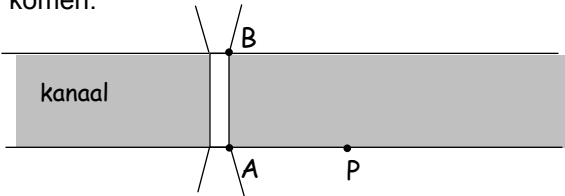


Kanaalbrug

Tussen twee peilers A en B ligt een brug over een kanaal. De peilers staan aan de oevers van het kanaal. De brug steekt het kanaal recht over. Je wilt de afstand tussen de twee peilers weten. Hiernaast kun je lezen hoe je dat te weten zou kunnen komen.



Dat kan als volgt. Je loopt vanuit A langs het kanaal tot een punt P.

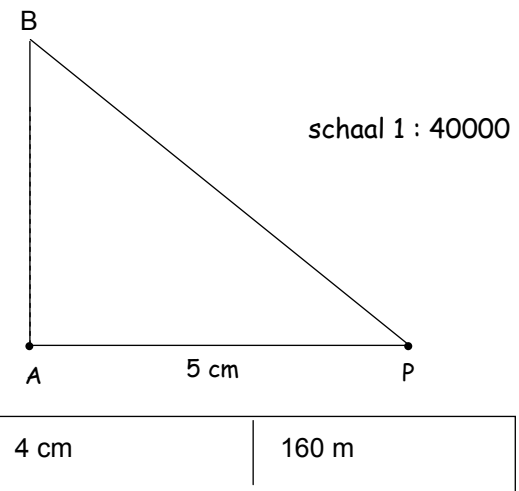
- Je meet de afstand van A tot P.
- In P meet je $\angle APB$.

Die hoek zou je kunnen meten door met een kijker vanuit P op A te richten en vervolgens de kijker op B te richten. De hoek waarover de kijker dan gedraaid wordt, is $\angle APB$.

- Dan maak je een tekening op schaal.

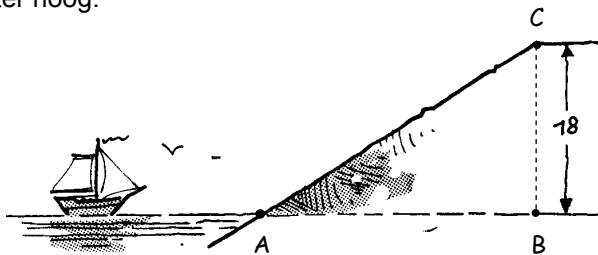
Veronderstel: $AP = 200$ meter en $\angle APB = 39^\circ$.

- » Maak hiernaast de tekening op schaal van driehoek ABP af.
- » Maak driehoek ABP af.
- » Welke schaal heb je gebruikt? Vul dat in. (AP is in werkelijkheid 200 meter.)
- » Meet in de tekening nauwkeurig de zijde AB. Hoe lang is de brug tussen de peilers in werkelijkheid?

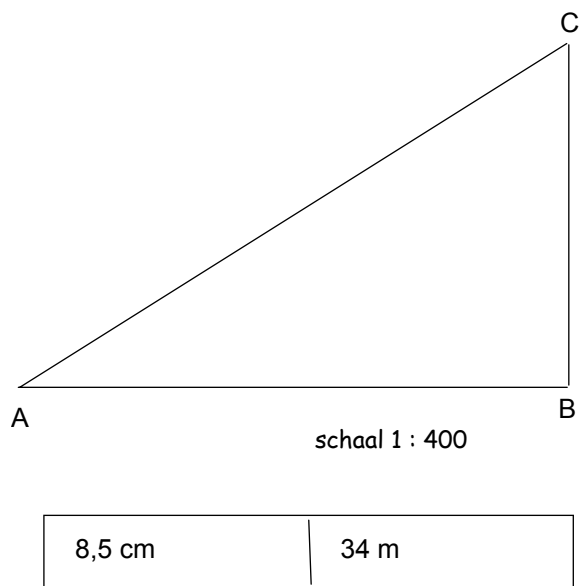


Zeedijk

Een zeedijk heeft een hellingshoek van 32° ; dat is de hoek die de helling van de dijk maakt met een horizontaal vlak, in de tekening: $\angle CAB$. De dijk is 18 meter hoog.

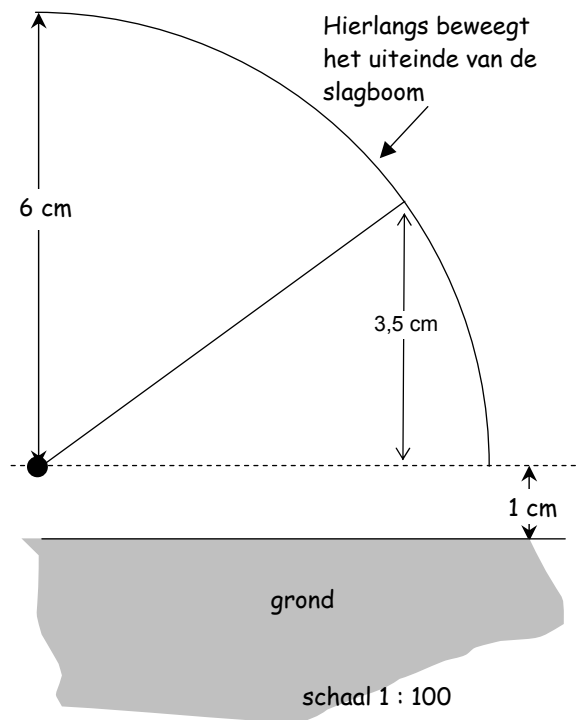


- » Maak een tekening op schaal van driehoek ABC, neem voor $BC = 4\frac{1}{2}$ cm. (Hoek B is recht.)
- » Wat is de schaal (vul in)?
- » Meet nauwkeurig hoe lang de dijhelling AC is in de tekening. Wat is de afmeting van de dijhelling in werkelijkheid?



Slagboom

Een slagboom is 6 meter lang (gemeten vanaf het draaipunt). In horizontale stand is hij 1 meter boven de grond. Van daaruit wordt de slagboom omhoog gehesen: de top is op een gegeven moment 4,5 meter boven de grond.

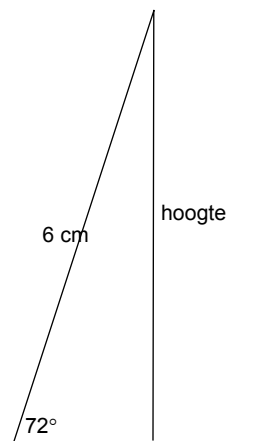
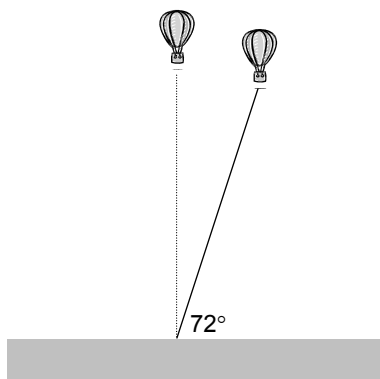


- » Maak de tekening op schaal af. Welke schaal is gebruikt? (Invullen)
- » Meet nauwkeurig over welke hoek de slagboom is gedraaid.

35° of 36°

Een ballon

Een ballon is met een touw van 30 meter aan de grond bevestigd. Als het windstil is, is het touw verticaal. Vandaag waait het erg hard; het touw maakt nu een hoek van 72° met de grond.



- » Maak een tekening op schaal van de situatie. Welke schaal gebruik je?
- » Hoe hoog is de ballon nu boven de grond?

schaal 1 : 5000

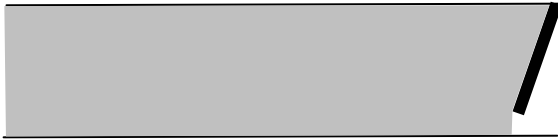
28 of 29 m.

Opmerking

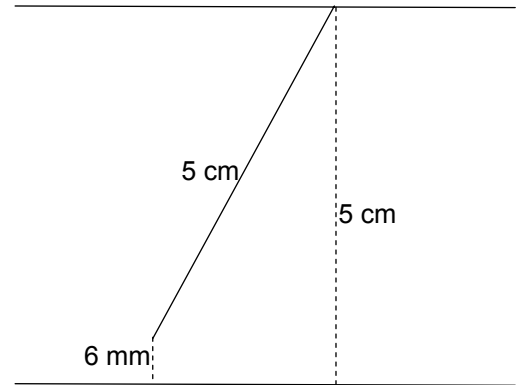
Het is lastig om nauwkeurig te werken. Een kleine onnauwkeurigheid in de tekening kan al grote afwijkingen geven in het antwoord. (Vergelijk jouw antwoord maar eens met het antwoord van je burens.)

Op een kier

Een lange gang is halverwege afgesloten door een zware deur van 1 meter breedte. Op een gegeven moment staat de deur op een kier. De spleet is precies breed genoeg om de kat erdoor te laten glippen. De kat is 12 cm breed.



- » Maak een tekening op schaal van de situatie. Welke schaal gebruik je?
- » Over hoeveel graden is de deur opengedraaid?



schaal 1 : 20

28° of 29°

De grootte van een hoek verandert niet bij het maken van een tekening op schaal.

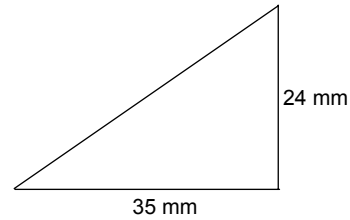
Bij het maken van de tekeningen op schaal heb je gezien dat een **rechthoekige** driehoek vastligt in de volgende gevallen:

- als je twee zijden van de driehoek kent;
- als je een zijde en een hoek (een andere dan de rechte hoek) kent.

Een driehoek tekenen 1

Van een rechthoekige driehoek zijn de rechthoekszijden 24 en 35 mm.

» Maak een tekening.



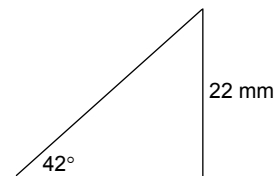
» Hoe groot zijn de hoeken?

ongeveer 34° , 56° (en 90°)

Een driehoek tekenen 2

Van een rechthoekige driehoek is een hoek 42° en is de rechthoekszijde tegenover die hoek 22 mm.

» Maak een tekening.



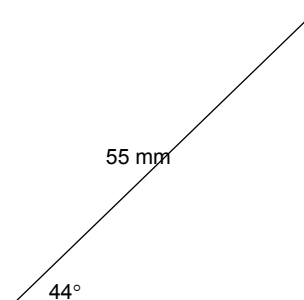
» Hoe groot zijn de andere zijden?

ongeveer 33 mm, 24 mm

Een driehoek tekenen 3

Van een rechthoekige driehoek is de schuine zijde 55 mm en is een hoek 44° .

» Maak een tekening.



» Hoe groot zijn de andere zijden?

ongeveer 38 en 40 mm

Een tekening maken gaat nooit helemaal precies. Het beste kun je de tekening behoorlijk groot maken; dan kun je namelijk nauwkeuriger werken. Het meten van een hoek of zijde gaat ook al niet heel precies. Geen wonder dat je klasgenoten vaak een iets ander antwoord vinden dan jij.

Verderop zul je methodes leren die veel preciezer werken en nog sneller ook! Je hoeft dan geen tekening meer te maken.

Wat denk jij?

Van een rechthoekige driehoek zijn de rechthoekszijden 3 en 4 cm. De leerlingen uit een klas hebben de hoek tegenover de zijden van lengte 3 cm bepaald. Negen leerlingen vonden 36° , zeventien leerlingen vonden 37° en vier leerlingen vonden 38° .

- » Hoe groot schat jij dat de hoek is op grond van deze resultaten?

$$(9 \cdot 36^\circ + 17 \cdot 37^\circ + 4 \cdot 38^\circ) / 30 \approx 36,8^\circ$$

Anne's opgave

Van een rechthoekige driehoek is een rechthoekszijde 5,3 cm en is de hoek tegenover die rechthoekszijde 45° .

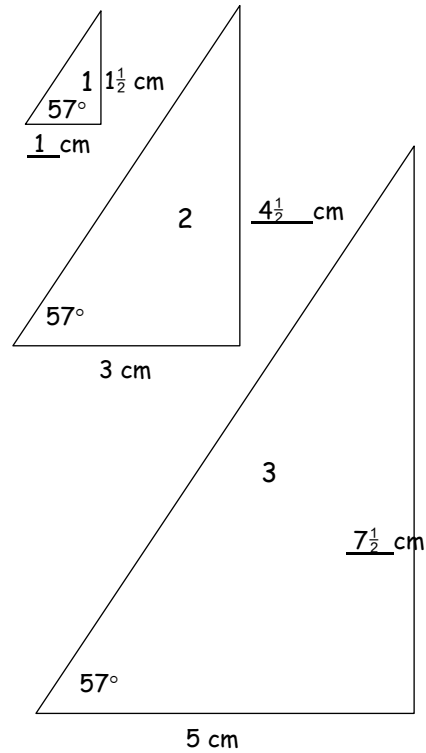
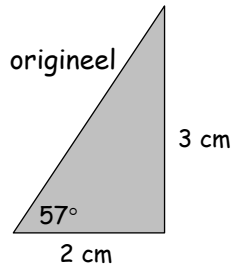
Anne heeft deze opgave gemaakt. Zij heeft een precieze tekening gemaakt en daarin nauwkeurig gemeten: ze vond 5,4 cm.

- » Leg uit dat het antwoord van Anne - ondanks haar nauwkeurig werken - beslist niet helemaal goed is.

Omdat de andere hoek ook 45° is (namelijk $180^\circ - 90^\circ - 45^\circ$) is de driehoek gelijkbenig. Dus zijn de rechthoekszijden beslist exact even lang!

Vergroten 1

Een rechthoekige driehoek heeft rechthoekszijden van 2 en 3 cm. Je kunt nameten dat een hoek dan 57° is.



Hiernaast is die driehoek op verschillende formaten uitvergroot (of verkleind) tot de driehoeken 1, 2 en 3. In elke driehoek is een rechthoekszijde gegeven.

» Bereken telkens de andere rechthoekszijde. Vul het resultaat op de juiste plaats in.

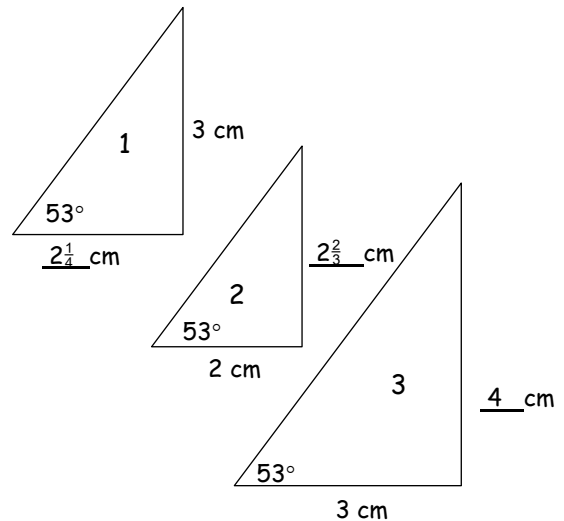
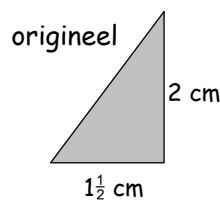
Bij het origineel is de verhouding $\frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

» Bereken die verhouding ook bij de driehoeken 1, 2 en 3.

$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
----------------	----------------	----------------

Vergroten 2

Een rechthoekige driehoek heeft rechthoekszijden van $1\frac{1}{2}$ en 3 cm. Je kunt nameten dat een hoek dan 53° is.



Hiernaast is die driehoek op verschillende formaten uitvergroot (of verkleind) tot de driehoeken 1, 2 en 3. In elke driehoek is een rechthoekszijde gegeven.

» Bereken telkens de andere rechthoekszijde. Vul het resultaat op de juiste plaats in.

Bij het origineel is de verhouding $\frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{2}{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}$.

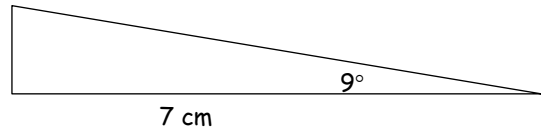
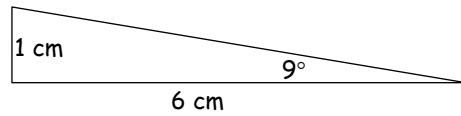
» Bereken die verhouding ook bij de driehoeken 1, 2 en 3.

$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$
----------------	----------------	----------------

Vergroten 3

Een rechthoekige driehoek heeft een hoek van 9°. Maak je de horizontale rechthoekszijde 6 cm lang, dan is de verticale rechthoekszijde 1 cm.

De driehoek wordt vergroot totdat de horizontale rechthoekszijde 7 cm is.



- » Bereken de lengte van de andere rechthoekszijde in twee decimalen.
- » Bereken in beide rechthoekige driehoeken de verhouding $\frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}}$ in twee decimalen.



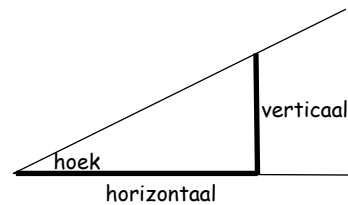
$7/6 \text{ cm} \approx 1,167 \text{ cm}$



$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
---------------	---------------

Bij een hoek hoort een verhoudingsgetal

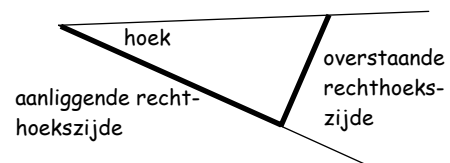
$\frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}}$ en omgekeerd.



We verzamelen even de hoeken en bijbehorende verhoudingsgetallen die we tot nu toe zijn tegengekomen.

hoek	verhoudingsgetal $\frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}}$
57°	1,5
9°	0,17
53°	1,33

Eigenlijk zijn de namen “horizontaal” en “verticaal” niet goed. Immers een driehoek kan in een willekeurige stand getekend worden, zodat de hoek helemaal geen horizontaal been hoeft te hebben. We spreken daarom liever over de **overstaande** en de **aanliggende** rechthoekszijde. De derde zijde van de rechthoekige driehoek heet de **schuine** zijde.

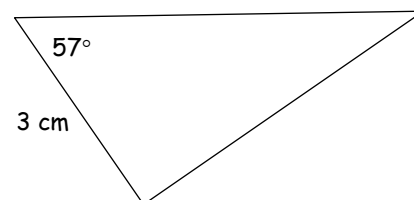


Als een hoek 57° is.

We nemen een rechthoekige driehoek met een hoek van 57°.

- » Wat is de overstaande rechthoekszijde (ongeveer), als de aanliggende rechthoekszijde 3 cm is?

Tip. Je weet de verhouding van de rechthoekszijden met behulp van de tabel.



4,5 cm

We kunnen de tabel op de vorige bladzijde uitbreiden tot onderstaande tabel.

De verhouding $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$ staat in de tabel onder het kopje 'verhouding'. Die verhouding is in drie decimalen nauwkeurig.

hoek	verhouding	hoek	verhouding	hoek	verhouding	hoek	verhouding
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,804
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,881
3°	0,052	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,963
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,050
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,145
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,036	66°	2,246
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,072	67°	2,356
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,111	68°	2,475
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,150	69°	2,605
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,191	70°	2,748
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,235	71°	2,904
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,280	72°	3,078
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,327	73°	3,271
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,376	74°	3,487
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,428	75°	3,732
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,483	76°	4,011
17°	0,306	37°	0,756	57°	1,540	77°	4,332
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,600	78°	4,705
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,664	79°	5,145
20°	0,364	40°	0,839	60°	1,732	80°	5,671

De vet gedrukte regels zijn de verhoudingen die ook in de tabel op de vorige bladzijde stonden (maar daar stonden minder decimalen).

Voorbeeld 1: hoe gebruik je de tabel?

Hiernaast staat een tekening op schaal van driehoek ABP van bladzijde 1. Daar heb je de lengte van AB gemeten. Je kunt die lengte ook *berekenen*.

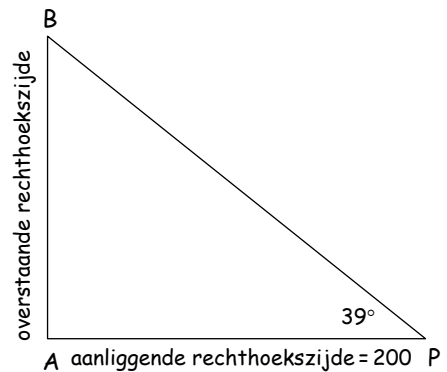
In de tabel zie je bij 39° dat de verhouding

$$\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = 0,810.$$

Dus $\frac{AB}{200} = 0,810$, dus $AB = 162$.

(Vergelijk dat met jouw antwoord voor de afstand tussen de twee peilers op de eerste bladzijde.)

Merk op dat je met de tabel sneller en nauwkeuriger werkt: je hoeft geen tekening te maken.

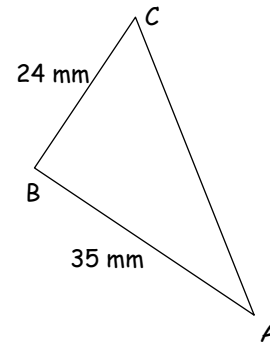


Voorbeeld 2: hoe gebruik je de tabel?

Op bladzijde 4 bovenaan, heb je een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 24 en 35 mm getekend.

De hoeken van die driehoek kun je met de tabel berekenen!

Voor het gemak geven de hoekpunten van de driehoek namen: zie plaatje.



Voor $\angle BAC$ geldt:

verhouding $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{24}{35} \approx 0,667$

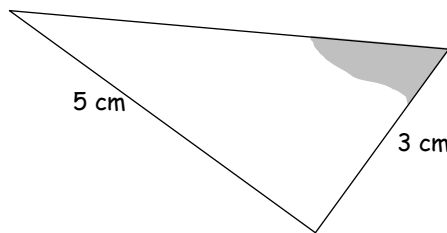
In de tabel kun je de bijbehorende hoek terugzoeken: tussen de 33 en 34 graden. We houden het op 34 graden (0,675 ligt het dichtst bij 0,667).

Dus $\angle BAC = 34^\circ$ en dan is $\angle ACB = 90 - 34 = 56^\circ$.

Drie rechthoekige driehoeken



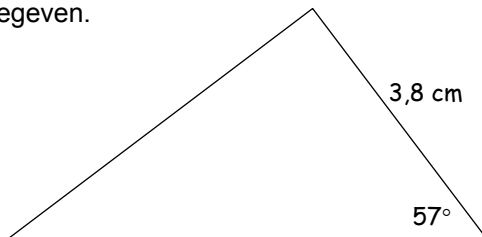
In de rechthoekige driehoek hieronder zijn de rechthoekszijden gegeven.



$\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{5}{3} \approx 1,667$,
dus is de hoek (ongeveer) 59° .

» Bereken de aangegeven hoek met de tabel.

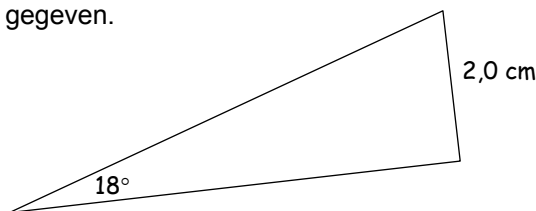
In de rechthoekige driehoek hieronder is een hoek en een zijde gegeven.



Bij een hoek van 57° is de verhouding $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = 1,540$ (zie tabel)
Dus de andere zijde is $1,540 \cdot 3,8 = 5,852$

» Bereken de andere zijde in een decimaal.

In de rechthoekige driehoek hieronder is een hoek en een zijde gegeven.



Bij een hoek van 18° is de verhouding $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = 0,325$ (zie tabel)
Dus de andere zijde is $2,0 : 0,325 \approx 6,15$

» Bereken de andere zijde in een decimaal.

In de vorige paragraaf hebben we bij een hoek in een rechthoekige driehoek steeds de verhouding

$\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$ bekeken.

Je kunt ook andere verhoudingen bekijken.

Stel dat je een hoek hebt. Bij die hoek maken we een rechthoekige driehoek. Hoe groot we die maken, doet er niet toe.

Hier horen zes verhoudingen bij.

$\frac{\text{overstaande rhz}}{\text{aanliggende rhz}}$ $\frac{\text{overstaande rhz}}{\text{schuine zijde}}$ $\frac{\text{aanliggende rhz}}{\text{schuine zijde}}$

$\frac{\text{aanliggende rhz}}{\text{overstaande rhz}}$ $\frac{\text{schuine zijde}}{\text{overstaande rhz}}$ $\frac{\text{schuine zijde}}{\text{aanliggende rhz}}$

In de rechthoekige driehoek hiernaast zijn de zijden 3, 4 en 5 cm (de zijde van 3 tegenover de hoek).

- » Hoe groot is de aangegeven hoek (meten!).
- » Bereken alle zes de verhoudingen bij deze rechthoekige driehoek. Schrijf ze als breuk.

De verhoudingen in de tweede rij zijn de omgekeerden van de verhoudingen in de eerste rij. Als je de ene rij kent, ken je de andere dus ook. Wij werken verder alleen met de verhoudingen in de eerste rij. Die verhoudingen hebben aparte namen.

$\frac{\text{overstaande rhz}}{\text{aanliggende rhz}}$ heet de **tangens van de hoek**,

$\frac{\text{overstaande rhz}}{\text{schuine zijde}}$ heet de **sinus van de hoek**,

$\frac{\text{aanliggende rhz}}{\text{schuine zijde}}$ heet de **cosinus van de hoek**.

Als de hoek α is, korten we af:

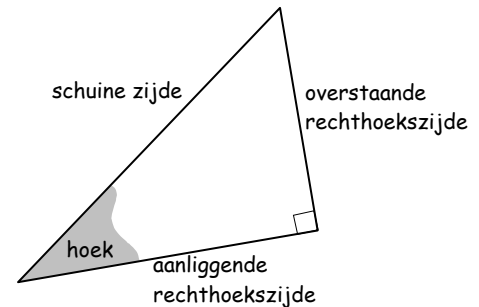
$\frac{\text{overstaande rhz}}{\text{aanliggende rhz}} = \tan \alpha$,

$\frac{\text{overstaande rhz}}{\text{schuine zijde}} = \sin \alpha$,

$\frac{\text{aanliggende rhz}}{\text{schuine zijde}} = \cos \alpha$.

Hierboven heb je berekend:

$\tan 37^\circ = \frac{3}{4}$; $\sin 37^\circ = \frac{3}{5}$ en $\cos 37^\circ = \frac{4}{5}$.



ongeveer 37°

$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

Van alle hoeken α van 1° tot 89° zijn de drie verhoudingen in onderstaande tabel te vinden.

$$\sin \alpha = \frac{\text{aanliggende rhz}}{\text{schuinezijde}} \quad \cos \alpha = \frac{\text{overstaande rhz}}{\text{schuinezijde}} \quad \tan \alpha = \frac{\text{overstaande rhz}}{\text{aanliggende rhz}}$$

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
1	0,017	1,000	0,017	45	0,707	0,707	1,000
2	0,035	0,999	0,035	46	0,719	0,695	1,036
3	0,052	0,999	0,052	47	0,731	0,682	1,072
4	0,070	0,998	0,070	48	0,743	0,669	1,111
5	0,087	0,996	0,087	49	0,755	0,656	1,150
6	0,105	0,995	0,105	50	0,766	0,643	1,192
7	0,122	0,993	0,123	51	0,777	0,629	1,235
8	0,139	0,990	0,141	52	0,788	0,616	1,280
9	0,156	0,988	0,158	53	0,799	0,602	1,327
10	0,174	0,985	0,176	54	0,809	0,588	1,376
11	0,191	0,982	0,194	55	0,819	0,574	1,428
12	0,208	0,978	0,213	56	0,829	0,559	1,483
13	0,225	0,974	0,231	57	0,839	0,545	1,540
14	0,242	0,970	0,249	58	0,848	0,530	1,600
15	0,259	0,966	0,268	59	0,857	0,515	1,664
16	0,276	0,961	0,287	60	0,866	0,500	1,732
17	0,292	0,956	0,306	61	0,875	0,485	1,804
18	0,309	0,951	0,325	62	0,883	0,469	1,881
19	0,326	0,946	0,344	63	0,891	0,454	1,963
20	0,342	0,940	0,364	64	0,899	0,438	2,050
21	0,358	0,934	0,384	65	0,906	0,423	2,145
22	0,375	0,927	0,404	66	0,914	0,407	2,246
23	0,391	0,921	0,424	67	0,921	0,391	2,356
24	0,407	0,914	0,445	68	0,927	0,375	2,475
25	0,423	0,906	0,466	69	0,934	0,358	2,605
26	0,438	0,899	0,488	70	0,940	0,342	2,747
27	0,454	0,891	0,510	71	0,946	0,326	2,904
28	0,469	0,883	0,532	72	0,951	0,309	3,078
29	0,485	0,875	0,554	73	0,956	0,292	3,271
30	0,500	0,866	0,577	74	0,961	0,276	3,487
31	0,515	0,857	0,601	75	0,966	0,259	3,732
32	0,530	0,848	0,625	76	0,970	0,242	4,011
33	0,545	0,839	0,649	77	0,974	0,225	4,331
34	0,559	0,829	0,675	78	0,978	0,208	4,705
35	0,574	0,819	0,700	79	0,982	0,191	5,145
36	0,588	0,809	0,727	80	0,985	0,174	5,671
37	0,602	0,799	0,754	81	0,988	0,156	6,314
38	0,616	0,788	0,781	82	0,990	0,139	7,115
39	0,629	0,777	0,810	83	0,993	0,122	8,144
40	0,643	0,766	0,839	84	0,995	0,105	9,514
41	0,656	0,755	0,869	85	0,996	0,087	11,430
42	0,669	0,743	0,900	86	0,998	0,070	14,301
43	0,682	0,731	0,933	87	0,999	0,052	19,081
44	0,695	0,719	0,966	88	0,999	0,035	28,636
45	0,707	0,707	1,000	89	1,000	0,017	57,290

De tabel op de vorige bladzijde staat ook op een apart blad afgedrukt.

Voorbeeld 3: hoe gebruik je de tabel?

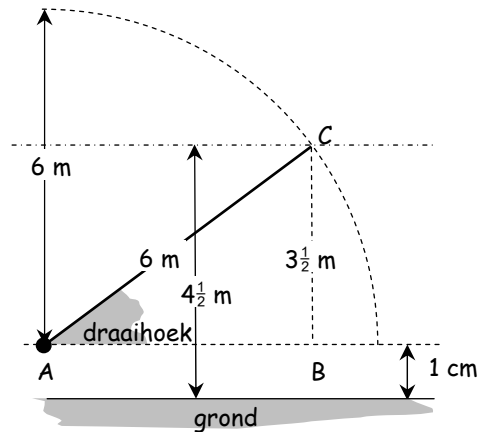
Bekijk de opgave van de slagboom op bladzijde 2.

De verhouding $\frac{\text{overstaande rhz}}{\text{schuinezijde}}$ van de draaihoek $\angle CAB$ kun je uitrekenen in driehoek ABC.

Die verhouding is: $\frac{BC}{AC} = \frac{3\frac{1}{2}}{6} = 0,583$.

Dus $\sin \angle CAB = 0,583$.

In de tabel zoek je terug dat $\angle CAB = 36^\circ$.



Voorbeeld 4: hoe gebruik je de tabel?

Op bladzijde 2 moest je de hoogte van een ballon bepalen met behulp van een precieze tekening op schaal.

Je kunt de hoogte van de ballon nauwkeurig bepalen met de tabel.

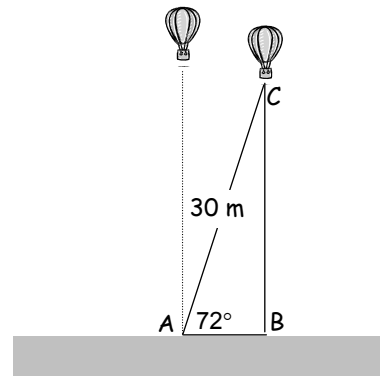
Er geldt:

de verhouding $\frac{\text{overstaande rhz}}{\text{schuinezijde}}$ van $\angle CAB = \frac{BC}{30}$.

Dus $\sin 72^\circ = \frac{BC}{30}$.

In de tabel zoek je die verhouding op: $\sin 72^\circ = 0,961$.

Dus $\frac{BC}{30} = 0,961$, dus $BC = 30 \cdot 0,961 = 28,83$ m.

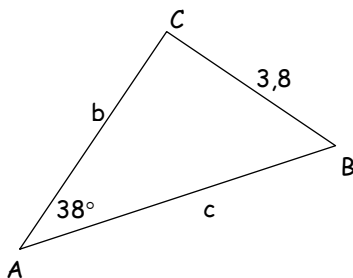


Driehoek ABC

» Vul in (zoek op in de tabel).

In driehoek ABC hieronder geldt: $\sin 38^\circ = \frac{3,8}{c}$.

» Schrijf zo ook op wat $\cos 38^\circ$ en $\tan 38^\circ$ is.



» Door wat je nu opgeschreven hebt te combineren, kun je b en c berekenen. Doe dat.

$$\sin 38^\circ = 0,616, \cos 38^\circ = 0,788, \tan 38^\circ = 0,781$$

$$\sin 38^\circ = \frac{3,8}{c}$$

$$\cos 38^\circ = \frac{b}{c}$$

$$\tan 38^\circ = \frac{3,8}{b}$$

$$c \cdot 0,616 = 3,8, \text{ dus } c = 3,8 : 0,616 = 6,168$$

$$b \cdot 0,781 = 3,8, \text{ dus } b = 3,8 : 0,781 = 4,866$$

**Met je rekenmachine**

De tabel staat ook in je rekenmachine. Hoe je de drie-verhoudingen bij een hoek van 54° te voorschijn tovert, hangt af van het merk rekenmachine. Op de meeste machientjes gaat het als volgt:

<u>tik in</u> _____ :	<u>het antwoord:</u>
sin 54	0,8090169
cos 54	0,5877852
tan 54	1,3763819

We schrijven op papier:

$$\begin{aligned}\sin 54^\circ &= 0,8090169 \\ \cos 54^\circ &= 0,5877852 \\ \tan 54^\circ &= 1,3763819\end{aligned}$$

We spreken dit uit als:

de sinus van 54 graden is 0,8090169
de cosinus van 54 graden is 0,5877852
de tangens van 54 graden is 1,3763819

Meestal hoef je niet zoveel cijfers achter de komma te noteren.

- » Zorg ervoor dat je op je rekenmachine de sinus, cosinus en tangens van een hoek kunt vinden. Vraag eventueel je leraar.

Omgekeerd kun je ook bij een gegeven verhouding de grootte van de hoek vinden. Op de meeste rekenmachines gaat dat als volgt:

<u>tik in</u> _____ :	<u>het antwoord:</u>
$\sin^{-1} 0.86$	36.869898
$\cos^{-1} 0.6$	53.130102
$\tan^{-1} 0.6$	30.963757

Maar je bent meestal ook wel met minder cijfers achter de komma tevreden.

Op andere typen rekenmachines komt in plaats van \sin^{-1} wel voor "invsin". "shift sin" of " 2^{nd} sin".



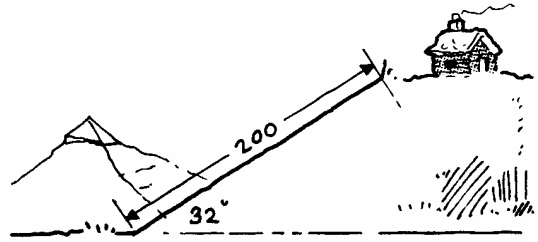
In de volgende opgaven mag je steeds de rekenmachine gebruiken.

Zorg ervoor dat je rekenmachine in de stand DEG staat.
DEG betekent Degree, het Engelse woord voor graad.



In de bergen

Een steil pad maakt een hoek van 32° met een horizontaal vlak. Het pad is 200 m lang.



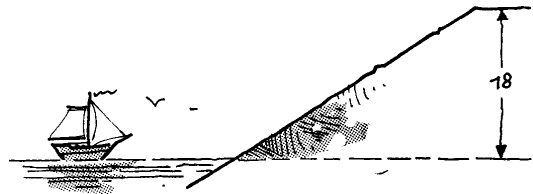
- » Bereken het hoogteverschil tussen het begin en het einde van het pad.

$$\sin 32^\circ = \frac{h}{200}, \text{ dus } 0,5299... = \frac{h}{200},$$

$$\text{dus } h = 200 \cdot 0,5299... = 105,98... \approx 106 \text{ m.}$$

Zeewering

Een zeewering heeft een hellingshoek van 32° . De dijk is 18 m hoog.

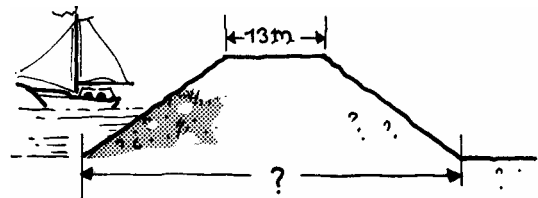


- » Bereken de lengte van de dijkhelling.

$$\sin 32^\circ = \frac{18}{x}, \text{ dus } 0,5299... = \frac{18}{x},$$

$$0,5299...x = 18, \text{ dus } x = 18 : 0,5299... \approx 34 \text{ m}$$

De dijk van hierboven is symmetrisch: aan de landzijde heeft hij dezelfde helling. De kruin is 13 m breed.



- » Hoe breed is de dijk aan de voet?

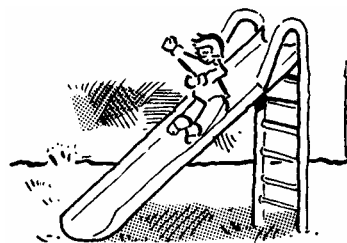
$$\cos 32^\circ = \frac{b}{34}, \text{ dus } 0,8480... = \frac{b}{34}, \text{ dus}$$

$$b = 34 \cdot 0,8480... = 28,83, \text{ dus}$$

$$\text{de breedte} = 13 + 2 \cdot 28,83... = 70,7 \text{ m}$$

Glijbaan

Een glijbaan van 4 m lengte maakt een hoek van 37° met de grond. Het trapje staat verticaal.



- » Bereken de hoogte van het trapje en de afstand van de onderkant van de glijbaan tot de voet van het trapje.

$$\sin 37^\circ = \frac{h}{4}, \text{ dus } h = 4 \cdot 0,6018... \approx 2,4 \text{ m}$$

$$\cos 37^\circ = \frac{b}{4}, \text{ dus } b = 4 \cdot 0,7986... \approx 3,2 \text{ m}$$



Landing

Een vliegtuig nadert Schiphol. De piloot laat het vliegtuig in een rechte lijn dalen onder een hoek van 6° met de horizon. Hij zet de daling in op een hoogte van 10 km.



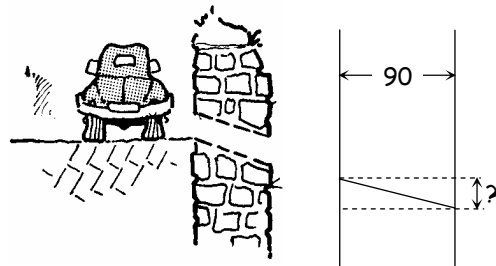
- » Op hoeveel km afstand van het vliegveld moet de piloot de daling inzetten, gemeten over het aardoppervlak? (Rond je antwoord af op een decimaal.)

$$\tan 6^\circ = \frac{10}{x}, \text{ dus } 0,105 = \frac{10}{x}, \text{ dus}$$

$$0,105x = 10, \text{ dus } x = 10 : 0,105 \approx 95 \text{ km}$$

Kademuur

Een kademuur 90 cm dik. Door de muur loopt een drainagebuis. Om het water goed af te voeren loopt de buis schuin omlaag, onder een hoek van 12° met de horizontale richting.



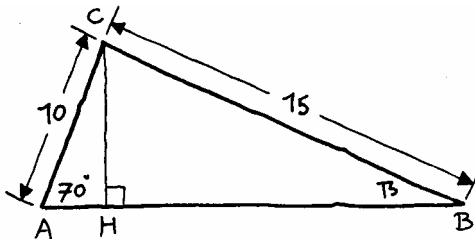
- » Bereken de lengte van de buis en het hoogteverschil tussen begin- en uiteinde.

$$\tan 12^\circ = \frac{x}{90}, \text{ dus } 0,213 = \frac{x}{90}, \text{ dus}$$

$$x = 90 \cdot 0,213 \approx 19,1 \text{ cm}$$

Driehoek

- » Bereken in de driehoek hieronder CH, β en AB. Reken zo nauwkeurig mogelijk; dus rond tussentijds niet af.



$$\sin 79^\circ = \frac{CH}{10}, \text{ dus } 0,982 = \frac{CH}{10}, \text{ dus}$$

$$CH = 10 \cdot 0,982 \approx 9,82$$

$$\sin \beta = \frac{CH}{BC} = \frac{9,82}{15} = 0,6547, \text{ dus}$$

$$\beta = 40,9^\circ$$

$$AH = 10 \cdot \cos 70^\circ \approx 3,42$$

$$BH = 15 \cdot \cos 40,9^\circ \approx 11,34$$

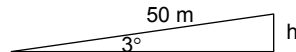
$$AB = AH + BH \approx 14,8$$



Strand

Een gelijkmatig glooiend strand maakt een hoek van 3° met de zeespiegel. Bij eb is het strand 80 m breed en bij vloed 30 m.

- » Bereken het verschil in waterhoogte bij eb en vloed in dm nauwkeurig. Maak eerst een schets.



Het verschil in breedte is 50 m.

$$\sin 3^\circ = \frac{h}{50}, \text{ dus } 0,0523 = \frac{h}{50}, \text{ dus}$$

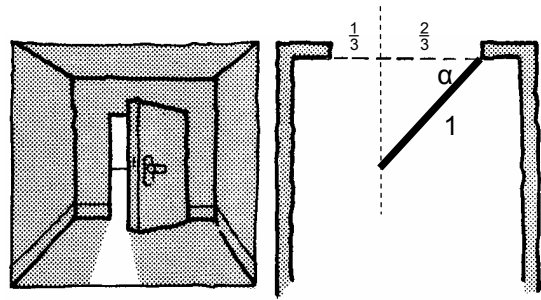
$$h = 50 \cdot 0,0523 \approx 2,6 \text{ m}$$

Deuropening

De deur aan het einde van een donkere gang staat een stukje open. In de gang zie je maar $\frac{1}{3}$ deel van de deuropening. Daardoor komt het zonlicht binnen. De rest van de deuropening zie je niet, daar zit de deur nog voor.

Naast de ruimtelijke schets staat het bovenaanzicht van de gang.

- » Teken daarin de openstaande deur.
- » Bereken hoeveel graden de deur open staat, in graden nauwkeurig.

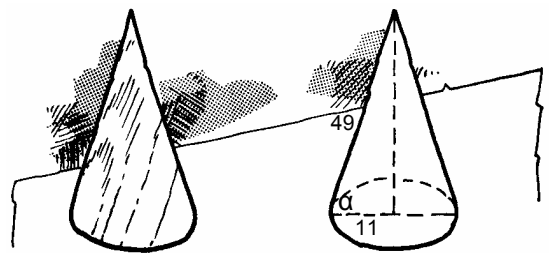


$$\cos \alpha = \frac{2}{3} : 1 = 0,667, \text{ dus } \alpha \approx 48^\circ.$$

In graden nauwkeurig betekent dat je moet afronden op een *geheel* aantal graden.

Kegel

Ida heeft uit een stuk hout een kegel gedraaid. Het grondvlak van de kegel is een cirkel met een diameter van 22 cm. De afstand van de top tot het grondvlak is, over het zijvlak (de mantel) gemeten, 49 cm.



- » Bereken de hoek tussen het grondvlak en het zijvlak in graden nauwkeurig.

$$\cos \alpha = \frac{11}{49} = 0,2245, \text{ dus } \alpha \approx 77^\circ$$

- » Bereken de hoogte van de kegel in mm nauwkeurig.

$$\tan 77^\circ = \frac{h}{11}, \text{ dus } 4,33 = \frac{h}{11}, \text{ dus}$$

$$h = 11 \cdot 4,33 = 47,64... \text{ cm} \approx 476 \text{ mm}$$



De toren van Pisa

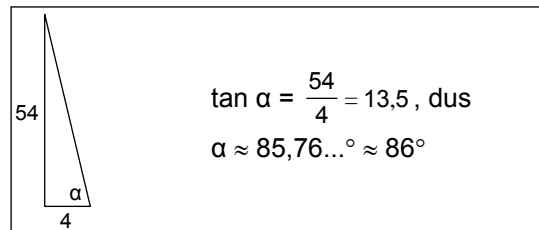
Het Italiaanse ministerie van Publieke Werken heeft een plan goedgekeurd om het verder wegzakken van de achthonderd jaar oude toren van Pisa tegen te gaan. De bouw van de toren begon in 1173, naast de kathedraal van Pisa. Direct al na de bouw begon de toren weg te zakken en over te hellen. In 1185 werd de bouw stopgezet. Pas in de veertiende eeuw werd de toren van Pisa afgebouwd maar tot de helft van de oorspronkelijk geplande hoogte. Het wegzakken van de toren zou worden veroorzaakt door een ondergrondse stroming van water, in zuidelijke richting. Door inklinking van de bodem aan de zuidkant van de toren zakt de zuidelijke kant van de toren langzaam weg. In het verleden zijn al diverse pogingen ondernomen om dat wegzakken tegen te gaan, zonder veel succes.

de Volkskrant 7-3-'87



De toren van Pisa komt steeds schever te staan. Het Italiaanse ministerie van publieke werken gaat maatregelen nemen, volgens een artikel uit *De Volkskrant* van 7-3-87. Volgens dit artikel helt de top 4 meter over. De toren is 54 meter hoog, verticaal gemeten.

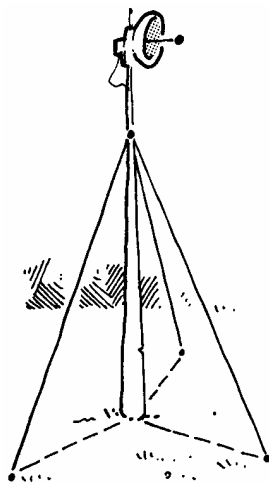
- » Bereken de hoek die de toren met de grond maakt in graden nauwkeurig.



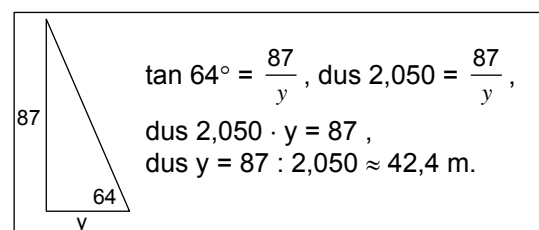
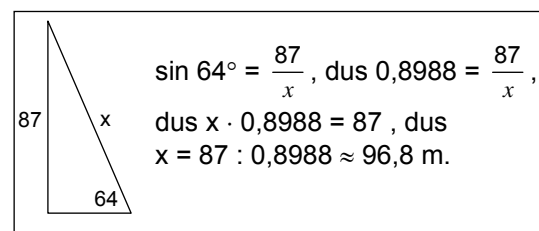
Zender

Een zendmast is op een hoogte van 87 m met drie kabels vastgezet. De kabels maken hoeken van 64° met de grond.

- » Bereken de lengte van zo'n kabel.

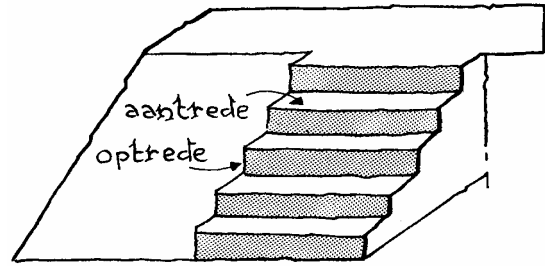


- » Hoe ver van de voet zijn de kabels in de grond bevestigd?

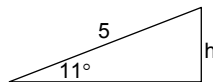


**Invalidingang**

Naast een trap met vijf treden is er een gladde helling voor invaliden. Het pad is 5 meter lang en maakt een hoek van 11° met de grond.



- » Bereken de hoogte van de trap.



$$\sin 11^\circ = \frac{h}{5}, \text{ dus } 0,1908 = \frac{h}{5}, \text{ dus}$$

$$h = 5 \cdot 0,1908 \approx 0,954 \text{ m} = 9,5 \text{ dm}$$

- » Bereken hoe lang elke optrede is.
Bereken hoe lang elke aantrede is.

Er zijn vijf treden. Dus elke optrede is $9,5 : 5 = 1,9 \text{ dm}$

$$\cos 11^\circ = \frac{b}{5}, \text{ dus } 0,9816 = \frac{b}{5}, \text{ dus}$$

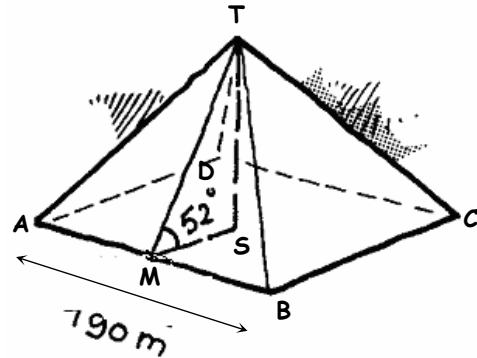
$$b = 5 \cdot 0,9816 \approx 4,908 \text{ m} \approx 49 \text{ dm}.$$

Per trede is dat $49 : 5 = 9,8 \text{ dm}$



Hoeken in piramides

Het grondvlak van de piramide van Chefred is vierkant met zijden van ongeveer 190 m. De zijvlakken zijn gelijkbenige driehoeken. Zij maken hoeken van 52° met het grondvlak (zie het plaatje hiernaast). Voor het gemak hebben we wat punten in de piramide een naam gegeven. S is het punt dat recht onder de top T van de piramide ligt. M is het midden van ribbe AB. Van rechthoekige driehoek SMT ken je een zijde en een (niet rechte) hoek.



- » Bereken de hoogte ST van de piramide.

$$MS = \frac{1}{2} \cdot 190 = 95.$$

$$\tan 52^\circ = \frac{ST}{95}, \text{ dus } 1,2799 = \frac{ST}{95},$$

$$\text{dus } ST = 95 \cdot 1,2799 = 121,59... \approx 121,6 \text{ m}$$

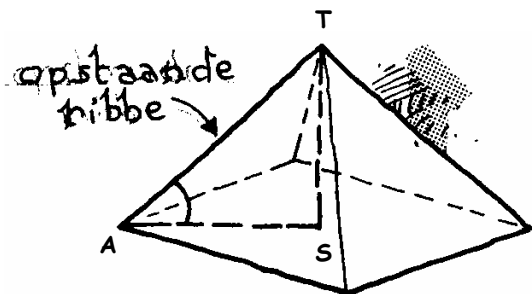
- » Bereken de lengte van de kortste weg TM over de piramide van de top naar beneden.

$$\cos 52^\circ = \frac{MS}{TM}, \text{ dus } 0,61566 = \frac{95}{TM},$$

$$\text{dus } TM \cdot 0,61566 = 95,$$

$$\text{dus } TM = 95 : 0,61566 \approx 154 \text{ m}$$

Zie het plaatje hiernaast.
Van driehoek AST heb je TS al berekend.
De lengte van AS kun je ook berekenen (in het grondvlak van de piramide).



- » Bereken de lengte van een opstaande ribbe.

$$AS^2 = 95^2 + 95^2 = 18050,$$

$$\text{dus } AT^2 = AS^2 + TS^2 = 18050 + 14786,56$$

$$= 32836,56,$$

$$\text{dus } AT \approx 181$$

- » Bereken ook de hoek die een opstaande ribbe met het grondvlak van de piramide maakt.

Noem de gevraagde hoek β .

$$\tan \beta = \frac{ST}{AS} = \frac{121,6}{134,4} = 0,9051,$$

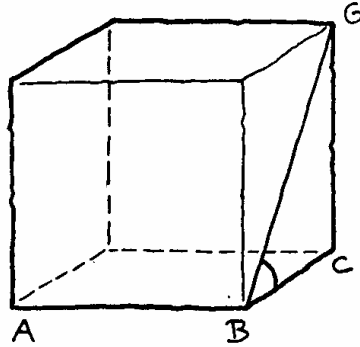
$$\text{dus } \beta \approx 42^\circ$$



Hoeken in kubussen

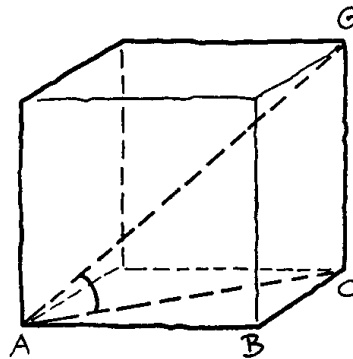
De ribben van de kubus hiernaast zijn 4 cm. Een ribbenkruipertje loopt van B naar A. In B ziet hij ribbe CG onder een hoek van 45° .

» Waarom?



Omdat het zijvlak van een kubus een vierkant is, deelt de diagonaal BG de rechte hoek bij B middendoor.

» Bereken onder welke hoek hij ribbe CG ziet als hij in A is gekomen.

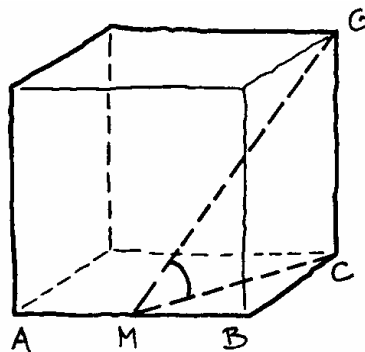


$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{32}$$

Noem de gevraagde hoek α .

$$\tan \alpha = \frac{CG}{AC} = \frac{4}{\sqrt{32}} = 0,707,$$

dus $\alpha \approx 35,3^\circ$



» Bereken de hoek ook als hij in M is; M ligt midden tussen A en B.

$$C = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{20}$$

Noem de gevraagde hoek β .

$$\tan \beta = \frac{CG}{MC} = \frac{4}{\sqrt{20}} = 0,8944,$$

dus $\beta \approx 41,8^\circ$

TEKENEN OP SCHAAL

(ANDERE) VERHOUDINGEN

MET DE REKENMACHINE

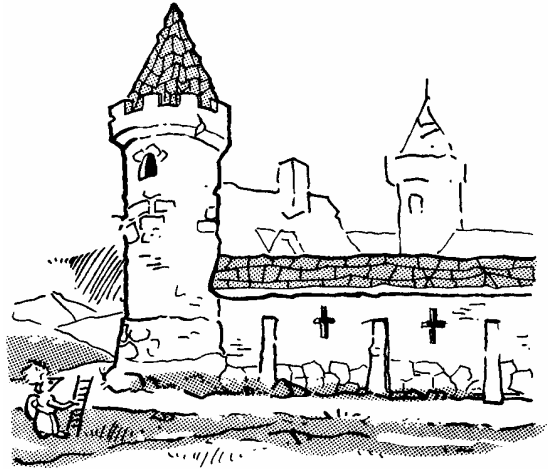
TOEPASSEN

DE RUIMTE IN



Middeleeuwen

Ridder Roderick wil jonkvrouw Jacoba redden. Zij zit opgesloten in de toren van een kasteel. Haar venster is 25 m boven de grond. De toren is omgeven door een gracht van 6 m breed. De ridder heeft een ladder laten maken die vanaf de rand van de gracht precies tot aan het venster van zijn geliefde jonkvrouw reikt.



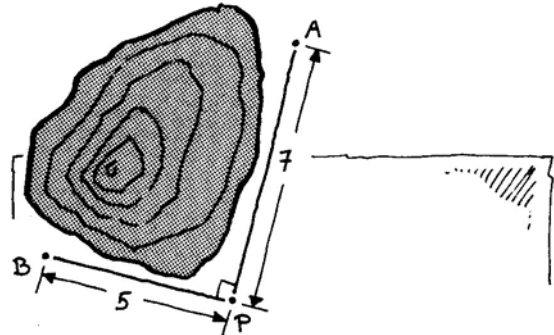
- » Bereken de lengte van de ladder exact en ook in één decimaal.
- » Bereken de hoek die de ladder met de grond maakt als Roderick zijn Jacoba bevrijdt.

$$\text{lengte}^2 = 25^2 + 6^2 = 661, \text{ dus lengte} \approx 25,7$$

$$\tan \alpha = \frac{25}{6}, \text{ dus } \alpha \approx 77^\circ$$

Tunnelbouw

Tussen de plaatsen A en B ligt een berg. Er komt een tunnel dwars door de berg van A naar B. Twee ploegen beginnen elk aan een kant te graven. Om de precieze richting te bepalen waarin ze moeten graven, is er een meetpunt P uitgezet. Hoek APB is recht, P is 7 km van A en 5 km van B verwijderd. Door $\angle PAB$ en $\angle PBA$ te berekenen, weten de tunnelbouwers in welke richting ze moeten graven.



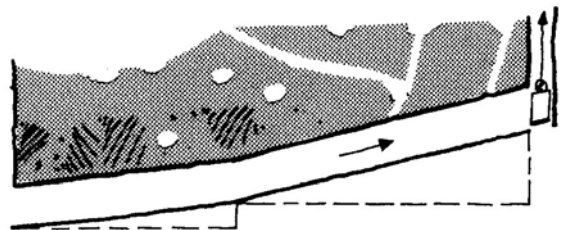
- » Bereken die twee hoeken in graden nauwkeurig.

$$\tan \angle PAB = \frac{5}{7}, \text{ dus } \angle PAB \approx 36^\circ$$

$$\angle PBA = 54^\circ$$

Mijn

Kompel Caspar heeft zijn werk in de mijn gedaan en loopt door de gang naar de lift van de mijnschacht. De gang stijgt. Eerst loopt Caspar 800 m onder een hoek van 6° met een horizontaal vlak en daarna loopt hij 1200 m onder een hoek van 13° .



- » Hoeveel meter is Caspar gestegen als hij de lift bereikt?

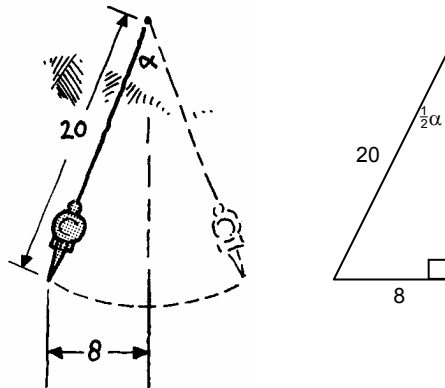
$$x = 800 \cdot \sin 6^\circ \text{ en } y = 1200 \cdot \sin 13^\circ$$

$$x + y \approx 354 \text{ meter}$$



Slinger

Een slinger van 20 cm lang beweegt heen en weer. Hij wijkt maximaal 8 cm van de ruststand uit.

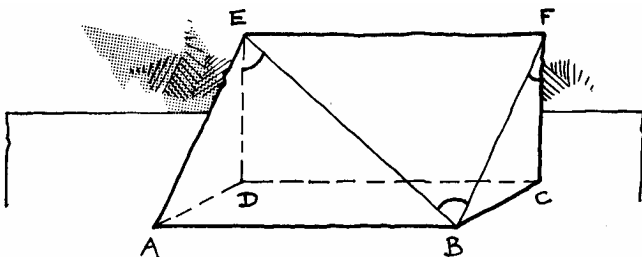


- » Bereken de hoek (α) die de slinger beschrijft.

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{8}{20}, \text{ dus } \alpha \approx 47^\circ$$

Driezijdig prisma

Hieronder is een driezijdig prisma getekend. De grensvlakken zijn twee rechthoekige driehoeken en drie rechthoeken. $AB=8$, $BC=4$ en $FC=3$.



- » Bereken $\angle BFC$, $\angle BED$ en $\angle FBE$ in graden nauwkeurig.

$$\tan \alpha = 1\frac{1}{3}$$

$$\alpha \approx 53^\circ$$

$$BD^2 = 8^2 + 4^2 = 80, BD = \sqrt{80}$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{80}}{3}, \text{ dus } \beta \approx 71^\circ$$

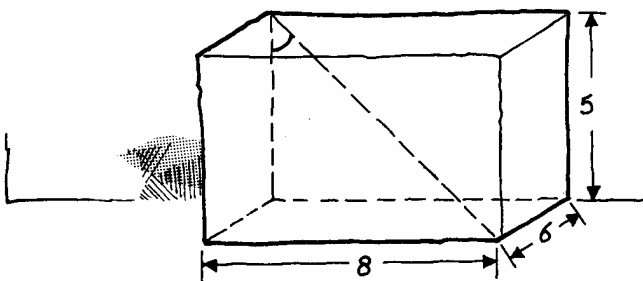
$$FB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$EB^2 = 8^2 + 4^2 + 3^2 = 89$$

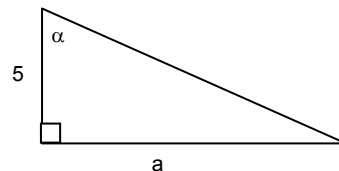
$$\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{89}}, \text{ dus } \gamma \approx 58^\circ$$

Balk

De balk hieronder is 8 bij 6 bij 5.



- » Bereken de hoek tussen een lichaamsdiagonaal en een verticale ribbe (aangegeven in de figuur).



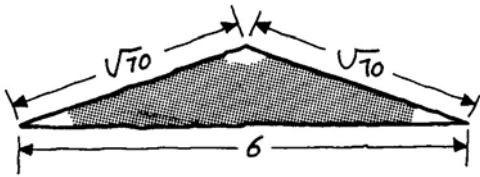
$$a^2 = 6^2 + 8^2 = 100, \text{ dus } a = 10$$

$$\tan \alpha = \frac{10}{5}$$

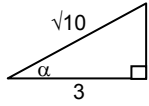
$$\alpha \approx 63^\circ$$



Hoeken



- » Bereken de hoeken in de gelijkbenige driehoek hierboven.

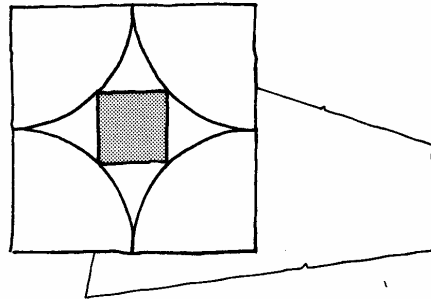


$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha \approx 18,4^\circ$$

Twee hoeken van 18°
en één van 143°

In een vierkant van 6 bij 6 zijn vier kwartcirkels getekend. De hoekpunten van het vierkant zijn de middelpunten van die kwartcirkels. In de ruimte tussen de cirkels past precies een vierkant. De zijden van de twee vierkanten zijn evenwijdig.

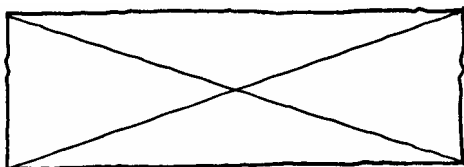
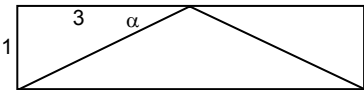


- » Hoe groot is het kleine vierkant?

De diagonaal van het grote vierkant is $\sqrt{72}$.
De diagonaal van het kleine vierkant is $\sqrt{72}-6$, de zijde is $(\sqrt{72}-6) \cdot \cos 45^\circ \approx 1,7573$

De rechthoek hieronder is 2 bij 6.

- » Bereken de hoek waaronder de diagonalen elkaar snijden in graden nauwkeurig.

$$\tan \alpha = \frac{1}{3} \text{ dus } \alpha \approx 18,4^\circ,$$

dus de gevraagde hoek is ongeveer 37° .

Als in een rechthoekige driehoek de schuine zijde 5 is en er is een hoek van 40° , dan kun je de andere zijden uitrekenen. Die blijken te zijn: 3,213938... en 3,8302222...

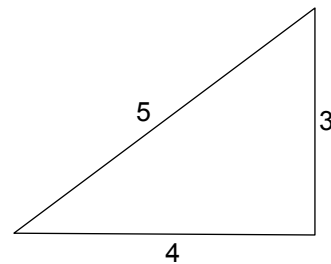
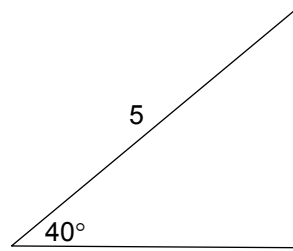
Reken maar na op je rekenmachine.

De zijden zijn niet "mooi".

Als de zijden van een rechthoekige driehoek wel mooi zijn, zoals bij een 3-4-5-driehoek, zijn de twee hoeken $36,869898...$ en $53,130102...$ graden.

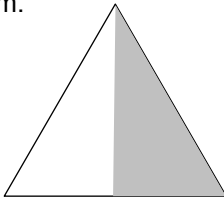
Deze hoeken zijn niet "mooi".

We gaan op zoek naar rechthoekige driehoeken waarvan zowel de hoeken als de zijden mooi zijn.



De halve gelijkzijdige driehoek

- » Teken hiernaast nauwkeurig een halve gelijkzijdige driehoek (zie het plaatje hieronder), met schuine zijde 4 cm.



- » Hoe groot zijn de hoeken?

De schuine zijde is 4 cm. De korte rechthoekszijde weet je nu ook (zonder te meten) en de lange rechthoekszijde kun je dan met de stelling van Pythagoras berekenen.

- » Hoe lang zijn de rechthoekszijden?
Laat de wortel in je antwoord staan.

$2\sqrt{3}$ of $\sqrt{12}$ is het exacte antwoord op de vorige vraag. Het antwoord is precies berekend, zonder tussenkomst van de rekenmachine. Het antwoord 3,4641.. dat je op de rekenmachine kunt vinden is niet exact, maar een benadering.

- » Hoe groot zijn de hoeken van een halve gelijkzijdige driehoek met schuine zijde 10?
- » En hoe lang zijn de rechthoekszijden, exact?

Nu weet je de exacte waarden van $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ en $\tan 60^\circ$.

- » Schrijf die exacte waarden op.
- » Controleer die waarden op je rekenmachine.
- » Wat zijn de exacte waarden van $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ en $\tan 30^\circ$?

$$\sin 60^\circ =$$

$$\cos 60^\circ =$$

$$\tan 60^\circ =$$

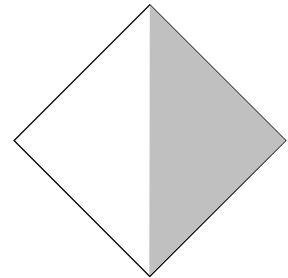
$$\sin 30^\circ =$$

$$\cos 30^\circ =$$

$$\tan 30^\circ =$$

Het halve vierkant

- » Teken nauwkeurig een half vierkant (zie het plaatje hiernaast), met schuine zijde 4 cm.



- » Hoe groot zijn de hoeken?

De schuine zijde is 4 cm. De twee rechthoekszijden zijn even lang en kun je nu met de stelling van Pythagoras berekenen.

- » Hoe lang zijn de rechthoekszijden, exact?

- » Hoe groot zijn de hoeken van een half vierkant met schuine zijde 10?

- » En hoe lang zijn de rechthoekszijden, exact?

Nu weet je de exacte waarden van $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$ en $\tan 45^\circ$.

- » Schrijf die exacte waarden op.
- » Controleer die waarden op je rekenmachine.

$$\sin 45^\circ =$$

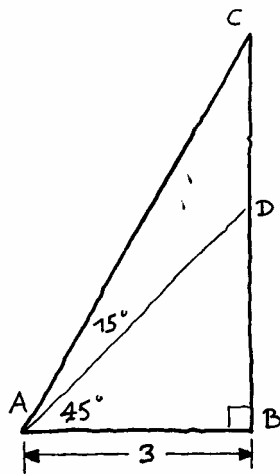
$$\cos 45^\circ =$$

$$\tan 45^\circ =$$

Bekijk de figuur hiernaast.

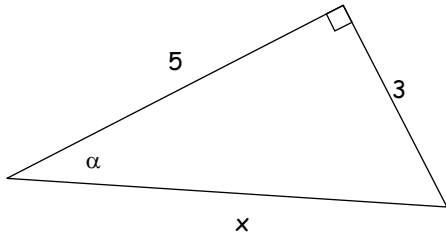
- » Bereken AC exact.
Bereken CD exact.

- » Bereken oppervlakte driehoek ACD in één decimaal.

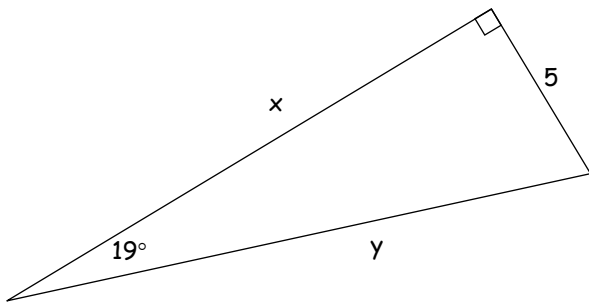


--

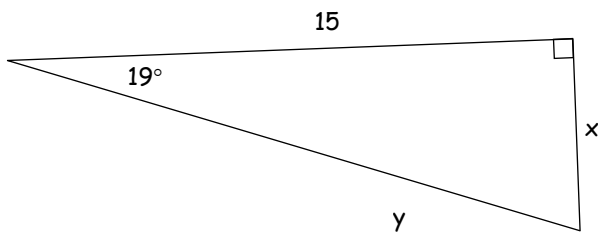
» Bereken α en x .



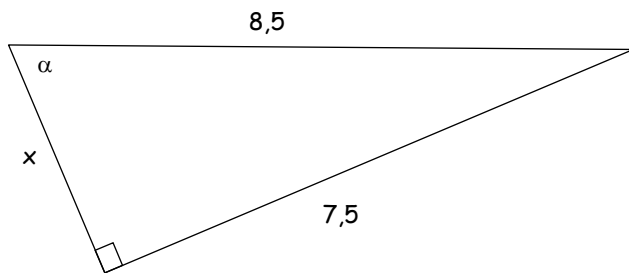
» Bereken x en y .



» Bereken x en y .



» Bereken α en x .

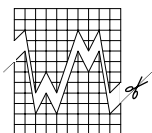


INHOUDSOPGAVE

Tekenen op schaal	1
Verhoudingen	6
Andere verhoudingen	10
Met de rekenmachine	13
Toepassen	14
De ruimte in	19
Terugblik	21
Extra opgaven	22
Extra B	25
Extra droog	28

**H24 - Goniometrie
versie 2005**

Colofon



**de
Wageningse
Methode**

© 2005	De Wageningse Methode
Auteurs	Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh, Carole Huijnen, Wim Kremers, Saskia Oortwijn, Simon Schoone, Anje Stolp
Illustraties	Wilson Design
Foto's	De Wageningse Methode
Druk/Verkoop	Tamminga bv, Postbus 176, 6920 AD Duiven
Homepage	www.wageningse-methode.nl

Niets uit deze uitgave mag verveelvuldigd en/of openbaar gemaakt worden door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook, zonder voorafgaande toestemming van de houder van het copyright.

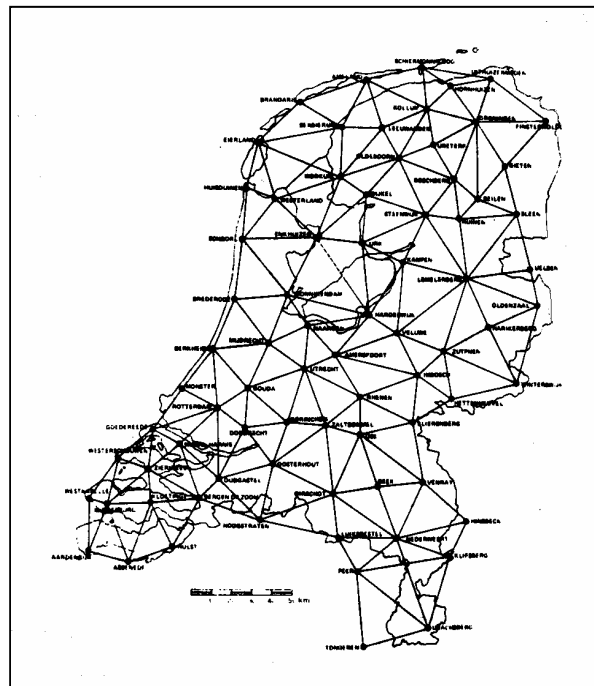
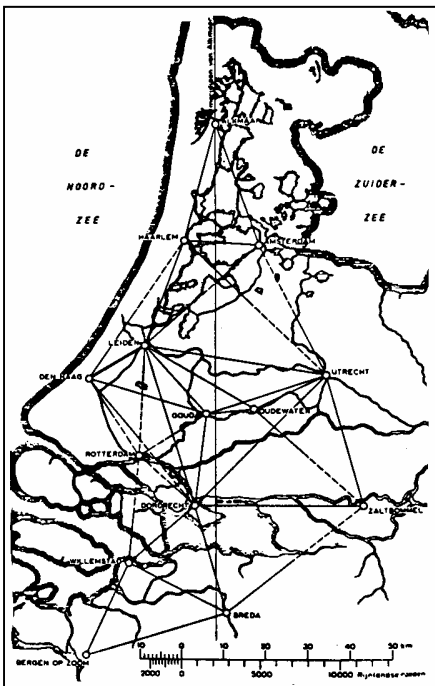
INHOUDSOPGAVE

BINNENKANT VAN DE ACHTERKANT

Grond is in ons land altijd een belangrijk goed geweest. In het feodale verleden was de verdeling van het land uitsluitend een zaak van kerk en adel. Later, toen de steden belangrijker werden, kwamen er vrije burgers en boeren die grond in eigendom verwierven. Daardoor groeide ook de noodzaak om grondeigendom te registreren. Niet alleen om de rechtszekerheid van de eigenaren te vergroten, vooral ook om grondbelasting te kunnen heffen.

Voor die registratie was het nodig dat grondeigendommen werden opgemeten. De meetgegevens werden toen, in de middeleeuwen, alleen nog maar in registers vastgelegd.

Eigenaren van grond lieten hun gebied ook wel door landschapschilders in beeld brengen. Erg betrouwbaar waren die schilderijen niet: vaak zag de schilder wat de grondeigenaar wilde dat hij zag!

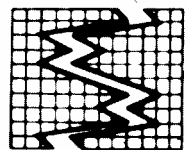


Kadastrale kaarten - dat zijn kaarten waarop men nauwkeurig kan zien hoe de grenzen van percelen lopen - gingen pas na 1500 een rol spelen. Dat waren toen nog kaarten van kleine gebieden. Methoden om grotere gebieden nauwkeurig in kaart te brengen waren er nog niet.

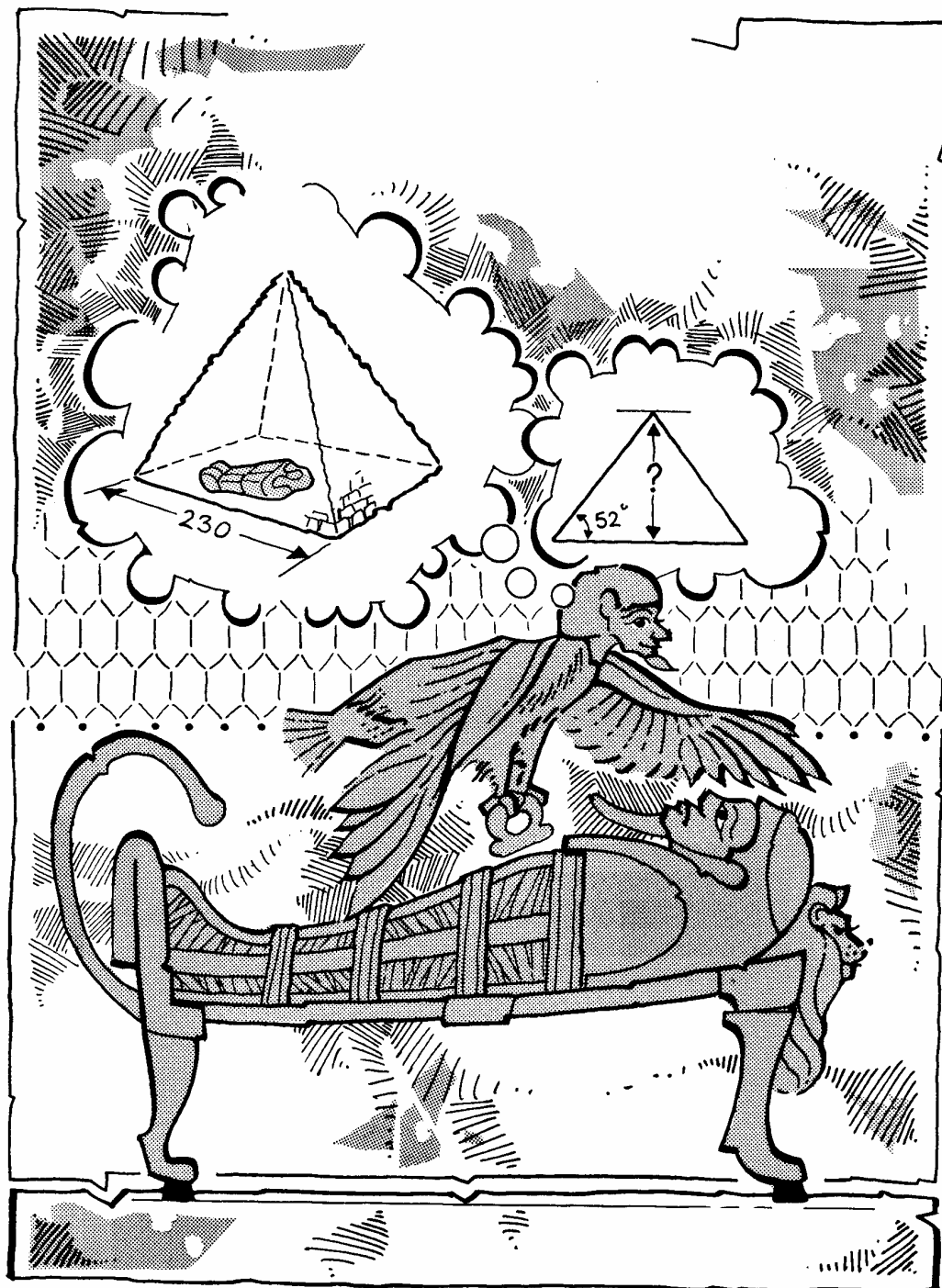
Het was Snellius die voor een doorbraak zorgde. Hij voerde in het begin van de 17de eeuw een graadmeting uit in het gebied tussen Alkmaar en Bergen op Zoom en gebruikte daarbij voor het eerst driehoeksmetingen. Uit de gemeten hoeken van de driehoeken en de lengte van één zijde van één driehoek kon hij alle andere zijden van zijn driehoeksnet berekenen. Veel waterschappen en steden zetten daarna hun eigen driehoeksnet op, met als gevolg dat de kaarten van aan elkaar grenzende gebieden niet aansloten.

Er zijn verschillende pogingen gedaan om tot een landelijk driehoeksnet te komen. Zo voerde luitenant-generaal Krayenhoff van 1802 tot 1811 een driehoeksmeting uit voor het vervaardigen van de eerste Topografische Kaart van Nederland. Later bleken zijn metingen lang niet nauwkeurig genoeg.

In 1885 werd de Rijkscommissie voor Graadmetingen en Waterpassing belast met het uitvoeren van een nieuwe driehoeksmeting in Nederland. Die werkzaamheden werden in 1928 voltooid en hebben geleid tot het huidige net van de Rijksdriehoeksmeting, dat aansluit op de netten van de ons omringende landen.



de Wageningse Methode



H24 - Goniometrie