

1. KENNISMAKEN

1.0 INTRO

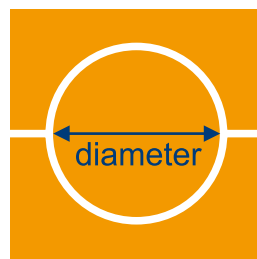
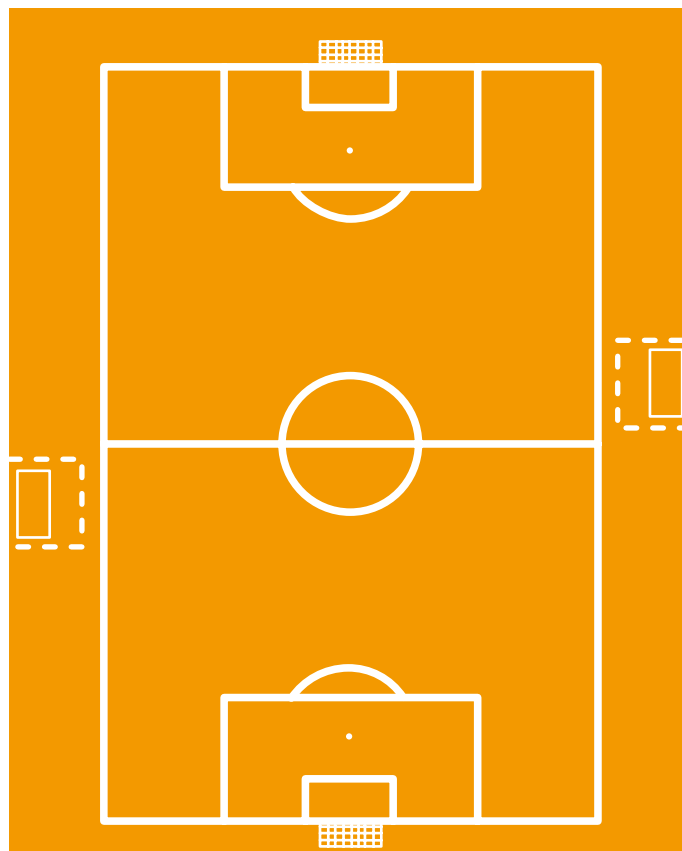
- 1 Voor een voetbalwedstrijd moeten alle lijnen op nieuw getrokken worden. Dat gebeurt met een krijtkar. Zoals je ziet moeten er rechte lijnen en cirkels op het veld getrokken worden.
 - a Voor de *rechte lijnen* moet de krijtkar kaarsrecht vooruit geduwd worden. Heb je enig idee hoe je ervoor zou kunnen zorgen dat je niet afwijkt met de kar?
 - b Heb je ook een idee over hoe je de *cirkels* mooi rond zou kunnen krijgen?
 - c De lijnen van het doelgebied moeten *loodrecht* (=haaks) op de achterlijn getrokken worden. Hoe zou je dat kunnen doen?

Van een officieel voetbalveld zijn de afmetingen van de lijnen en cirkels voorgeschreven:

- lengte en breedte: 105 meter bij 69 meter,
- de middencirkel heeft een diameter van 18,32 meter,
- het doel is 7,32 meter breed,
- de penaltystip bevindt zich op 11 meter voor de doellijn,
- het strafschopgebied is 40,32 bij 16,50 meter,
- de cirkelboog voor het strafschopgebied heeft de penaltystip als middelpunt en een diameter van 18,32 meter,
- het doelgebied is 18,32 bij 5,50 meter,
- de kwartcirkels bij de corners hebben een diameter van 1,80 meter.

(Voetbalvelden zijn niet allemaal even groot; de grootst toegestane lengte is 105 meter, de grootst toegestane breedte is 69 meter.)

- d Is het voetbalveld hiernaast netjes op schaal getekend, of klopt het niet helemaal? Hoe ga je dat eigenlijk na?
- e Heb je enig idee waarom de kwartcirkels bij de corners niet getekend zijn in het plaatje?



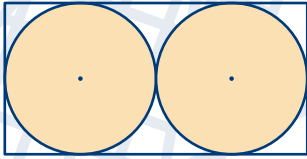
In dit hoofdstuk leer je onder andere hoe je nauwkeurig wiskundige figuren kunt tekenen.

Een timmerman gebruikt allerlei gereedschap: hamer, zaag, waterpas, Een wiskundeleerling heeft ook gereedschap nodig: een passer en een geodriehoek. Hoe je deze twee instrumenten kunt gebruiken, ga je nu leren.

Een **passer** gebruik je om cirkels te tekenen, een **geodriehoek** om rechte lijnen te tekenen.

1.1 PASSER EN GEODRIEHOEK

- 2 Hieronder staat een rechthoek van 2 bij 4 cm met twee cirkels die daar precies in passen.



Teken net zo'n plaatje, maar dan in een rechthoek van 3 bij 6 cm.



- 3 Op je werkblad staat een kort en een lang lijnstuk.



- a Ga met je passer na hoe vaak het korte lijnstuk op het lange past. Let op: je mag alleen je passer gebruiken; je mag niet opmeten hoe lang de lijnstukken zijn.
- b Snap je nu hoe een "passer" aan zijn naam komt?
- c Teken een cirkel met straal 3 cm. Neem een lijnstuk van 2 cm tussen de passer. Ga na hoe vaak dat lijnstuk binnen de cirkelomtrek aangepast kan worden.
- 4 Teken een stip en schrijf daar de letter M bij.
- a Teken tien punten die 3 cm van stip M afliggen.

Er zijn oneindig veel punten die 3 cm van M afliggen. Het is ondoenlijk om die allemaal een voor een te tekenen. Gelukkig is er een manier om al die punten in één klap te tekenen.

- b Hoe doe je dat?



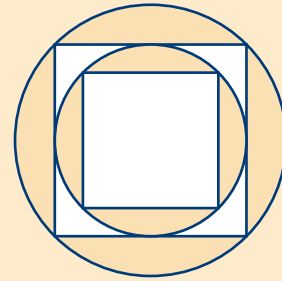
Alle punten op afstand 3 cm van het punt M vormen een cirkel. M heet het **middelpunt** en de **straal** van de cirkel is 3 cm.

- 5 Probeer met je geodriehoek nauwkeurig een driehoek te tekenen waarvan de zijden 2, 3 en 4 cm lang zijn.

Dat valt niet mee! Als je twee zijden op de goede lengte hebt gebracht, moet je die zijden nog draaien om de derde zijde passend te krijgen.

Het kan handiger met je passer. Hoe dat gaat, wordt op de volgende bladzijde uitgelegd.

- 2 Hieronder zie je een cirkel, met daarin een vierkant, met daarin een cirkel, met daarin een vierkant, allemaal precies passend. Je kunt zo eindeloos doorgaan.



Teken met passer en geodriehoek zo'n figuur met drie cirkels en drie vierkanten in elkaar.



1.1 PASSER EN GEODRIEHOEK

4 cm

Eerst één zijde tekenen. Bijv. die van 4 cm.

Dan gebruik je de passer één keer met 2 cm tussen de passerpunten. Eén keer met 3 cm tussen de passerpunten.

2 cm 3 cm

4 cm

Na kan je de twee andere zijden tekenen

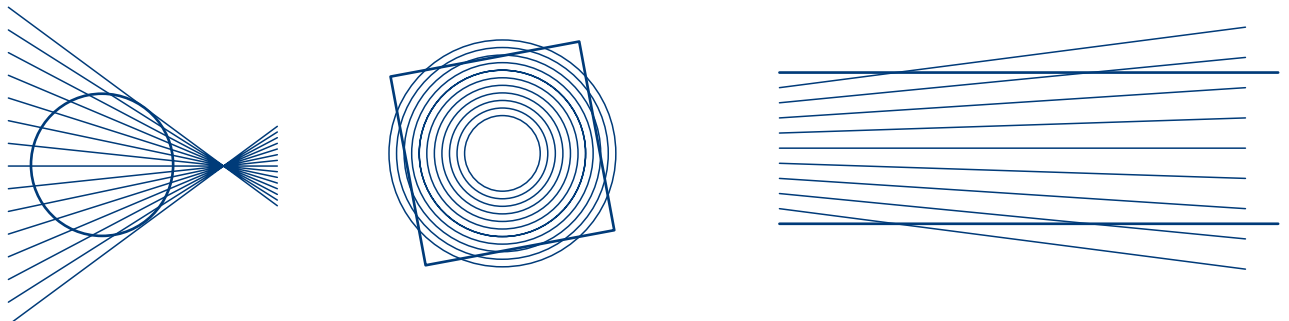


Je kunt het ook fraai zien in applet 1.1 - Met gegeven lijnen.

- 6 a Teken op deze manier (dus met behulp van twee passerboogjes) een driehoek waarvan de zijden 3, 4 en 5 cm lang zijn.
 b Teken ook een driehoek met drie zijden van 3 cm.

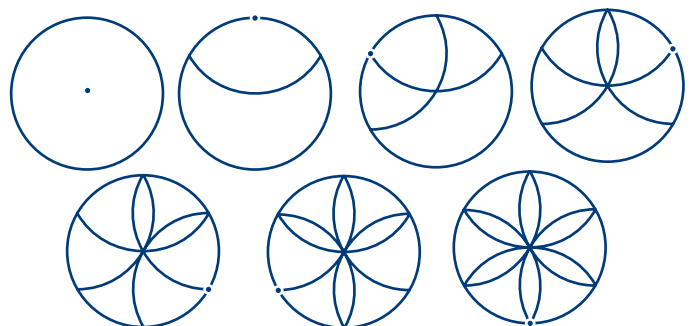
- 6 a Waarom bestaat er geen driehoek met zijden 2, 5 en 8 cm?
 b Van een driehoek zijn twee zijden 2 en 5 cm. Hoe lang kan de derde zijde zijn?
 c Van een vierhoek hebben drie zijden lengte 1, 2 en 5 cm. Hoe lang kan de vierde zijde zijn?

- 7 Hieronder staan drie twijfelachtige plaatjes.



Is de cirkel echt een cirkel? (plaatje links)
 Is het vierkant echt een vierkant? (plaatje midden)
 Zijn de (dikke) lijnen **evenwijdig** (dat wil zeggen: overal even ver van elkaar af)? (plaatje rechts)
 Verzin een manier om dat te controleren. Schrijf op hoe jij dat gedaan hebt.

- 8 a Teken een cirkel met straal 3 cm. Teken daarin een "bloem". Hoe je dat doet, staat stap voor stap hier naast.
 b Teken met behulp van zo'n bloem een Davidster. Je mag er natuurlijk ook je geodriehoek bij gebruiken.



Met de geodriehoek kun je ook goed een rechte hoek tekenen. Hieronder staat een manier waarop je dat kunt doen.

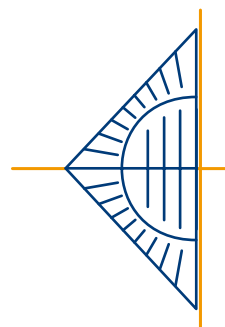
1. Teken een lijn.



2. Leg het midden van de geodriehoek over die lijn.



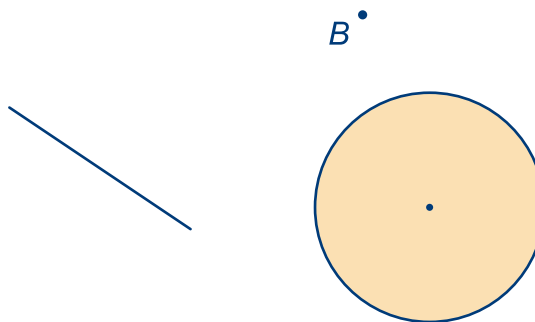
3. Teken een tweede lijn die haaks staat op de eerste lijn.



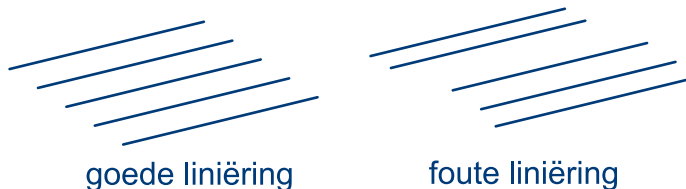
Je kunt dat ook in applet 1.2 - Loodlijn gedemonstreerd zien.

We zeggen dat de twee lijnen **loodrecht** op elkaar staan.

- 9 Teken een eerste lijn met daarop een punt A . Teken ook een punt B , dat niet op de lijn ligt.
- Teken met je geodriehoek een tweede lijn die de eerste lijn loodrecht snijdt in A .
 - Teken ook een lijn die door B gaat en die loodrecht staat op de eerste lijn.
 - Wat weet je van de onderlinge ligging van de tweede en de derde lijn die je getekend hebt?



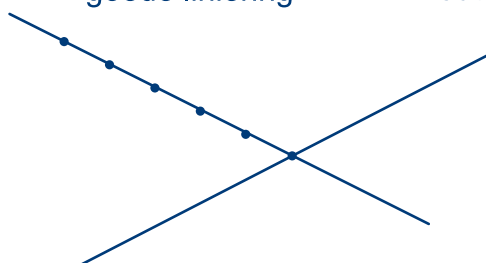
- 10 De vier zijden van een vierkant zijn even lang en de vier hoeken zijn recht.
- Teken een lijnstuk zoals hiernaast. Teken - zonder te meten - een vierkant waarvan dit lijnstuk een zijde is. Tip: gebruik je passer.
 - Teken een cirkel zoals hiernaast en geef daarin het middelpunt aan. Teken een vierkant waarvan de hoekpunten op de cirkelrand liggen. Schrijf ook op hoe je te werk bent gegaan.



Om een serie evenwijdige lijnen te tekenen, kun je je geodriehoek goed gebruiken. Daar staan namelijk al evenwijdige lijnen op! Met behulp van die lijnen kun je je geodriehoek in de goede richting leggen.

Als een stel evenwijdige lijnen onderling op gelijke afstand liggen, spreken we van een **liniëring**.

- 11 Teken twee lijnen zoals hiernaast. Pas op de ene lijn vanaf het snijpunt vijf keer hetzelfde stuk af. Zodoende krijg je vijf punten op die lijn. Trek door deze punten lijnen evenwijdig aan de andere lijn. Zodoende maak je een liniëring.



In applet 1.3 - Liniëring kun je deze maken.

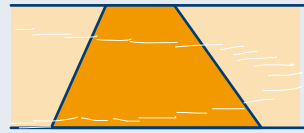
1.2 VIERHOEKEN



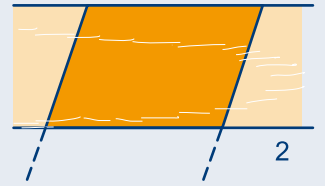
Van een plank zijn de boven- en onderkant evenwijdig. We zagen met twee rechte zaagsneden een vierhoek uit de plank. Dat kan op allerlei manieren, zoals je hiernaast ziet.

1. Omdat boven- en onderkant evenwijdig zijn, krijg je een **trapezium**.
2. Als je de zaagsneden in dezelfde richting maakt, krijg je een **parallellogram**.
3. Als je de plank beide keren haaks doorzaagt, krijg je een **rechthoek**.
4. Als je de zaagsneden in dezelfde richting maakt en er voor zorgt dat de vier zijden even lang worden, krijg je een **ruit**.
5. Als je de plank beide keren haaks doorzaagt en er voor zorgt dat de vier zijden even lang worden, krijg je een **vierkant**.

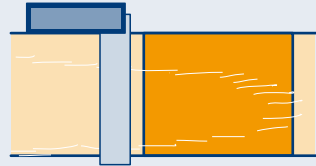
In het zesde plaatje is nog een bijzondere vierhoek getekend: een **vlieger**. Maar die zaag je niet zo gemakkelijk uit een plank. Bij een vlieger zijn twee aan elkaar grenzende zijden even lang en de andere twee aan elkaar grenzende zijden zijn ook even lang.



1



2



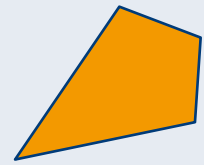
3



4



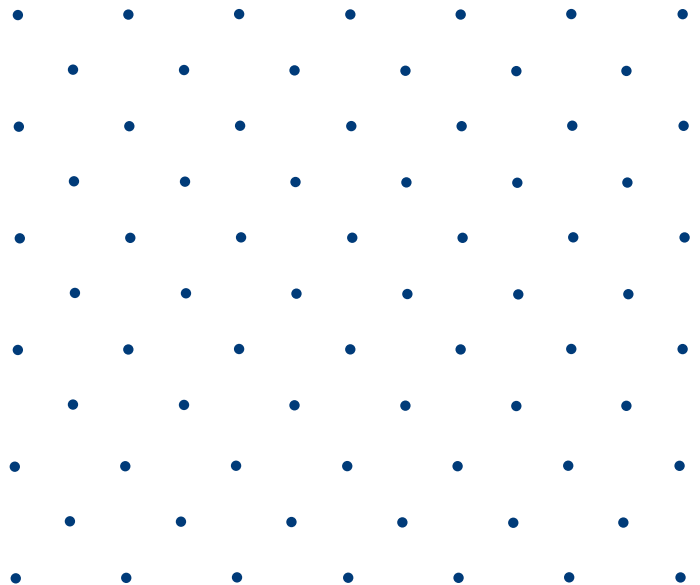
5



6



- 12 Zoek bijzondere vierhoeken in het rooster (de hoekpunten moeten roosterpunten zijn). Kleur op je werkblad de bijzondere vierhoeken die jij hebt gevonden, van elk type ten minste twee verschillende.



- 13 a Er zijn een heleboel ruiten met zijden van 2 cm. Teken er twee.
- b Er zijn een heleboel vliegers met zijden van 2 en 3 cm. Teken er twee.
- c Er zijn een heleboel parallellogrammen met zijden van 2 en 3 cm. Teken er twee.
- d Er zijn een heleboel trapezia waarvan de evenwijdige zijden 2 en 3 cm zijn. Teken er twee.

14 a



Hierboven staan vier trapezia (dat is het meervoud van trapezium).
 Het derde trapezium is bijzonder (dat wil zeggen: met extra evenwijdige zijden, of extra rechte hoeken, of extra even lange zijden).
 Wat is de bijzondere eigenschap?
 Hoe heet zo'n bijzonder trapezium?

b



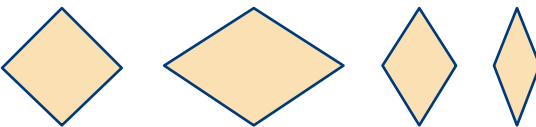
Hierboven staan vier parallellogrammen.
 Het tweede parallellogram is bijzonder.
 Wat is de bijzondere eigenschap?
 Hoe heet zo'n bijzonder parallellogram?

c



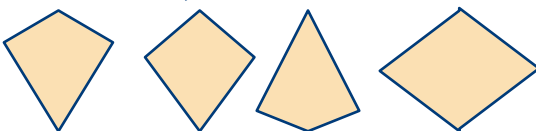
Hierboven staan vier ruiten.
 Het derde ruit is bijzonder.
 Wat is de bijzondere eigenschap?
 Hoe heet zo'n bijzonder ruit?

d



Hierboven staan vier ruiten.
 De eerste ruit is bijzonder.
 Wat is de bijzondere eigenschap?
 Hoe heet zo'n bijzondere ruit?

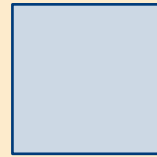
e



Hierboven staan vier vliegers.
 De vierde vlieger is bijzonder.
 Wat is de bijzondere eigenschap?
 Hoe heet zo'n bijzondere vlieger?

f Een vierhoek hoeft niet per se iets bijzonders te hebben; hij kan dus zonder evenwijdige zijden zijn en ook zonder gelijke zijden. Zo'n vierhoek is dus geen trapezium en ook geen vlieger.

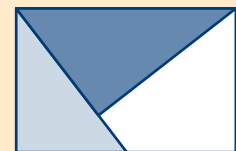
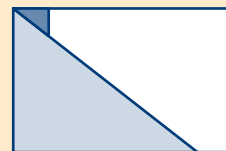
14 Hieronder staat een willekeurige vierhoek (die heeft niets bijzonders) en een vierkant (dat heeft alle bijzonderheden: alle zijden zijn even lang en alle hoeken zijn recht). Daar tussenin passen wat bijzonderheid betreft de andere vijf typen vierhoeken.



willekeurige vierhoek
 ↓
 toenemende bijzonderheid
 ↓
 vierkant

Geef de vijf bijzondere vierhoeken een plaats. Je moet dit dus zo doen: elke vierhoek van een type moet ook tot het type behoren dat daarboven staat.

- 15 a Kun jij een trapezium in twee stukken knippen waarmee je een parallellogram kunt leggen?
 b Kun jij een parallellogram in twee stukken knippen waarmee je een rechthoek kunt leggen?
 c Kun jij een vlieger in drie stukken knippen waarmee je een rechthoek kunt leggen?
 d Kun jij een parallellogram in twee stukken knippen waarmee je een ruit kunt leggen?
 e Er zijn twee manieren om een rechthoek in drie stukken te knippen, waarmee je een vierkant kunt leggen. Hieronder staan ze allebei.



Ga na hoe het werkt.

16 Als je Anneke vraagt om een vlieger te tekenen, of een parallellogram, of een trapezium, of een ruit, of een rechthoek, dan tekent ze altijd dezelfde figuur, namelijk het volgende plaatje:

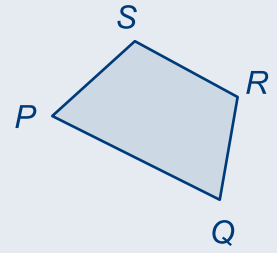
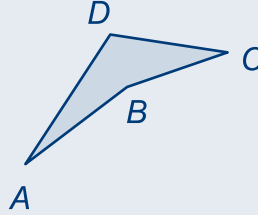


Doet Anneke het fout?

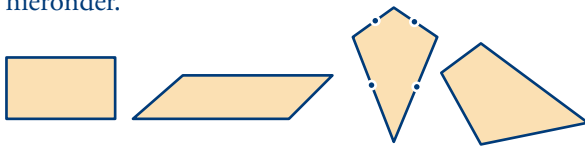
1.2 VIERTHOEKEN



Een vierhoek heeft vier hoekpunten. Vaak geven we die opvolgende hoekpunten namen, bijvoorbeeld A , B , C en D . Dan kunnen we spreken van vierhoek $ABCD$. Een vierhoek heeft ook vier zijden (de vier lijnstukken tussen de opvolgende hoekpunten). In het voorbeeld zijn de zijden AB , BC , CD en DA . In vierhoek $ABCD$ kun je ook de overstaande hoekpunten verbinden door een lijnstuk. De verbindingslijnstukken AC en BD heten de **diagonalen** van de vierhoek.



- 15 Teken een vlieger, een rechthoek, een parallellogram en een willekeurige vierhoek, ongeveer zoals hieronder.



Geef de middens van de zijden aan met een stip (zoals hierboven bij de vlieger al is gebeurd). Deze stippen zijn de hoekpunten van een vierhoek.

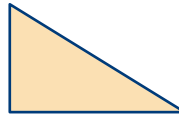
- Verbind bij de vlieger de opvolgende stippen en kleur de vierhoek die je zodoende krijgt. Wat voor bijzondere vierhoek is dat?
- Dezelfde opdracht bij de rechthoek, het parallellogram en de willekeurige vierhoek.



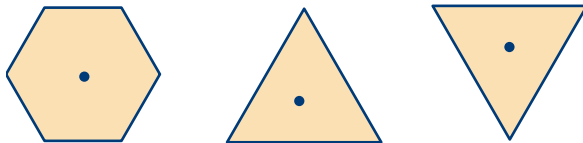
In applet 1.4 - Middens verbinden kun je dit voor allerlei andere vierhoeken zien.



- 16 De driehoek hiernaast heeft een rechte (haakse) hoek. Op het knipblad staan twaalf kopieën van deze driehoek. Knip die twaalf driehoeken uit. Pas steeds twee driehoeken tegen elkaar, zo dat ze of een driehoek of een vierhoek vormen. Je kunt zo zes figuren maken. Plak ze in je schrift en schrijf bij de vierhoeken wat voor bijzondere vierhoek hij is.



- 17 Hieronder staan een zeshoek en twee driehoeken. Voor het gemak zijn de middelpunten aangegeven.



- Verdeel op het werkblad de zeshoek in drie ruiten.
- Verdeel de ene driehoek in drie vliegers.
- Verdeel de andere driehoek in drie trapezia.

- 17 a Bij welke bijzondere vierhoeken staan de diagonalen loodrecht op elkaar?
 b Bij welke bijzondere vierhoeken delen de diagonalen elkaar middendoor?
 c Bij welke bijzondere vierhoeken zijn de diagonalen even lang?

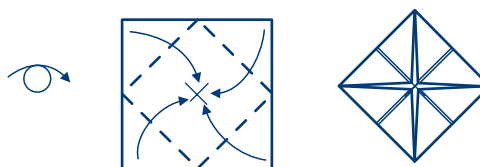
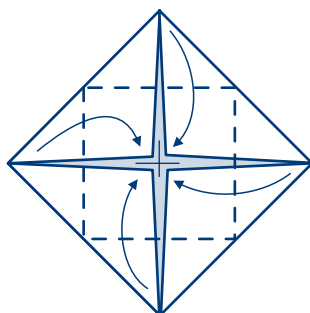
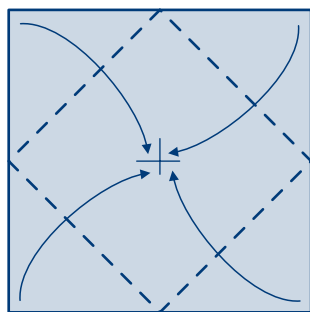
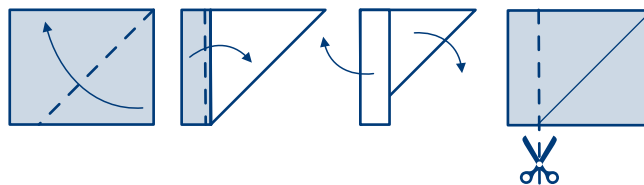


Een vierkant vouwen

Hiernaast zie je hoe je, zonder te meten, van een rechthoekig stuk papier nauwkeurig een vierkant kunt maken.

Neem een kladdblaadje en maak op deze manier een vierkant.

Neem een ander blaadje en scheur er de randen af. Vouw er nu, zonder te meten, precies een vierkant van.

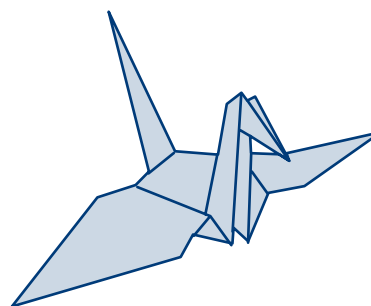
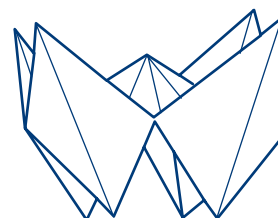


Peper-en-zoutstelletje

Neem een vouwblaadje. Vouw de punten naar binnen, zodat je een kleiner vierkant krijgt.

Keer het kleinere vierkant om en vouw weer de punten naar binnen, zodat je een nog kleiner vierkant krijgt. Keer het nog kleinere vierkant om en knijp de punten naar beneden, zodat je van boven een + ziet. Nu kun je de hoeken van het oorspronkelijke vierkant naar buiten trekken: je krijgt dan een "peper-en-zoutstelletje". Als je niet goed snapt hoe dit in zijn werk gaat, moet je het aan iemand vragen; er is beslist wel iemand die weet hoe het moet.

In Japan is het papiervouwen tot een kunst verheven: *origami*. Zie bijvoorbeeld: <http://www.origami.com/>



Wiskunde is een typisch Nederlands woord; (wis = zeker). In andere Europese talen heet wiskunde *mathematica* of iets wat daarop lijkt. Dat Nederland een afwijkend woord heeft, komt door de Vlaming *Simon Stevin* (1548-1620); die vond dat je aan Nederlandse woorden beter de betekenis kon zien dan aan woorden die aan het Latijn waren ontleend. Door hem spreken we van *evenwijdig* (in plaats van *parallel*), van *driehoek* (in plaats van *triangel*), van *meetkunde* (in plaats van *geometrie*), enzovoort. Stevin noemde een *ellips* een *scheefrontt*, maar dat is niet overgenomen.

1.3 REGELMAAT

Een omreken tabel

18 Vroeger had Nederland een eigen munt: de gulden. Op 1 januari 2002 is die vervangen door de euro. In het begin moesten de mensen nogal wennen aan de waarde van de euro. Sommige mensen gebruikten wel een lijstje, een spiekbriefje, waarop zij direct konden zien wat de waarde (in guldens) was van 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 en 25 euro. 1 euro is 2,2 gulden.

- Maak een tabel zoals hiernaast.
- Hoeveel gulden is 8 euro waard?
Met welk getal moet je het aantal euro's vermenigvuldigen om de waarde in guldens te krijgen?
- In januari 2002 kon je nog met guldens betalen. Als je geld terugkreeg, waren dat wel euro's. Anneke moest €17,50 betalen en geeft een briefje van 50 gulden.
Hoeveel euro zal Anneke terugkrijgen?

Het principe is steeds hetzelfde: bij elk bedrag in euro's moet je hetzelfde doen om er guldens van te maken. Als je het bedrag in euro's e noemt (en in het midden laat hoe groot e is), is het bijbehorende bedrag in guldens $2,2 \times e$.

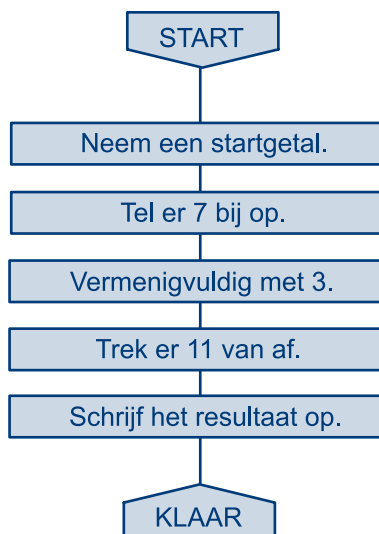
De letter e stelt hier dus een willekeurig getal voor. Omdat de waarde van e kan variëren, noemen we zo'n letter wel een **variabele**.

- Wat moet je doen als je wilt berekenen hoeveel euro een briefje van 25 gulden waard is?
Hoeveel euro is dat?
- Noem een aantal guldens g (dat is een variabele).
Wat is het bijbehorende aantal euro's?

euro's	1	2	3	5	10	15	20	25
guldens	2,2							

Blokschema's

- 19 Hiernaast staat een **blokschema**. Dat gaan we toepassen. Je moet gewoon de pijltjes in het blokschema volgen en doen wat er staat. Neem eerst als startgetal 10.
- Door de stappen in het blokschema daarmee uit te voeren, kom je op het getal 40. Ga na dat dat klopt.
 - Doorloop het blokschema ook met de volgende startgetallen: 11, 12, 15, 20, 37 en 100.
 - Welk startgetal moet je nemen om 10 als resultaat te krijgen?
 - Welk startgetal moet je nemen om 343 als resultaat te krijgen?

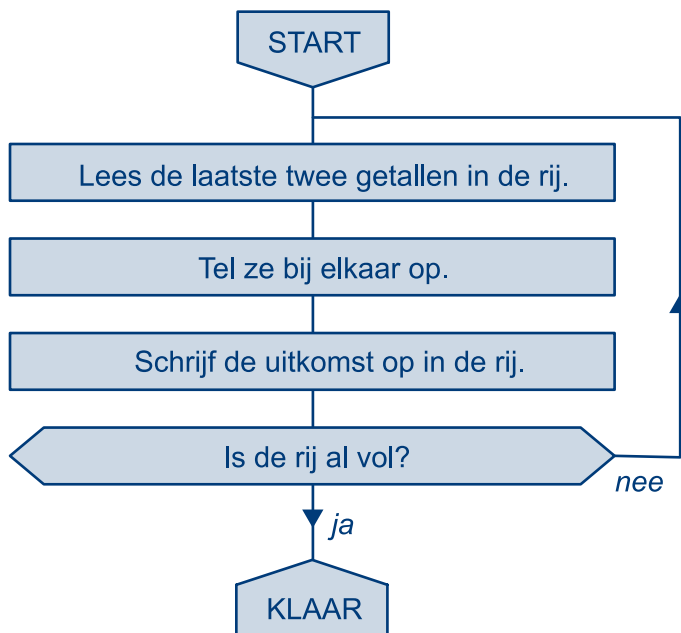


- 20 Hiernaast staat nog een blokschema. Daarmee gaan we een rij van tien getallen maken.



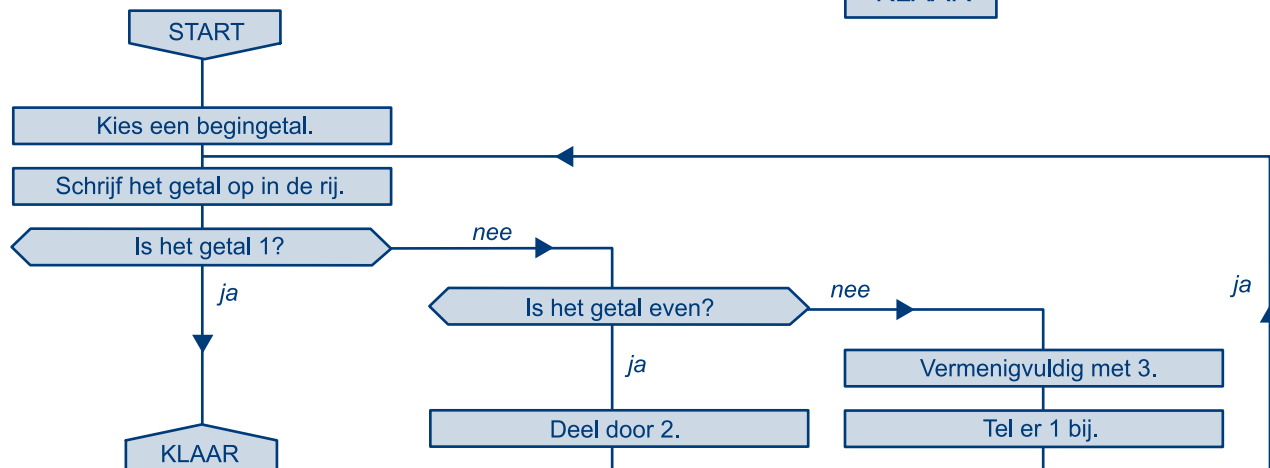
We beginnen met de getallen 1 en 2. Die staan al in de rij. Door het blokschema een keer te doorlopen, wordt het getal 3 aan de rij toegevoegd. Ga dat na.

De laatste twee getallen van de rij zijn nu 2 en 3. Werk het blokschema door.



- 21 Nog een blokschema. We kiezen als begingetal 3; dat moeten je dus opschrijven. Het blokschema berekent daarbij het getal 10. Dat moet je achter het startgetal 3 schrijven.

a Werk het blokschema af.



- b Bij het blokschema kiezen we nu 11 als begingetal. Werk het blokschema daarmee door.
- c We kiezen nu een zodanig getal dat we na drie keer het blokschema doorlopen te hebben klaar zijn. Welk begingetal is dat? Werk daarmee het blokschema door.
- d Je kunt het blokschema natuurlijk ook met andere begingetallen doorwerken. Als je zin hebt, probeer er dan nog maar een paar.

Soms duurt het lang voordat je op "1" uitkomt (en dan pas ben je klaar met het blokschema). Als je bijvoorbeeld 27 als begingetal neemt, duurt het 111 stappen voordat je op "1" bent. Voor alle getallen onder 1 miljard is nagegaan hoe lang het duurt voordat je op "1" uitkomt. Het bleek dat je bij al die getallen ten slotte op "1" uitkwam. Maar niemand weet of er misschien boven 1 miljard een begingetal bestaat, waarbij je helemaal nooit op "1" uit zult komen.

1.3 REGELMAAT

Tovervierkanten

- 22 Hieronder staan de getallen 1 tot en met 16 in een vierkant. Elk getal komt één keer voor. Ze zijn op een bepaalde manier over de zestien velden verdeeld.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

- a Wat is de som van de vier getallen in de eerste (horizontale) rij?



De **som** van getallen is het getal dat je krijgt als je die getallen optelt.

- b Wat is de som van de getallen in de tweede rij, van de getallen in de derde rij en van de getallen in de vierde rij?
 c Wat is de som van de getallen in de (verticale) kolommen?
 d Wat is de som van de vier getallen, die op de ene diagonaal staan? En die op de andere diagonaal staan?

Kennelijk zijn de getallen op een heel bijzondere manier over de zestien velden verdeeld. We spreken wel van een *tovervierkant* of *magisch vierkant*.



- 23 We gaan een tovervierkant maken van 3 bij 3 velden. In elk veld komt een van de getallen 1 tot en met 9 te staan. Dat moet zó gebeuren dat de som voor elke rij, voor elke kolom en voor elke diagonaal hetzelfde is. Volgens een legende zag de Chinese keizer Yu vierduizend jaar geleden dit tovervierkant op de rug van een schildpad.

- a Als je alle negen getallen van 1 tot en met 9 optelt, welke som krijg je dan?
 b De som van de drie getallen in de eerste rij moet gelijk zijn aan de som van de drie getallen in de tweede rij en moet ook gelijk zijn aan de som van de drie getallen in de derde rij. Wat moet deze som dus zijn?
 c De kolommen en de diagonalen moeten dezelfde som geven. Probeer de getallen 1 tot en met 9 op de rug van de schildpad te plaatsen zodat een tovervierkant ontstaat. We verraden dat de 5 in het midden komt. Als het niet meteen lukt, probeer het dan nog eens.



- 22 a Ontdek de regelmaat in de vier tabellen hieronder vul ze verder in.

1	2	3	4	5	6	7	20
3	6	9	12	15					

1	2	3	4	5	6	7	20
1	3	5	7	9					

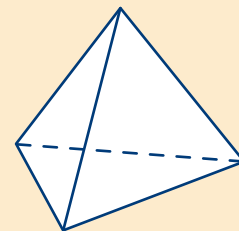
1	2	3	4	5	6	7	20
24	23	22	21	20					

1	2	3	4	5	6	7	20
1	4	9	16	25					

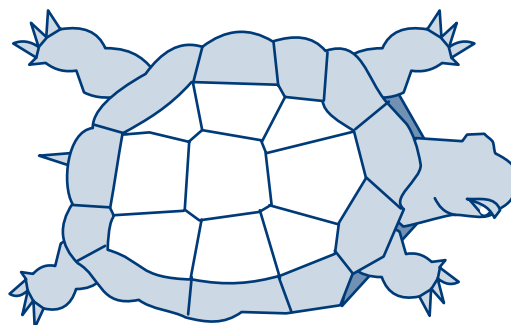
- b Als we het getal in de eerste regel van een tabel n noemen, wat is dan het getal in de tweede regel?



- 23 We gaan de getallen 1 t/m 15 plaatsen bij het vier vlak. Op elk van de hoekpunten komt een getal, op elke ribbe, op elk grensvlak en binnen in het viervlak. Dat moet zó gebeuren dat
- het getal op een ribbe de som is van de getallen op de eindpunten van die ribbe,
 - het getal op een grensvlak de som is van de getallen op de hoekpunten van dat grensvlak,
 - het getal binnen in het hele viervlak de som is van de getallen op de hoekpunten van het viervlak.



Ga je gang.

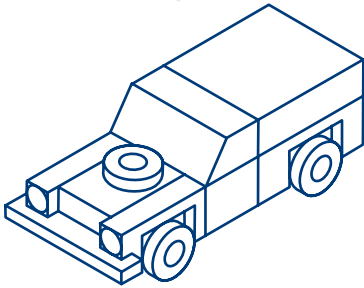


1.4 RUIMTELIJKE VORMEN

Namen van ruimtelijke figuren

Sommige *platte* figuren hebben een eigen naam; bijvoorbeeld *ruit*, *cirkel* en *zeshoek*. Ook *ruimtelijke* figuren kunnen hun eigen naam hebben.

- 24 Hiernaast staan twaalf ruimtelijke figuren. Bij vijf figuren is de naam al geschreven.
- Wat zijn de namen van de andere zeven figuren?
 - Zoek in de tekening hieronder zoveel mogelijk voorbeelden van bekende ruimtelijke vormen.



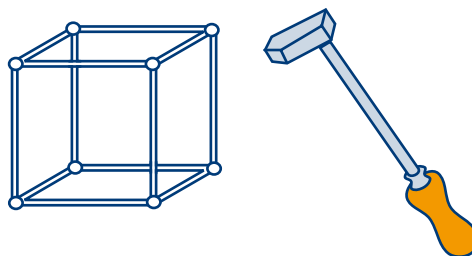
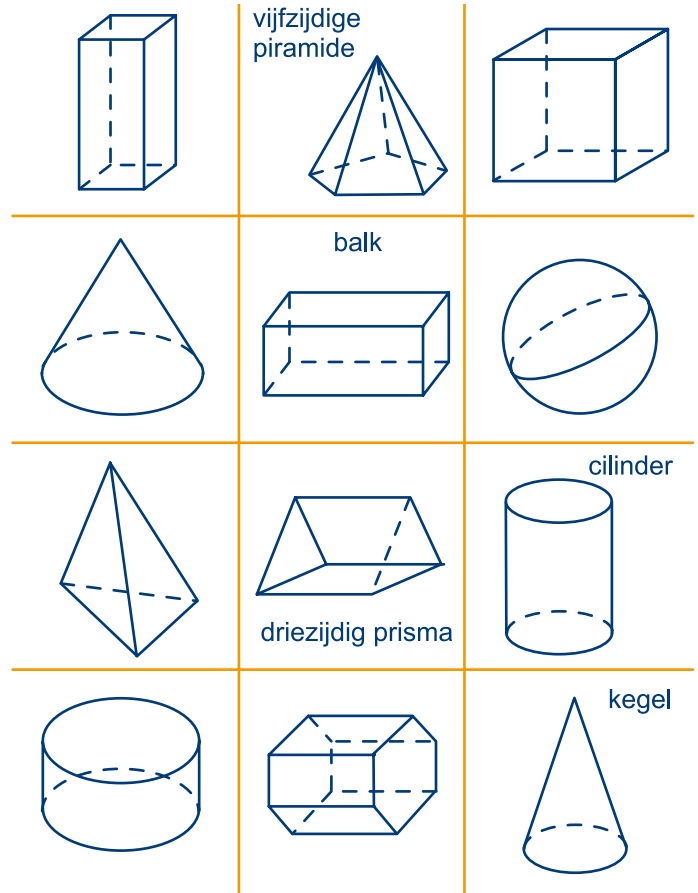
- Je kent natuurlijk wel voorbeelden van een bol in het dagelijks leven: een (voet)bal of een knikker. Geef zo ook een voorbeeld uit het dagelijks leven van een kubus, een cilinder, een piramide, een kegel en een driezijdig prisma.
- Een balk heeft alleen maar platte grensvlakken. Een cilinder heeft één gebogen en twee platte grensvlakken. Hoe zit dat met een piramide, een kegel, een bol en een prisma?

Tekenen van ruimtelijke vormen


- 25 Van rechte, ijzeren staafjes kun je een kubus maken. Je moet dan een aantal staafjes aan elkaar solderen. Zodoende krijg je een **draadmodel** van de kubus. Hiernaast is zo'n draadmodel getekend.
- Stel dat je een kubus van 20 bij 20 bij 20 cm wilt solderen. Hoeveel staafjes van 20 cm heb je dan nodig? Op hoeveel plaatsen moet je de staafjes aan elkaar solderen?

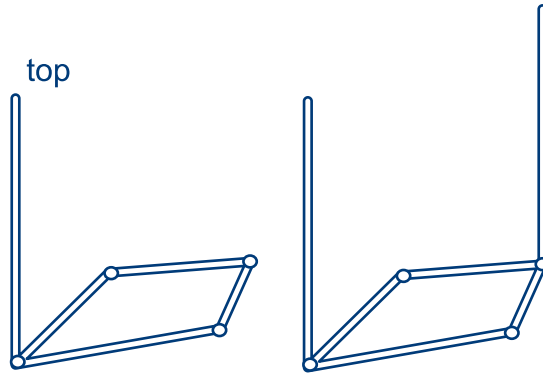
Stel dat je een balk wilt solderen die half zo hoog is als de kubus en drie keer zo breed is als de kubus.


- Hoeveel staafjes van welke lengte heb je dan nodig?
- Maak een tekening op schaal van het draadmodel van de balk.
- Een balk heeft zes grensvlakken die twee aan twee evenwijdig zijn. Twee grensvlakken die niet evenwijdig zijn, staan haaks op elkaar (maken een rechte hoek). Voor een kubus geldt dat ook. Een kubus is dus een speciale balk. Welke speciale eigenschap heeft de kubus?



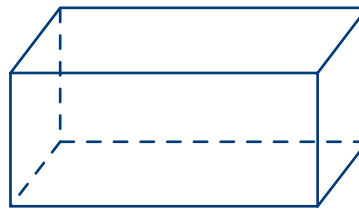
1.4 RUIMTELIJKE VORMEN


-  **26** Op je werkblad zijn van een draadmodel de vier staafjes van het grondvlak getekend en nog een of twee staafjes. De draadmodellen zijn nog niet af.
- Maak er in het linker plaatje een vierzijdige piramide van.
 - Maak er in het rechter plaatje een vierzijdig prisma van.
- 27 a** Wat weet je van het grondvlak en het bovenzvlak van een prisma? Hoe zit dat bij een piramide?
- Leg uit dat een balk een speciaal soort prisma is. Een hoeveelzijdig prisma?
 - Hoeveel staafjes heb je voor een vierzijdige piramide nodig? Op hoeveel plaatsen moet je die staafjes aan elkaar solderen? Hoeveel grensvlakken heeft een vierzijdige piramide? (Het laatste antwoord is niet 4.)
 - Dezelfde vragen voor een vierzijdig prisma.

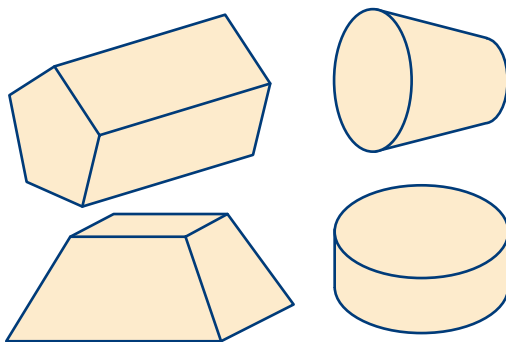


 De staafjes van een draadmodel heten wel de **ribben** van de ruimtelijke vorm; de plaatsen waar gesoldeerd moet worden heten de **hoekpunten**.

Hiernaast is een balk getekend. Anders dan bij een draadmodel, moet je de **grensvlakken** nu dicht denken, bijvoorbeeld alsof ze van karton zijn. De ribben die aan de achterkant zitten kun je dus niet zien. Daarom zijn ze *gestippeld*. Op deze manier geef je “diepte” aan de tekening. Als je gewend bent aan deze manier van tekenen, zie je beter hoe de vorm er in werkelijkheid uitziet.

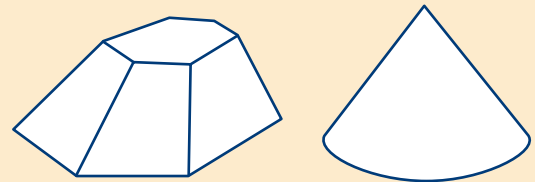


-  **28** Er staan hieronder vier figuren: een vijfzijdig prisma, een afgeknotten kegel, een afgeknotten vierzijdige piramide en een cilinder.



- Stippel op het werkblad in elk van de plaatjes de lijnen aan de achterkant. Bij opgave **24** vind je voorbeelden.
- Kun jij het woord *afgeknotten* in “afgeknotten kegel” en “afgeknotten piramide” verklaren?

-  **28** Hieronder staan een afgeknotten zeszijdige piramide en een kegel.



- Teken in het werkschrift de ontbrekende ribben aan de achterkant van de afgeknotten zeszijdige piramide (stippelen).
- Teken de achterkant van de rand van de kegel. Teken ook hoe de kegel er gaat uitzien als je hem op halve hoogte afknot.



Hoeveel vlakken, ribben, hoekpunten?

- 29 a** Teken een vijfzijdig prisma met de ribben die je niet ziet gestippeld.
- b** Een vijfzijdig prisma heeft zeven grensvlakken in twee soorten: rechthoeken en vijfhoeken. Hoeveel van elke soort?
- c** Wat voor soort grensvlakken heeft een driezijdig prisma? Hoeveel van elke soort?
- d** Maak een tabel zoals hiernaast.
In de laatste regel van de tabel staat “ n -zijdig prisma”. Hier kan n elk geheel getal voorstellen dat 3 of groter is. n is een variabele. In je antwoorden voor de aantallen grensvlakken, ribben en hoekpunten moet je de letter n gebruiken.
- e** Bestaat er een prisma met precies 50 ribben? Zo ja, hoeveel-zijdig? Zo nee, waarom niet?
- f** Bestaat er een prisma met precies 50 hoekpunten?
- 30 a** Teken een vijfzijdige piramide met de ribben die je niet ziet gestippeld.
- b** Een vijfzijdige piramide heeft zes grensvlakken in twee soorten. Welke soorten en hoeveel van elke soort?
- c** Wat voor soort grensvlakken heeft een driezijdige piramide? Hoeveel?
- d** Maak net zo'n tabel als bij opgave **29**, maar nu voor piramides.
De laatste regel van de tabel gaat over een “ n -zijdige piramide”. Hier kan n elk geheel getal voorstellen dat 3 of groter is.
- e** Bestaat er een piramide met precies 25 ribben?
- f** Bestaat er een piramide met precies 25 hoekpunten?

prisma	aantal vlakken	aantal ribben	aantal hoekpunten
driezijdig			
vierzijdig			
vijfzijdig			
zeszijdig			
tienzijdig			
100-zijdig			
123-zijdig			
n -zijdig		$3 \times n$	

1.5 VOLGORDE

Gebruik van haakjes

- 31 Anneke rekent $5+4 \times 3$ uit; ze vindt 27 als antwoord.
Vinja rekent ook $5+4 \times 3$ uit; zij vindt 17 als antwoord.
- a Hoe kan dat nou? Hoe hebben Anneke en Vinja hun antwoorden gevonden.

Wie van de twee het goed gedaan heeft, is een kwestie van afspraak. Wat moet je het eerst doen, $5+4$ uitrekenen of 4×3 uitrekenen?

We spreken het volgende af.
Als je in een berekening moet optellen (of aftrekken) en ook moet vermenigvuldigen (of delen), dan zullen we eerst vermenigvuldigen (of delen) en daarna pas optellen (of aftrekken).

b Wat is dus de juiste uitkomst van de som $5+4 \times 3$?

- 32 a Maak de volgende berekeningen. Schrijf ook een tussenstap op. De eerste en tweede berekening zijn als voorbeeld al gemaakt.

$$11 + 5 \times 2 = 11 + 10 = 21$$

$$11 - 5 \times 2 = 11 - 10 = 1$$

$$10 + 2 \times 3 + 4$$

$$10 - 2 \times 3 + 4$$

$$6 \times 7 + 5 \times 6$$

$$6 \times 7 - 5 \times 6$$

b Bereken:

$$100 + 10 : 2 \qquad 100 + 10 + 2$$

$$100 \times 10 : 2 \qquad 100 \times 10 + 2$$

$$100 - 10 : 2 \qquad 100 - 10 + 2$$

$$100 : 10 : 2 \qquad 100 : 10 + 2$$

De "spelregels" van het rekenen

- 1 Eerst binnen de (binnenste) haakjes.
- 2 Vermenigvuldigen en delen gaan voor optellen en aftrekken.
- 3 Bij vermenigvuldigen en delen van links naar rechts rekenen: het eerst doen wat je het eerst tegenkomt.
- 4 Bij optellen en aftrekken van links naar rechts rekenen: het eerst doen wat je het eerst tegenkomt.

Voorbeelden

$$12 \times (6 + 2) = 12 \times 8 = 96$$

$$12 + 6 \times 2 = 12 + 12 = 24$$

$$12 + 6 : 2 = 12 + 3 = 15$$

$$12 - 6 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$12 : 6 \times 2 = 2 \times 2 = 4$$

- 33 a Plaats haakjes zo dat de som klopt.

$$6 + 6 : 2 + 1 = 4$$

$$6 + 6 : 2 + 1 = 7$$

$$6 + 6 : 2 + 1 = 8$$

$$6 + 6 : 2 + 1 = 10$$

- b Maak door het plaatsen van haakjes zoveel mogelijk uitkomsten met $9 + 6 : 3 - 1$.

- 34** Nu gaan we een grotere berekening maken; eentje waarin je negen stappen moet doen. Daarvoor moet je heel zorgvuldig werken.
- a** Bereken de uitkomst van
 $1 + 6 : 3 + (7 - 4) + 2 \times 2 + 5 + 2 \times 3$
- Als je uit je berekening 21 hebt gekregen, hoef je vraag **b** niet meer te beantwoorden. In deze vraag word je namelijk geholpen het goede antwoord te vinden.
- b** Bereken eerst de som tussen de haakjes en voer dan alle vermenigvuldigingen en delingen uit. Dan krijg je zoiets: $1 + _ + _ + _ + _ + _$.
 Maak vervolgens de berekening af.

- 35 a** Nog een paar van zulke sommen. Schrijf enkele tussenstappen op.
 $(10 - 2 + 5 \times 8 : 2) : (4 + 3)$
 $10 - (2 + 5) \times 8 : 2 : 4 + 3$
 $10 - 2 + 5 \times 8 : 2 : 4 + 3$
 $10 - ((2 + 5) \times 8) : 2 : 4 + 3$
- b** Bereken:
 $2 : 2 \times 2 : 2 \times 2 : 2$
 $2 \times 2 : 2 \times 2 : 2 \times 2$
 $2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2$
 $2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2$

Wanneer haakjes er niet toe doen

- 36 a** Bereken; schrijf ook een tussenstap op.
 $12 + 4 + 2$ en $12 + (4 + 2)$
 $12 - 4 - 2$ en $12 - (4 - 2)$
 $12 \times 4 \times 2$ en $12 \times (4 \times 2)$
 $12 : 4 : 2$ en $12 : (4 : 2)$
- b** Bij welke sommen maakt het niets uit of er haakjes staan?
- Iemand heeft een getal in gedachten genomen. Dat getal noemen we a . Je weet niet welk getal a is; a is een variabele.
- c** Je moet bij a de getallen 4 en 2 optellen. Dat kan
 • met haakjes: $a + (4 + 2)$
 • en zonder haakjes: $a + 4 + 2$.
 Maakt het iets uit of er haakjes staan?
- d** Je moet van a de getallen 4 en 2 aftrekken. Dat kan
 • met haakjes: $a - (4 - 2)$
 • en zonder haakjes: $a - 4 - 2$.
 Maakt het iets uit of er haakjes staan?
- e** Je moet a met de getallen 4 en 2 vermenigvuldigen. Dat kan
 • met haakjes: $a \times (4 \times 2)$
 • en zonder haakjes: $a \times 4 \times 2$.
 Maakt het iets uit of er haakjes staan?
- f** Je moet a door de getallen 4 en 2 delen. Dat kan
 • met haakjes: $a : (4 : 2)$
 • en zonder haakjes: $a : 4 : 2$.
 Maakt het iets uit of er haakjes staan?

- 34** Naar een idee van de wiskundeolympiade 2005, 1e ronde

Je begint met het getal 8 en kunt de volgende operaties uitvoeren:

- A. vermenigvuldig met 10
 B. deel door 10
 C. tel er 10 bij op
 D. trek er 10 van af

De reeks ADBC levert als uitkomst 17 op.

- a** Welke reeks levert de grootste uitkomst op?
b Begin met het getal n (in plaats van 8).
 Schrijf bij de reeks ADBC de uitkomst op, uitgedrukt in de variabele n .
c Doe dat ook voor de reeksen DBCA en DCBA.

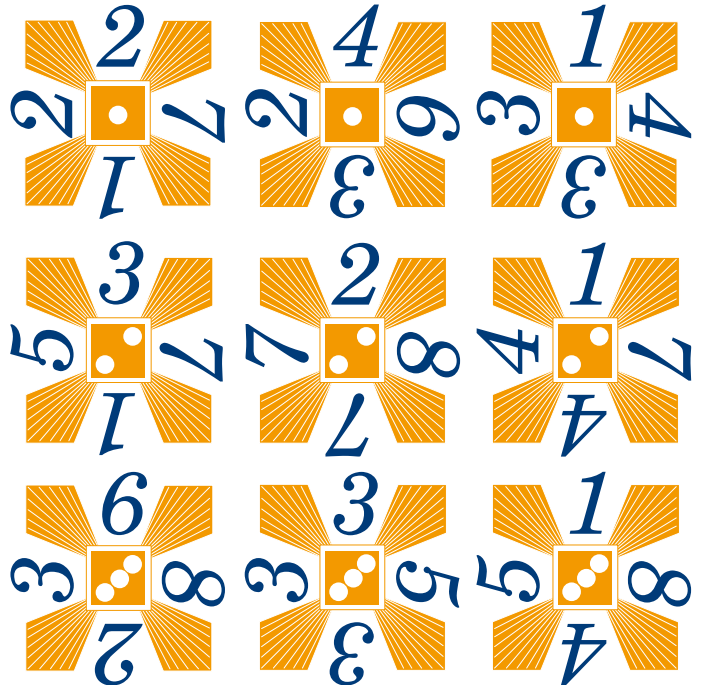
- 35 a** In de volgende som kun je haakjes schrijven zoals je wilt: $16 : 8 : 4 : 2 : 1$
 Welke mogelijke uitkomsten kun je krijgen?
b Dezelfde vraag voor $16 \times 8 \times 4 \times 2 \times 1$
c En voor $16 - 8 - 4 - 2 - 1$
d En voor $16 + 8 + 4 + 2 + 1$



1.5 VOLGORDE

37 In 1996 zaten er rekenflippo's in de zakken "Buggles" van Smith Chips. Hiernaast staat een voorbeeld van zo'n rekenflippo. Er staan vier cijfers op. Het is de bedoeling dat je door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met die vier cijfers het getal 24 maakt. Elk van de cijfers moet precies één keer gebruikt worden. De stippen in het midden geven de moeilijkheidsgraad aan: één stip is eenvoudig, drie stippen is moeilijk.

- a Los jij bovenstaande rekenflippo even op.
b Los zo ook de rekenflippo's hiernaast op. Schrijf je antwoord als één berekening, zoals hierboven. Als er haakjes nodig zijn, moet je die niet vergeten! Maar als je geen haakjes nodig hebt, mag je die ook niet gebruiken.



- c Verzin zelf een 24-rekenflippo waarbij je twee paar haakjes nodig hebt om de oplossing in één keer op te schrijven.
d Wil je meer rekenflippo's maken, kijk dan op de internetpagina van de Wageningse Methode. Maar je kunt ook zoeken naar andere sites met "flippo".

Hoeveel 24-rekenflippo's bestaan er eigenlijk? Die vraag is moeilijk te beantwoorden. Volgens het tijdschrift *Natuur en Techniek* (juni 1996) zijn er 404 rekenflippo's. Maar helemaal zeker is dat niet.



1.6 EINDPUNT

passer en geodriehoek

Een **passer** gebruik je om cirkels te tekenen.
Een cirkel heeft een middelpunt en een straal.
Met een passer kun je ook lengtes afpassen.
Een passer kun je goed gebruiken om een driehoek te tekenen waarvan de zijden gegeven lengtes hebben.

Met een **geodriehoek** kun je rechte lijnen tekenen, in het bijzonder:

- evenwijdige lijnen tekenen,
- lijnen loodrecht op elkaar tekenen.

soorten vierhoeken

Een **trapezium** heeft een paar evenwijdige zijden.
Een **parallelogram** heeft twee paar evenwijdige zijden.
Een **vlieger** heeft twee paar even lange zijden die aan elkaar grenzen.
Een **ruit** heeft vier even lange zijden.
Een **rechthoek** heeft vier rechte hoeken.
Een **vierkant** heeft vier rechte hoeken en vier even lange zijden.

ruimtelijke vormen

Voorbeelden van ruimtelijke vormen zijn:
balk, kubus, prisma, piramide, kegel, cilinder, bol.

Een balk, kubus, prisma, piramide hebben **hoekpunten**, **ribben** en **grensvlakken**.

Voorbeelden

Een vijfzijdige piramide heeft 6 grensvlakken, 6 hoekpunten en 10 ribben.
5 grensvlakken zijn driehoekig, 1 grensvak is een vijfhoek.

Een vijfzijdig prisma heeft 7 grensvlakken, 10 hoekpunten en 15 ribben.
5 grensvlakken zijn rechthoekig, 2 grensvlakken zijn (gelijke) vijfhoeken.

Voor een goede tekening van een ruimtelijke vorm moet je de ribben aan de achterzijde stippelen (als de grensvlakken tenminste dicht zijn).

regelmaat

Als je weet dat een broodje €1,60 kost, kun je een **tabel** maken waarin staat hoeveel verschillende aantallen broodjes kosten. Je kunt de tabel maken door het onderstaande **blokschema** te doorlopen



aantal	1	2	5	11	20	25
prijs (€)	1,6	3,2	8	17,6	32	40

n broodjes kosten dan $1,6 \times n$ euro.
Hierin is n een **variabele**.

de "spelregels" van het rekenen

- eerst binnen de (binnenste) haakjes
- vermenigvuldigen en delen gaan voor optellen en aftrekken
- bij vermenigvuldigen en delen van links naar rechts rekenen: het eerst doen wat je het eerst tegenkomt
- bij optellen en aftrekken van links naar rechts rekenen: het eerst doen wat je het eerst tegenkomt

Voorbeelden

$$\begin{array}{ll} 6 : 2 : 3 = 1 & 6 - 2 - 3 = 1 \\ 6 + 2 \times 3 = 12 & 6 - 2 \times 3 = 0 \\ 6 + 3 : 2 = 7\frac{1}{2} & 6 - 3 : 2 = 4\frac{1}{2} \end{array}$$

soms kun je haakjes weglaten, soms niet

$$\begin{array}{l} a + (4 + 2) = a + 4 + 2 \\ a - (4 - 2) \neq a - 4 - 2 \quad (\neq \text{ betekent: niet-gelijk}) \\ a \times (4 \times 2) = a \times 4 \times 2 \\ a : (4 : 2) \neq a : 4 : 2 \end{array}$$

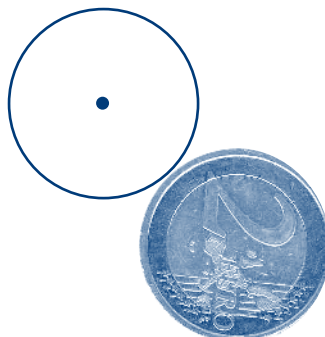
1.7 EXTRA OPGAVEN

- 1 a Teken heel precies een driehoek met zijden van 3, 5 en 6 cm.
 b Onderzoek met je geodriehoek of een van de hoeken haaks is.



- 2 Hiernaast is een 2-euro-muntstuk afgebeeld. We gaan daar zoveel mogelijk munten van 2 euro omheen leggen. Ze moeten allemaal het afgebeelde 2-euro-muntstuk raken.

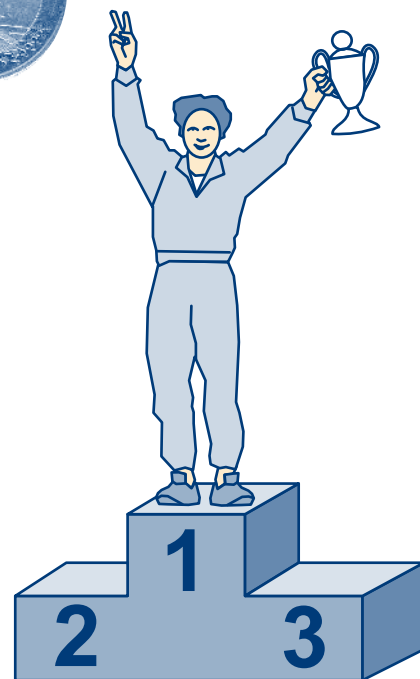
- a Teken in je werkschrift met behulp van je passer waar de munten komen te liggen. Teken eerst een "bloem" zoals in opgave 7.
 b Hoeveel 2-euro-munten passen er op die manier om het afgebeelde 2-euro-muntstuk?



- 3 5 dm^3 (droog) zand weegt $7\frac{1}{2}$ kilogram.
 a Hoeveel weegt 18 dm^3 zand?
 b Wat moet je doen met een aantal dm^3 zand om zijn gewicht in kilogram te berekenen?
 c Noem het aantal dm^3 zand z . Hoeveel kilogram weegt $z \text{ dm}^3$ zand?
 d Hoeveel dm^3 zand weegt 45 kilogram?
 e Wat moet je doen om bij een gegeven gewicht te berekenen hoeveel dm^3 zand zoveel weegt?
 f Noem het aantal kilogram k . Hoeveel dm^3 zand weegt k kilogram?



- 4 Hiernaast is een erepodium getekend.
 a Stippel in je werkschrift de ribben aan de achterkant.
 b Hoeveel ribben heeft het erepodium? Hoeveel hoekpunten? Hoeveel grensvlakken?
 c Zo'n erepodium is wiskundig maar een rare vorm. Of toch niet. Iemand twijfelt of hij het nou een prisma of een piramide moet noemen. Wat vind jij? Hoeveel-zijdig?

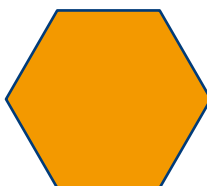


- 5 a Hoe zou jij iemand in woorden uitleggen wat het verschil is tussen een cilinder en een kegel?
 b Hoe zou jij iemand in woorden uitleggen wat het verschil is tussen een balk en een rechthoek?
 c Hoe zou jij iemand in woorden uitleggen wat het verschil is tussen een piramide en een kegel?

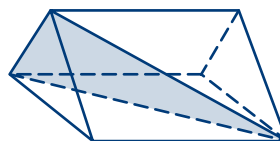
- 6 Bereken:
 $10 + 10 : 2 + 3$ $10 + 10 : (2 + 3)$
 $(10 + 10) : 2 + 3$ $10 + (10 : (2 + 3))$
 $10 \times 10 - 6 + 2$ $10 \times (10 - 6) + 2$
 $10 \times (10 - 6 + 2)$ $10 \times (10 - (6 + 2))$



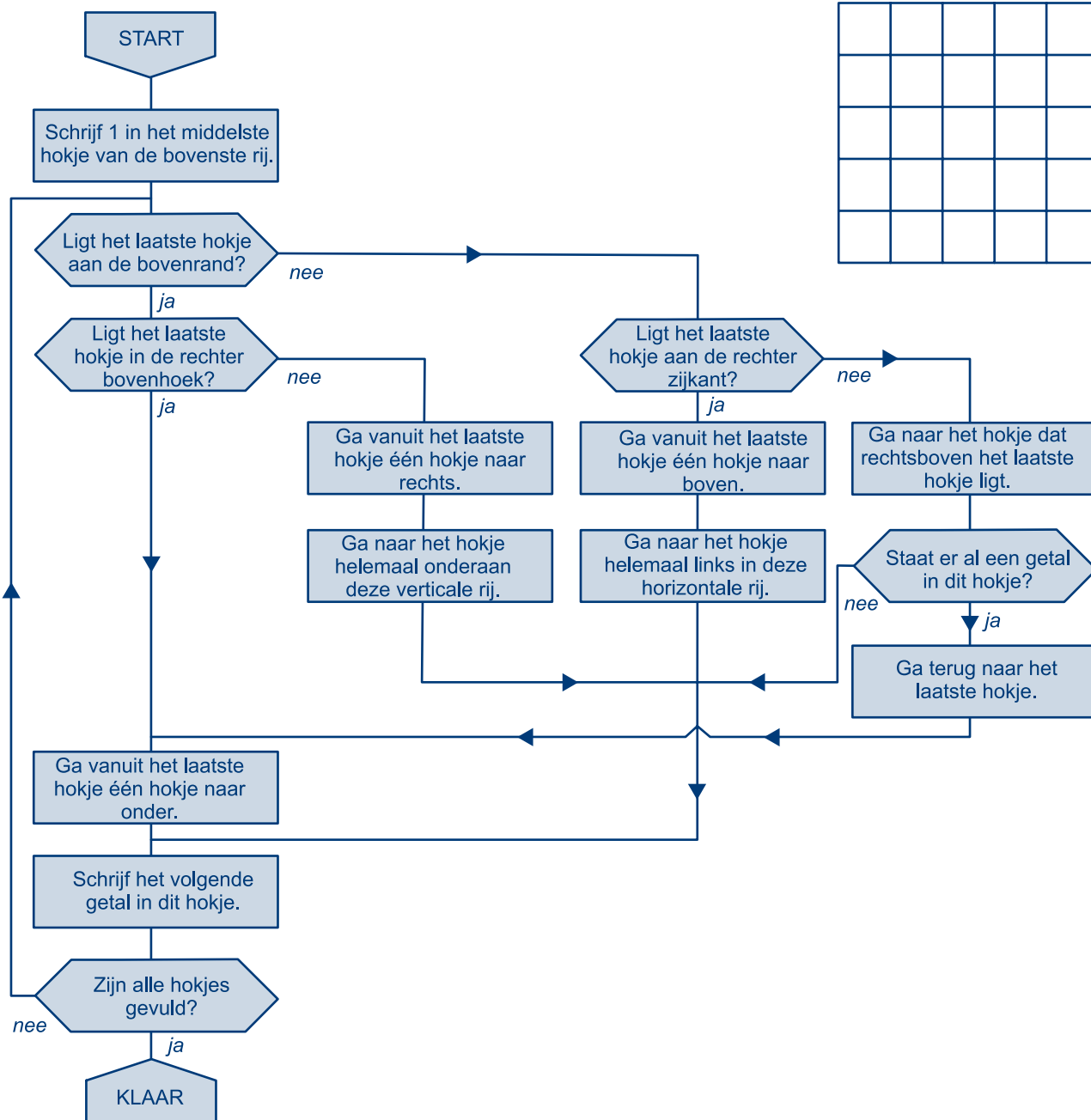
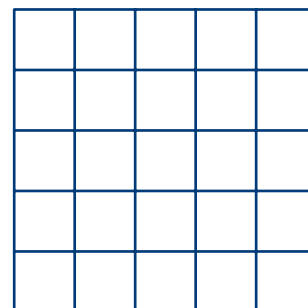
- 7 Als je in een regelmatige zeshoek twee diagonalen trekt, wordt de zeshoek verdeeld in drie of vier stukken. Die stukken kunnen driehoekig en vierhoekig zijn. Teken in je werkschrift alle mogelijk echt verschillende situaties. Zeg van elke vierhoek van welk bijzonder soort hij is.



8 Hiernaast is een driezijdig prisma getekend. Het is in twee stukken verdeeld door het blauwe vlak. Geef de volledige naam van beide stukken.



9 Hiernaast staat een vierkant van 5 bij 5 hokjes. Door het blokschema hieronder te volgen krijg je een tovervierkant. Hetzelfde blokschema is ook geschikt om tovervierkanten te maken van 7 bij 7 hokjes, van 9 bij 9 hokjes, enzovoort. Maak het 5 bij 5 tovervierkant.





Veelvlak Marathon
Rotterdam