk het lijstje hiernaast. Je kunt eruit afleiden dat 1 km = $10 \cdot 10 = 10^2$ dam.
Vul de juiste getallen in:
1 km = 10 – cm
10 km = 10 – mm
10 hm = 10 – mm

11 Wij noteren getallen in het tientallig stelsel. Daarom hebben we speciale namen voor machten van 10. Zo noemen we 10^2 honderd.
Geef de namen van de volgende machten van 10:
10^3, 10^4, 10^5, 10^8, 10^{10}, 10^{13}.

Het product van machten

12 $2^3 \quad \cdot \quad 2^4$
$2{\cdot}2{\cdot}2 \quad \cdot \quad 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2$
$2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2$
2^7

a Leg zo ook uit dat $2^2 \cdot 2^6 = 2^8$.

> Voor alle positieve gehele getallen a en b geldt:
>
> $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$.

b Vul de juiste getallen in.
$2^5 \cdot 2^7 = 2^{-}$
$2^4 \cdot 2^8 = 2^{-}$
$2^5 \cdot 2^6 = 2^{-}$
$2^5 \cdot 2^0 = 2^{-}$
$2^5 \cdot 2^{-} = 2^{20}$

13 Vul de juiste getallen in.
$2 \cdot 2^5 \cdot 2^7 = 2^{-}$
$2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^8 = 2^{-}$
$2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 2^{-}$
$2^5 \cdot 2^0 \cdot 2^3 = 2^{-}$
$2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^{-} = 2^9$

14 Hieronder staan acht rekensommen.
Sommige zijn goed, de andere zijn fout.
Geef de nummers van de goede sommen.

1. $2^5 \cdot 2^6 = 2^{30}$	5. $2 \cdot 2^8 = 2^{16}$
2. $2^5 \cdot 2^6 = 2^{11}$	6. $2 \cdot 2^8 = 2^9$
3. $2^5 + 2^6 = 2^{11}$	7. $2 + 2^8 = 2^9$
4. $2^5 + 2^5 = 2^6$	8. $2 \cdot 2^0 = 2^0$

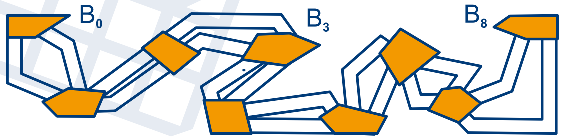
13 In de tabel bij opgave **6** kun je zien dat 2^{10} = 1024.
Met hoeveel cijfers schrijf je:
$2^{10} \cdot 10^3$
2^{20}
$2^{10} + 2^{11}$
$2^{10} + 10^5$
$2^{30} + 10^5$
Leg je antwoorden uit.

> Op rekenmachines zit een knop om machten uit te rekenen. Meestal heet die knop x^y of ^.
> Vooral bij veel rekenwerk is zo'n knop erg nuttig.
> In dit hoofdstuk kom je dat grote rekenwerk nergens tegen. Sterker nog: als je de opgaven met een rekenmachine zou maken, zou je er niets van leren.

11.2 HOEVEEL MOGELIJKHEDEN

Routes

15 Hieronder staat een stukje van een landkaart. Er is een rits van negen dorpen. Je kunt steeds op twee manieren van een dorp naar een volgend dorp reizen.

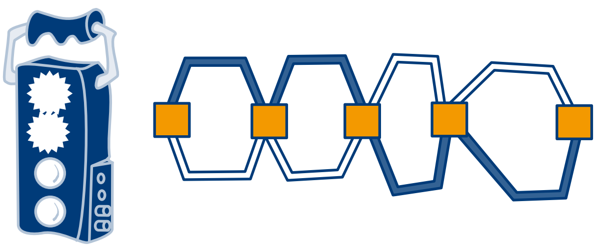


a Hoeveel routes zijn er van dorp B_0 naar dorp B_3?
Hoeveel routes zijn er van dorp B_3 naar dorp B_8?
Hoeveel routes zijn er van dorp B_0 naar dorp B_8?

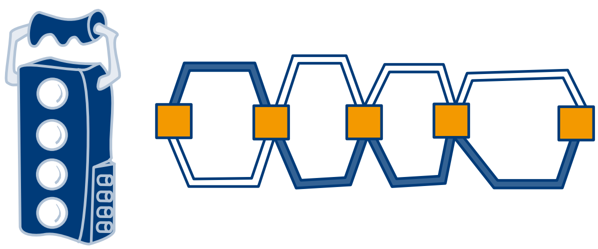
De antwoorden in **a** zijn machten van 2.

b Welke rekensom voor het rekenen met machten kun je met de drie antwoorden uitleggen?

16 Het seinapparaat dat hieronder getekend is heeft vier lampen. De bovenste twee lampen branden en de onderste twee lampen branden niet. Bij dit signaal hoort de route in het wegenplaatje dat er naast getekend is.



a Leg uit waarom het signaal bij de route hoort.



Bij de hierboven getekende route hoort een signaal met het seinapparaat.

b Welke lampen moeten branden?

c Hoeveel verschillende signalen kun je geven met dit seinapparaat? Alle lampen uit is ook een signaal.

d Hoeveel verschillende signalen kun je geven met een seinapparaat met zeven lampen?

15

Op een totoformulier moeten de uitslagen van dertien voetbalwedstrijden worden voorspeld. De wedstrijden zijn genummerd: 1 tot en met 13. Achter elke wedstrijd moet je een 1, een 2 of een 3 aankruisen. Als je een 1 aankruist, voorspel je dat de thuisspelende club wint, met een 2 dat de uitspelende club wint en met een 3 dat het een gelijkspel wordt. Anneke is met de eerste kolom bezig. Ze heeft de kruisjes voor eerste de drie wedstrijden al gezet.

a Wat is haar voorspelling voor de eerste wedstrijd?

b Welke wedstrijd eindigt volgens haar in gelijkspel?

c Op hoeveel verschillende manieren kun je een hele kolom van dertien wedstrijden invullen? (Je mag de rekenmachine gebruiken.)

De toto kent drie soorten prijzen.

- 13 uitslagen goed voorspeld: 1e prijs
- 12 uitslagen goed voorspeld: 2e prijs
- 11 uitslagen goed voorspeld: 3e prijs

d Kun je verklaren waarom het niet zo eenvoudig is om bij de toto een prijs te winnen?

Karel en Luc vullen allebei een totoformulier in. Karel vindt dat Luc er helemaal geen verstand van heeft. Volgens hem heeft Luc namelijk elke wedstrijd verkeerd voorspeld. Karel zal het wel even beter doen. Hij doet dus voor elke wedstrijd een andere voorspelling dan Luc.

e Hoeveel manieren heeft Karel om een kolom in te vullen?

11.2 HOEVEEL MOGELIJKHEDEN

Zoveel mogelijk

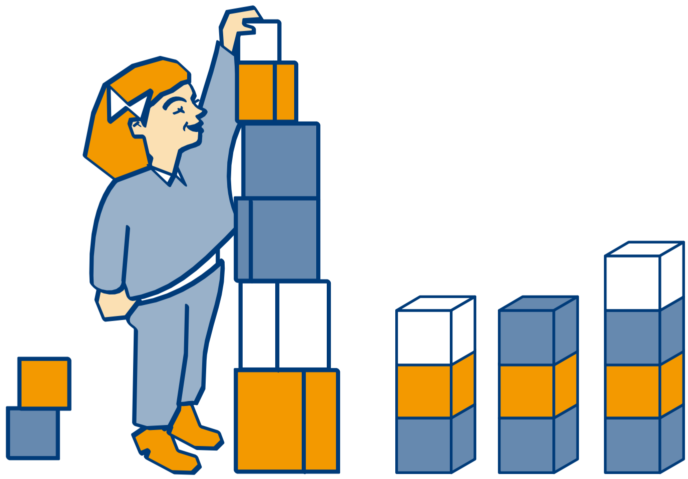
17 Het blad Ukkie heeft een prijsvraag voor zijn lezertjes uitgeschreven. De opdracht is zoveel mogelijk woorden te maken van drie letters:
de eerste letter moet een b of een p zijn,
de tweede letter moet een e, i of o zijn,
de laatste letter moet een k of een l zijn.

a Hoeveel verschillende woorden kun je maken? Schrijf ze allemaal op; werk systematisch.

Een paar maanden later schreef een concurrerend jeugdblad ook een prijsvraag uit. De opdracht was zo veel mogelijk getallen te maken van drie cijfers. Alleen de cijfers 1, 2 en 3 mochten gebruikt worden.

b Schrijf eens een paar van zulke getallen op. Hoeveel van zulke getallen zijn er?

18 Door kubussen op elkaar te stapelen kun je torens bouwen. Anneke beschikt over drie kleuren kubussen: witte, oker en blauwe. Hiernaast zijn een paar van die torens getekend.



a Hoeveel verschillende torens kan Anneke bouwen van twee kubussen hoog? Schrijf ze allemaal op; werk systematisch.

b Hoeveel verschillende torens kan Anneke bouwen van drie kubussen hoog?

c Anneke gaat zoveel mogelijk torens bouwen van vier kubussen hoog. Maar ze komt witte kubussen te kort. Daarom gebruikt ze voor de middelste twee kubussen alleen maar de kleuren oker en/of blauw. De onderste en/of bovenste kubus mogen dus wel wit zijn.

d Hoeveel verschillende torens kan Anneke bouwen?

19 Je hebt heel veel blokken in twee kleuren.

a Hoeveel verschillende torens van tien hoog kun je hiermee maken? Schrijf het aantal als een macht en bereken die macht.

Je hebt heel veel blokken in tien kleuren.

b Hoeveel verschillende torens van twee hoog kun je hiermee maken? Schrijf het aantal als een macht en bereken die macht.

20 a Waarvan is 3^7 de verkorte schrijfwijze?
b Leg uit dat $3^2 \cdot 3^6 = 3^8$.
c Vul de juiste getallen in.
$3^5 \cdot 3^7 = 3^{-}$
$3^4 \cdot 3^8 = 3^{-}$
$3^5 \cdot 3^6 = 3^{-}$
$3^4 \cdot 3 = 3^{-}$
d Vul de juiste getallen in.
$3 \cdot 3^5 \cdot 3^7 = 3^{-}$
$3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^8 = 3^{-}$
$3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^6 = 3^{-}$
$3^4 \cdot 3 \cdot 3^3 = 3^{-}$
e Zijn 3^5 en 5^3 hetzelfde?

3^5 kun je op verschillende manieren uitspreken.
- de vijfde macht van 3, of
- 3 tot de macht vijf, of
- 3 tot de vijfde.

De getallen 3 en 5 in deze macht hebben een verschillende betekenis: 3 noemen we het **grondtal** en 5 noemen we **de exponent**.

21 a Schrijf als macht en bereken de uitkomst:
twee tot de zevende,
zeven tot de tweede,
vier tot de vijfde,
vijf tot de vierde.
b Zeven tot de tweede noemen we meestal anders. Hoe?
c Schrijf de macht op met 6 als grondtal en 4 als exponent. Bereken die macht.
d Bereken alle derdemachten die kleiner zijn dan 300.
e Bereken alle vierdemachten die kleiner zijn dan 300.
f Bereken alle vijfdemachten die kleiner zijn dan 300.
g Schrijf 64 als macht van 2.
Schrijf 64 ook als macht van 4.
En schrijf 64 als macht van 8.
h Schrijf 1000 als derdemacht.
Schrijf 8 als derdemacht.
Schrijf nu 8000 als derdemacht.

22 Het grondtal hoeft niet geheel te zijn, bijvoorbeeld
$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$.

a Bereken:

$\left(\frac{2}{3}\right)^3$ $\quad\left(\frac{3}{4}\right)^3$ $\quad\left(\frac{2}{3}\right)^4$

$(0,1)^4$ $\quad(1,1)^3$ $\quad(0,2)^4$

Het grondtal kan ook negatief zijn.
b Bereken:
$(-3)^4$ $\quad(-2)^3$ $\quad(-1)^{40}$

1	2	4	8	16	32	64
1	3	9	27	81	243	729
1	4	16	64	256	1024	4096
1	5	25	125	625	3125	15625

Bekijk de vier rijen getallen. Elke rij begint met 1. De eerste rij is gemaakt door herhaald met 2 te vermenigvuldigen. 2 is het grondtal van de rij: de rij getallen is "gegrond" op het getal 2. In het Engels spreekt men van "base" (basis): de rij is "gebaseerd" op 2.
Van de andere drie rijen zijn de grondtallen 3, 4 en 5.

René Descartes (1596-1650)

De term grondtal is in Nederland ingeburgerd in de achttiende eeuw.
De exponent noemde men toen de "aanwijzer", maar dat woord wordt tegenwoordig niet meer gebruikt.
Vóór de zeventiende eeuw schreef men *a a a a a* meestal voluit voor a^5.
De afkorting (waarbij dus de exponent klein, rechtsboven het grondtal wordt geschreven) stamt van de Franse wiskundige René Descartes. De Britten wilden de Franse notatie niet overnemen en zijn lang *a a a a a* blijven schrijven in plaats van a^5 (tot in de achttiende eeuw). Je ziet dat de notatie die wij gebruiken nog niet zo oud is.

11.3 REKENEN MET MACHTEN

De hoofdeigenschap

23 Vul de juiste exponenten in; n en m zijn positieve gehele getallen. Maak de sommen van links naar rechts.

$2^2 \cdot 2^6 = 2^{-}$ $\quad$ $2^5 \cdot 4 = 2^{-}$
$3^2 \cdot 3^6 = 3^{-}$ $\quad$ $3^2 \cdot 27 = 3^{-}$
$5^2 \cdot 5^3 = 5^{-}$ $\quad$ $5^2 \cdot 25 = 5^{-}$

$10^3 \cdot 10^3 = 10^{-}$ $\quad$ $10^{11} \cdot 10000 = 10^{-}$
$10^n \cdot 10^3 = 10^{-}$ $\quad$ $10^n \cdot 100 = 10^{-}$
$10^n \cdot 10^m = 10^{-}$ $\quad$ $10^n \cdot 10 = 10^{-}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-}$ $\quad$ $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-}$

Hoofdeigenschap voor het rekenen met machten
Voor alle getallen a en alle postieve gehele getallen m en n geldt: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Als je a^0 betekenis wil geven, en je wilt dat de hoofdeigenschap ook voor n=0 geldt, dan moet dus $a^0 \cdot a^m = a^m$, dus moet je $a^0 = 1$ nemen, net zoals we dat eerder al voor 2^0 gedaan hebben.

We spreken voor alle getallen a af: $a^0 = 1$.

Macht van een macht

24 $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2{\cdot}2{\cdot}2 \cdot 2{\cdot}2{\cdot}2 = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2 = 2^6$.
a Schrijf zo ook als een macht van 2:
$(2^3)^3$ $\quad$ $(2^3)^4$ $\quad$ $(2^4)^0$
b Schrijf als een macht van 3:
$(3^2)^3$ $\quad$ $(3^3)^4$ $\quad$ $(3^4)^0$

25 Er geldt: $32 = 2^5$, dus $32^3 = (2^5)^3 = 2^{15}$.
Schrijf als macht van 2, 3 of a.
Werk van links naar rechts.
16^{10} $\quad$ 32^{10}
9^{10} $\quad$ 27^{15}
4^{11} $\quad$ 8^{15}
$(a^p)^3$ $\quad$ $(a^p)^q$
a is willekeurig; p en q zijn positief en geheel.

Macht van een macht
Voor alle getallen a en positieve gehele getallen p en q geldt: $(a^p)^q = a^{pq}$.

24 a Schrijf 64 als macht van 2, van 4 en van 8.
b Schrijf 64^3 als macht van 2, van 4 en van 8.

25 Van een getal f weten we $f^4 = 25$.
Welk getallen zijn f^8, f^2 en f^6?
Leg je antwoorden uit.

Machten delen

26 a Neem over en vul de juiste getallen in:

$3 \cdot \_\_ = 36$, dus $36 : 3 = \_\_\_$.

b Neem over en vul steeds het juiste getal in:

$3^4 \cdot 3^{-} = 3^{10}$, dus $3^{10} : 3^4 = 3^{-}$
$3^4 \cdot 3^{-} = 3^{12}$, dus $3^{12} : 3^4 = 3^{-}$
$3^2 \cdot 3^{-} = 3^{12}$, dus $3^{12} : 3^2 = 3^{-}$
$3^{20} \cdot 3^{-} = 3^{40}$, dus $3^{40} : 3^{20} = 3^{-}$

c Schrijf de uitkomsten van de volgende delingen als macht van 3:

$3^{40} : 3^{10} = 3^{-}$ $\quad$ $3^{40} : 3^5 = 3^{-}$
$3^{40} : 3^{40} = 3^{-}$ $\quad$ $3^{40} : 3^{30} = 3^{-}$

d Schrijf de uitkomsten van de volgende delingen als macht van $\frac{1}{2}$:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{40} : \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{40} : \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{40} : \left(\frac{1}{2}\right)^{30} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{40} : \left(\frac{1}{2}\right)^{40} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-}$

> **Machten delen**
> Voor alle getallen a en alle postieve gehele getallen m en n met $m>n$ geldt: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Machten van breuken

Hiernaast staan twee tabellen: van machten van 2 en van machten van 3. Die kun je goed gebruiken in de volgende opgave.

Tabel met machten van 2	Tabel met machten van 3
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$
$2^7 = 128$	$3^7 = 2187$

27 Er geldt: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^3}{3^3}$

Met de tabel vind je $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

a Bereken zo ook met de tabel:

$\left(\frac{2}{3}\right)^4$ $\quad$ $\left(\frac{3}{2}\right)^5$
$\left(\frac{2}{3}\right)^6$ $\quad$ $\left(\frac{3}{2}\right)^7$

b Bereken met de tabel:

$0{,}3^6$ $\quad$ $0{,}2^7$
$\left(\frac{1}{3}\right)^7$ $\quad$ $\left(\frac{10}{3}\right)^6$

> **Macht van een breuk**
> Voor alle gehele getallen a en b en alle postieve gehele getallen n geldt: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Machten met dezelfde exponent

28 a Bereken:

$2^2 \cdot 5^2$ $\quad$ $2^3 \cdot 5^3$ $\quad$ $2^4 \cdot 5^4$

Je krijgt steeds machten van 10. Je kunt dat goed als volgt begrijpen:
$2^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 10 \cdot 10 = 10^2$.

b Leg zo ook uit dat $2^3 \cdot 5^3 = 10^3$.
En dat $0{,}2^3 \cdot 10^3 = 2^3$.

29 a Vul het passende grondtal in.

$2^5 \cdot 3^5 = (\_\_)^5$ $\quad$ $20^6 \cdot 0{,}1^6 = (\_\_)^6$

$\left(\frac{1}{9}\right)^5 \cdot 3^5 = (\_\_)^5$ $\quad$ $20^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 = (\_\_)^7$

b Bereken (van links naar rechts):

$\left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot 3^3$ $\quad$ $\left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot 3^4$

$\left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot 3^5$ $\quad$ $\left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot 3^6$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 2^{10}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$

> **Machten met dezelfde exponent vermenigvuldigen**
> Voor alle getallen *a* en *b en* alle postieve gehele getallen *m* geldt: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.

Oefenen: alles door elkaar

30 a Bereken:

$(0{,}1)^3$ $\quad$ 10^6 $\quad$ $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$3^4 \cdot 10^6$ $\quad$ 8^0 $\quad$ $(-1)^{10}$

$6^0 \cdot 0^6$ $\quad$ $6^1 \cdot 1^6$ $\quad$ $3^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{30}$

b Vul de juiste getallen in.

$2^3 \cdot 3^3 = (\_\_\_)^3$ $\quad$ $2^4 \cdot 2^3 = 2^{—}$

$2^4 : 2^3 = 2^{—}$ $\quad$ $2^{40} : 2^{30} = 2^{—}$

$2^{40} : 2^{40} = 2^{—}$ $\quad$ $2^{10} \cdot 3^{10} = 6^{—}$

31 Bekijk het lijstje hiernaast en vul de juiste machten van 10 in (van links naar rechts).

1 km² = __ dam² $\quad$ 10 km² = __ dam²

1 km² = __ m² $\quad$ 10 km² = __ m²

1 m² = __ cm² $\quad$ 10 m² = __ cm²

32 Iemand heeft met zijn rekenmachine uitgerekend dat $2^{26} = 67108864$.
Bereken zonder rekenmachine 2^{27} en 2^{25}.

29 Bereken handig; schrijf een tussenstap op:

$2^5 \cdot 5^5$ $\quad$ $2^5 \cdot 5^6$

$\left(\frac{1}{9}\right)^{30} \cdot 9^{30}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{9}\right)^{30} \cdot 9^{31}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 2^{10}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 20^{10}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 2^{10}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 2^5$

30 Er geldt: $2^{12} = 4096$

a Is 4096 een kwadraat, een derdemacht, een vierdemacht, een vijfdemacht?
Zo ja, van welke getallen?

b Schrijf de antwoorden van de volgende sommen als macht van 2 en ook als macht van 4.

$4096 \cdot 4$ $\quad$ $4096 \cdot \frac{1}{4}$

$4096 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\quad$ $4096 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6$

1 km²	$=10^2$ hm²	1 m²	$= 10^2$ dm²
1 hm²	$=10^2$ dam²	1 dm²	$= 10^2$ cm²
1 dam²	$=10^2$ m²	1 cm²	$= 10^2$ mm²

Verdubbelen en halveren

Als iets elke dag verdubbelt, dan wordt het in n dagen 2^n keer zo groot.
Als iets elke dag halveert, dan wordt het in n dagen $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ keer zo groot.

Grondtal en exponent

3^5 kun je op verschillende manieren uitspreken.
- de vijfde macht van 3, of
- 3 tot de macht vijf, of
- 3 tot de vijfde.

De getallen 3 en 5 in deze macht hebben een verschillende betekenis: 3 noemen we het **grondtal** en 5 noemen we **de exponent**.

Handig om te weten

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Namen van machten van 10

10^3 = duizend
10^6 = miljoen
10^9 = miljard
10^{12} = biljoen
10^{15} = biljard
10^{18} = triljoen

Metriek

lengte:

1 km	=	10 hm	1 m	=	10 dm
1 hm	=	10 dam	1 dm	=	10 cm
1 dam	=	10 m	1 cm	=	10 mm

oppervlakte

1 km^2	=	10^2 hm^2	1 m^2	=	10^2 dm^2
1 hm^2	=	10^2 dam^2	1 dm^2	=	10^2 cm^2
1 dam^2	=	10^2 m^2	1 cm^2	=	10^2 mm^2

inhoud

1 km^3	=	10^3 hm^3	1 m^3	=	10^3 dm^3
1 hm^3	=	10^3 dam^3	1 dm^3	=	10^3 cm^3
1 dam^3	=	10^3 m^3	1 cm^3	=	10^3 mm^3

Regels voor het rekenen met machten

Afspraak
2·2·2·2·2·2·2 (het product van 7 factoren 2) korten we af met 2^7.
In het bijzonder: $2^0 = 1$.
Algemeen: a^n is het product van n factoren a, voor elk getal a en elk positief geheel getal n.
In het bijzonder: $a^0 = 1$.

Hoofdeigenschap
$2^2 \cdot 2^6 = 2^8$
Algemeen: voor alle getallen a en alle postieve gehele getallen m en n geldt: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

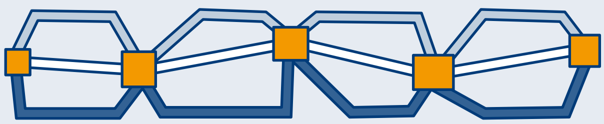
Machten delen
$3^{10} : 3^4 = 3^6$
Algemeen: voor alle getallen a en alle postieve gehele getallen m en n met $m>n$ geldt: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Macht van een breuk
$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$
Algemeen: voor alle gehele getallen a en b en alle postieve gehele getallen n geldt: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Machten met dezelfde exponent vermenigvuldigen
$2^3 \cdot 5^3 = 10^3$
Algemeen: voor alle getallen a en b *en* alle postieve gehele getallen m geldt: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.

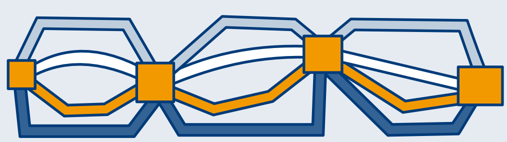
Op hoeveel manieren

Er zijn even veel wegen in het diagram hieronder als er torentjes zijn van vier hoog in drie kleuren.



Er zijn 3^4 wegen, dus $3^4 = 81$ torentjes.

Er zijn even veel wegen in het diagram hieronder als er torentjes zijn van drie hoog in vier kleuren.



Er zijn 4^3 wegen, dus $4^3 = 64$ torentjes.

1 In een loterij maakt men lotnummers van drie cijfers. Mogelijke nummers zijn: 133, 000, 158, 727, 003, enzovoort.

a Hoeveel van deze loten kun je maken?

In een andere loterij maakt men lotnummers van één letter gevolgd door twee cijfers. Mogelijke nummers zijn: A 98, I 11, X 00, Y 71, enzovoort.

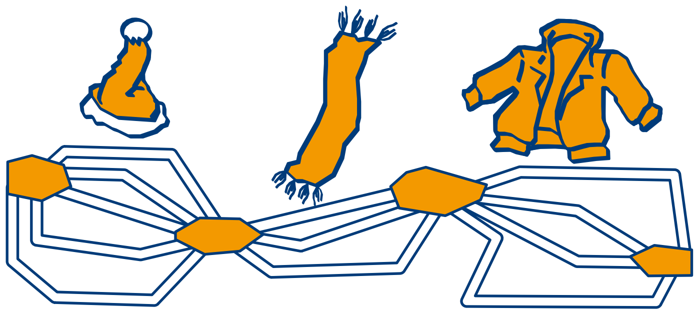
b Hoeveel van deze loten kunnen er gemaakt worden? Schrijf ook je berekening op.

In een derde loterij wil de organisatie dat iedere Nederlander een lot moet kunnen kopen. De lotnummers bestaan alleen uit cijfers.

c Uit hoeveel cijfers moet een lotnummer dan minstens bestaan? Licht je antwoord toe.

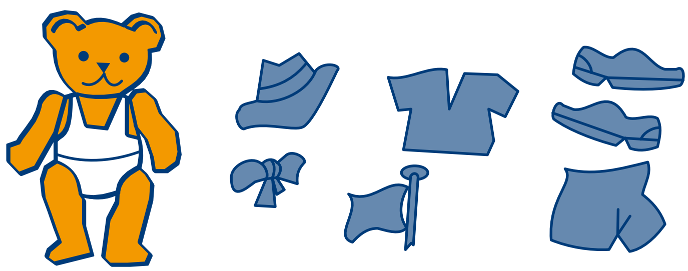
2 Anneke heeft vijf wintermutsen, drie dassen en vier jacks.

a Op hoeveel manieren kan Anneke zich kleden met een wintermuts, een das en een jack?



Op haar verjaardag heeft Jet een plakboek gekregen. Daarin zitten beertje Colle en een heleboel plakkertjes. Er zijn plakkertjes voor een hoed, een strik, schoenen, een kiel, een broek en een vlag. Elk plakkertje is er in de kleuren rood, blauw, groen en geel. Beertje Colle kan met de plakkertjes aangekleed worden.

b Op hoeveel manieren kan Jet beertje Colle aankleden? Schrijf je antwoord als macht en bereken die macht.



Nu vindt Jet dat de strik en de broek dezelfde kleur moeten hebben. Ook vindt ze de vlag eigenlijk maar kinderachtig. Die wil ze niet meer gebruiken.

c Op hoeveel manieren kan Jet het beertje nu nog aankleden?

3 Praatjes (geruchten) verspreiden zich doordat de mensen die het praatje gehoord hebben dat verder vertellen aan anderen; en die anderen vertellen het weer verder, enzovoort. Peter heeft een praatje verzonnen. Na één minuut heeft hij het aan vier anderen verteld. Weer één minuut later hebben Peter en die vier anderen elk het praatje doorverteld aan vier personen die het praatje nog niet kenden. En zo gaat het elke minuut verder.

a Hoeveel mensen kennen na vier minuten het praatje? Schrijf ook je berekening op.

b Na hoeveel minuten kennen meer dan honderdduizend mensen het praatje? Schrijf ook je berekening op.

4 Bij het Chinese restaurant Hai Chang Hai in Arnhem kon je in 2002 een driegangen keuzemenu krijgen voor maar 10,50 euro. Je kon het menu zelf samenstellen, zoals je hiernaast kunt aflezen.

a Hoeveel verschillende menu's kun je samenstellen?

Anneke en Vinja gingen bij Hai Chang Hai eten; ze namen allebei een driegangen keuzemenu. Ze wilden met zoveel mogelijk gerechten kennismaken. Anneke koos als eerste. Vinja wilde per se een ander voorgerecht, een ander hoofdgerecht en een ander nagerecht dan Anneke.

b Hoeveel verschillende menu's blijven er dan nog voor Vinja over?

3 GANGEN KEUZEMENU

voorgerechten
soep - loempia - pansit goreng - san choy pak
gebakken banaan - kroepoek

hoofdgerechten
babi pangang - koe lo youk - fo laam (spek)
foe young hai - tjap tjoy - pikante seizoenvis

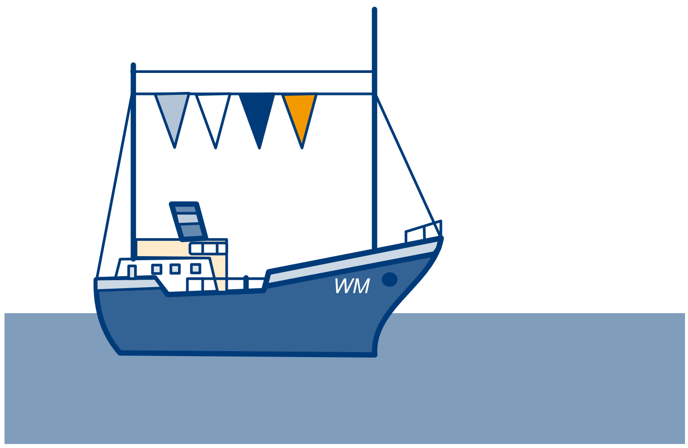
nagerechten
ijs - ananas - chinese thee - koffie
lychee - cappuccino

5 Tussen de twee masten van een vissersbootje hangen altijd vier vlaggen. De kleuren zijn niet elke dag hetzelfde. Het lijkt of ze daar hangen als versiering. Maar in werkelijkheid is het bootje een spionageschip. Aan boord zijn witte, oker, blauwe en licht blauwe vlaggen. Met de vier vlaggen worden geheime signalen gegeven.

a Hoeveel signalen kunnen er gegeven worden? Schrijf je antwoord als macht en bereken die macht.

Doordat de vlaggen altijd maar in weer en wind hangen, zijn de oker vlaggen niet meer van de witte te onderscheiden.

b Hoeveel signalen zijn er nu nog mogelijk?



6 Anneke heeft een geheimschrift gemaakt met vijf tekens: #, &, Ø, ∏, ¥.
Om een woord te maken zet Anneke telkens drie tekens achter elkaar. In een woord mag zij hetzelfde teken meerdere keren gebruiken, bijvoorbeeld: ∏ # ∏.
Hoeveel verschillende woorden kan Anneke maken in haar geheimschrift?

7 Je kunt 100^3 schrijven als een macht van 10, want $100^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 = 10^6$.
Vul de juiste exponent in.

$1000^2 = 10^{-}$	$100 \cdot 10^5 = 10^{-}$
10 miljoen = 10^{-}	10 miljard = 10^{-}
1 miljoen^2 = 10^{-}	10 miljard^2 = 10^{-}

8 Bekijk het lijstje hiernaast en vul de juiste machten van 10 in (van links naar rechts).

1 km^3 = ___ dam^3	10 km^3 = ___ dam^3
1 km^3 = ___ m^3	10 km^3 = ___ m^3
1 m^3 = ___ cm^3	10 m^3 = ___ cm^3

1 km^3 = 10^3 hm^3	1 m^3 = 10^3 dm^3
1 hm^3 = 10^3 dam^3	1 dm^3 = 10^3 cm^3
1 dam^3 = 10^3 m^3	1 cm^3 = 10^3 mm^3

9 **a** Schrijf als macht van 2:

16^3 64^3
$(2^3)^a$ $2^a \cdot 2^3$
$2^a \cdot 64^3$ $2^a \cdot 2^a$
$2^a \cdot 2$ $2^a : 2^a$

b Vul de passende exponenten in:

$2^5 \cdot 2^{-} = 2^{10}$ $2^5 \cdot 2^{-} = 2^8$
$2^5 \cdot 2^{-} = 2^6$ $2^5 \cdot 2^{-} = 2^5$
$(2^5)^{-} = 2^{10}$ $(2^{-})^5 = 2^5$

c Vul het passende grondtal in:

$81 = (\_\_)^4$ $81 = (\_\_)^2$
$64 = (\_\_)^6$ $64 = (\_\_)^3$ $64 = (\_\_)^2$

d Bereken:

$\left(\frac{1}{3}\right)^3$ $\left(\frac{10}{3}\right)^3$ $\left(\frac{100}{3}\right)^3$