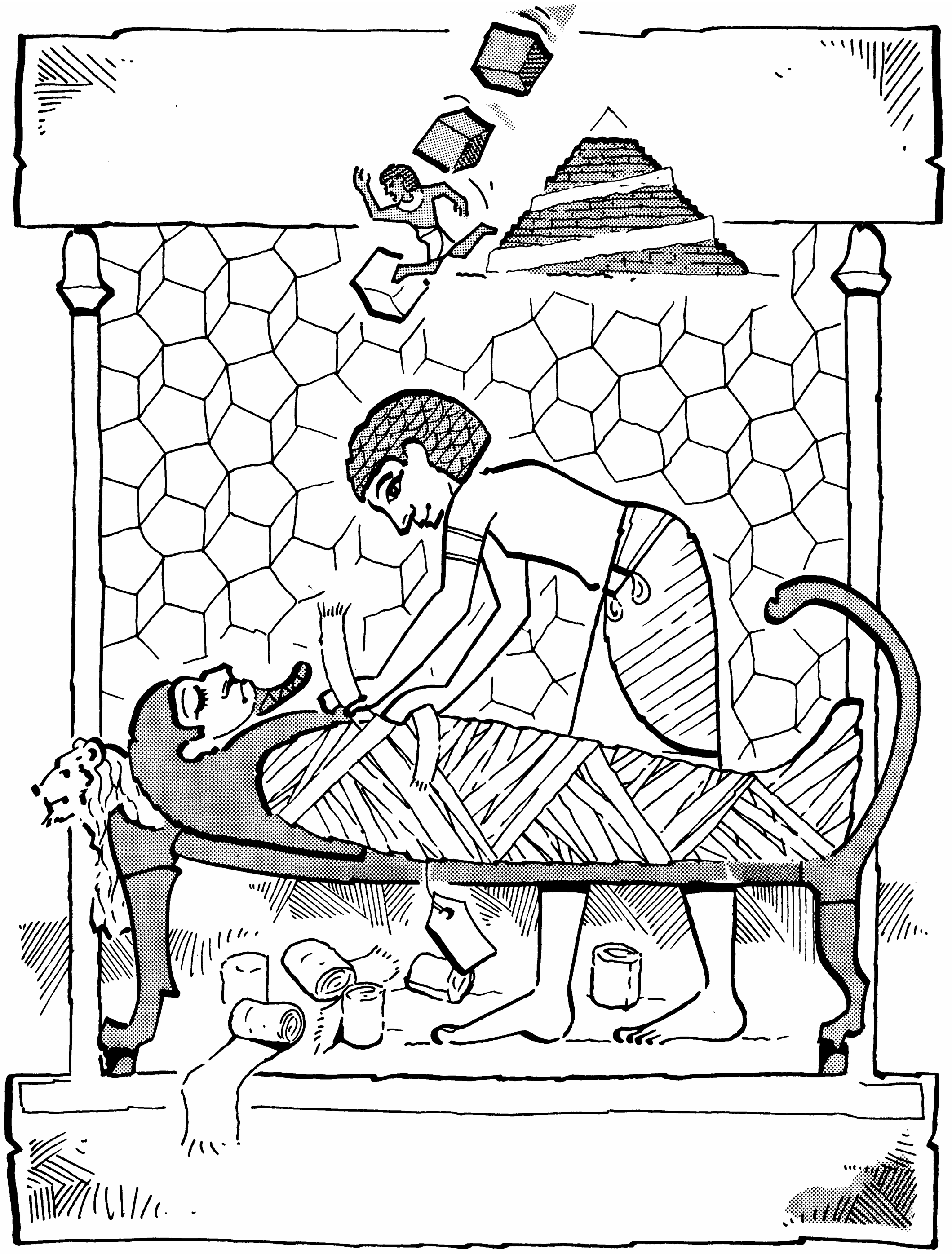
Allerlei verbanden



Inhoudsopgave

Allerlei verbanden

Experimentele uitgave 2007 voor wiskunde D havo 4, 40 slu

Colofon

Auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

Illustraties Wilson Design, Uden

Distributie Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

ISBN 978-90-811645-5-9

Homepage www.wageningse-methode.nl

---

1 Rechtlijnige groei

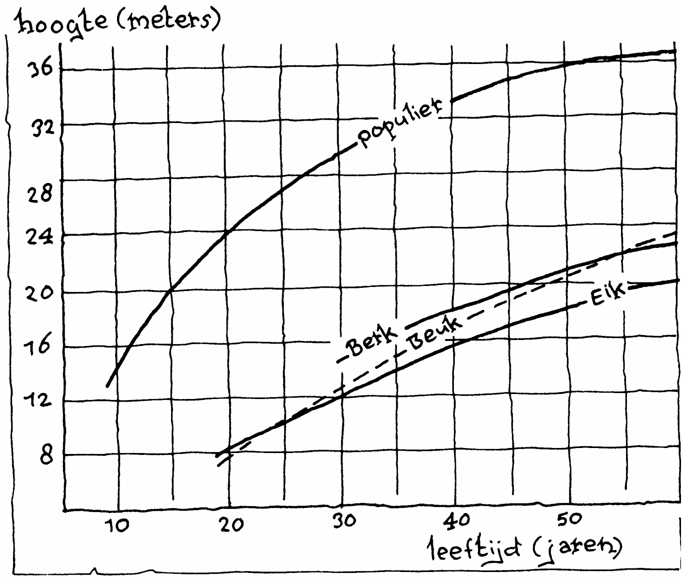
1 De hoogte van een boom hangt af van zijn leeftijd. Hieronder staat hoe hoog een fijnspar (alias de kerstboom) gemiddeld is op verschillende leeftijden.

Leeftijd (jaar)	10	20	30	40	50	60
Hoogte (meter)	5	10½	16	20½	24½	28

a. In een bos zijn de meeste bomen langer dan 20 meter. Hoe lang is het minstens geleden dat ze werden geplant?
b. Hoe hoog is een fijnspar van 45 jaar ongeveer? En van 22 jaar?

In een ander bos is er een aantal jaren na de eerste aanplant een tweede gevolgd. Het hoogteverschil tussen de bomen in de eerste en in de tweede aanplant is nu ongeveer 9 meter.
c. Kun je hieruit de leeftijd van de bomen afleiden?
d. Hoe groot is het leeftijds*verschil* ongeveer?
e. Omdat de groei van de fijnspar geleidelijk verloopt, kun je van de groei een doorlopende grafiek schetsen.
Doe dat; zet de leeftijd af op de horizontale as en de hoogte op de verticale as.
f. Bedenk een vuistregel om de hoogte ongeveer te bepalen als je de leeftijd van een fijnspar kent.

2 Hieronder zie je de groei van de eik, berk, beuk en populier in één figuur.



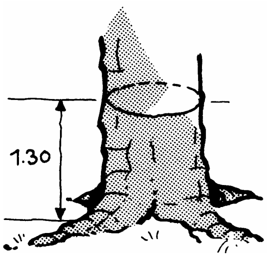
a. Wat is het opvallende verschil in groei tussen de populier en de beuk?
Hoort de eik wat type groei betreft bij de populier of bij de beuk?

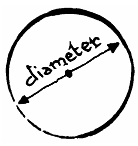
We kijken verder naar de populier. Nu je de grafiek van zijn groei kent, weet je voor elke leeftijd hoe hoog een populier (gemiddeld) is. Maar stel nu eens dat je alleen een tabel had met de hoogte bij drie leeftijden (gespiekt uit de grafiek); L = leeftijd , H = hoogte.

L (jaar)	10	15	20	25	30
H (meter)	14½		24		29½

b. Op grond van deze tabel schat Anneke de hoogte van een populier van 15 jaar op 19,25 meter en van 25 jaar op 26,75 meter.
Hoe heeft Anneke deze hoogtes gevonden?
c. Ga in de grafiek na of deze hoogtes kloppen.

Het is niet goed mogelijk om de hoogte van een populier van 80 jaar te schatten. Dat wordt meer gokwerk.
d. Maak toch een zo goed mogelijke schatting van deze hoogte.





3 Niet alleen de hoogte hangt af van de leeftijd, maar ook de dikte. In de bosbouw bepaalt men de dikte (dat is de diameter) van een boomstam op een hoogte van 1,3 meter. Dat gaat het eenvoudigst door de omtrek te bepalen en die te delen door π. (π is ongeveer 3,14)

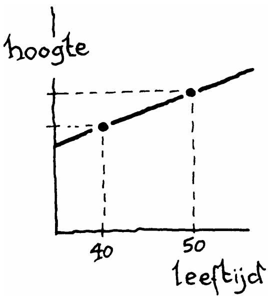
$$\text{diameter} = \frac{\text{omtrek}}{\pi}$$

Voor een populier is het verband tussen leeftijd en dikte in onderstaande tabel gegeven.

Leeftijd (jaar)	10	20	30	40	50	60
Diameter (cm)	16	30	43	55	66	76

a. Hoe groot is de omtrek op 1,3 meter hoogte van een 50-jarige populier?

Iemand is geïnteresseerd in de hoogte van de populier, maar heeft geen zin erin te klimmen. Dat hoeft ook niet, want het antwoord kan op een 1,3 m hoogte gevonden worden. Op die hoogte blijkt de omtrek 160 cm te zijn.
b. Hoe hoog is de boom ongeveer? (Gebruik ook de gegevens uit de vorige opgaven.)



4 Nogmaals de tabel van het verband tussen leeftijd en hoogte van de fijnspar.

Leeftijd (jaar)	10	20	30	40	50	60
Hoogte (meter)	5	10½	16	20½	24½	28

Omdat de groei van de fijnspar vrij gelijkmatig verloopt, is de bijbehorende grafiek nagenoeg een rechte lijn. In deze opgave gaan we ervan uit dat de grafiek tussen de meetpunten uit de tabel rechtlijnig is.
a. Hoeveel cm groeit een fijnspar per jaar tussen zijn 40ste en 50ste jaar? Hoeveel groeit hij in die periode in 3 jaar tijd?
b. Hoe hoog is een fijnspar van 43 jaar? Controleer je antwoord in de grafiek bij opgave **1**.
c. Dezelfde vraag voor een fijnspar van 58 jaar.

5 Met behulp van de tabel kun je ook bij een gegeven hoogte de leeftijd van de fijnspar bepalen.
a. Een fijnspar is tussen de 20,5 en 24,5 meter hoog.
Hoe lang doet de boom erover om 1 meter te groeien?
Hoe oud is de fijnspar als hij 23,5 meter hoog is?
b. Dezelfde vraag als hij 26,5 meter hoog is.

De berekening bij opgave **5a** kun je overzichtelijk zó opschrijven:

	hoogte	leeftijd	
	20,5	40	
+4	23,5	?	+10
	24,5	50	

4 meter erbij per 10 jaar
1 meter erbij per 2,5 jaar
3 meter erbij per 7,5 jaar
Dus 23,5 meter in 47,5 jaar

6 Anneke spaart heel regelmatig; elke maand maakt ze een vast bedrag naar haar spaarrekening over. Ze neemt nooit geld op van haar spaarrekening; de rente die ze ontvangt wordt op een andere rekening overgemaakt. Elke maand krijgt ze een bericht van de bank van haar nieuwe tegoed. Op 1 mei 1997 had Anneke €1456 op haar spaarrekening, op 1 oktober 1997 €2626.
a. Welk bedrag had Anneke op haar spaarrekening op 1 augustus 1997? Schrijf zo nodig je berekening overzichtelijk op zoals bij opgave **5a** is gebeurd.
b. En op 1 maart 1997? En op 1 december 1997?

Bij *gelijkmatige* groei is er een *rechtlijnig* verband tussen de hoeveelheid en de tijd: de grafiek is een rechte lijn. Als je bij zo'n groei de hoeveelheden op twee tijdstippen kent, kun je de hoeveelheid op een derde tijdstip uitrekenen.

Als het derde tijdstip tussen de twee bekende tijdstippen in ligt, spreken we van **interpolatie** (tussenplaatsing).
Als het derde tijdstip buiten de twee bekende tijdstippen in ligt, spreken we van **extrapolatie** (buitenplaatsing).

7 Een goedje groeit gelijkmatig. Om 12 uur is er 10 kg, om 20 uur is er 34 kg.
a. Bereken met interpolatie de hoeveelheid van het goedje om 16 uur. Schrijf zo nodig je berekening overzichtelijk op zoals bij opgave **5a**.
b. Bereken met extrapolatie de hoeveelheid om 23 en om 10 uur.

8 Een goedje groeit gelijkmatig. Na 17 uur is er 50 kg, na 22 uur is er 10 kg. Omdat de hoeveelheid afneemt, spreken we wel van *negatieve* groei.
a. Bereken met interpolatie de hoeveelheid na 19 uur.
b. Bereken met interpolatie na hoeveel uur de hoeveelheid 22 kg is.

*In de opgaven **9**, **10** en **11** gaan we interpolatie en extrapolatie nog meer oefenen. Als je met opgave **7** en **8** geen moeite had, hoef je niet alle drie de opgaven te maken. Je kunt dan zelf kiezen welke van deze opgaven je wel maakt en welke niet. Vanaf opgave **12** kun je niets meer overslaan.*

9 Een goedje groeit gelijkmatig. Na 24 uur is er 112 kg, na 50 uur is er 250 kg.
a. Bereken met interpolatie de hoeveelheid na 30 uur.
b. Bereken met extrapolatie de hoeveelheid na 61 uur.

10 Een goedje groeit gelijkmatig. Na 30 uur is er 60 kg, na 100 uur is er 80 kg.
a. Bereken met interpolatie na hoeveel uur de hoeveelheid 75 kg is.
b. Bereken met extrapolatie na hoeveel uur de hoeveelheid 85 kg is.

11 De populier groeit niet gelijkmatig (opgave **2**).
a. Hoe zie je dat aan de grafiek?
b. Een populier van 10 jaar is 14,5 meter. Als hij 30 jaar oud is, is hij 29,5 meter.
Hoe hoog is volgens de methode van interpolatie een populier van 20 jaar oud?
Hoeveel scheelt dat met zijn werkelijke lengte?

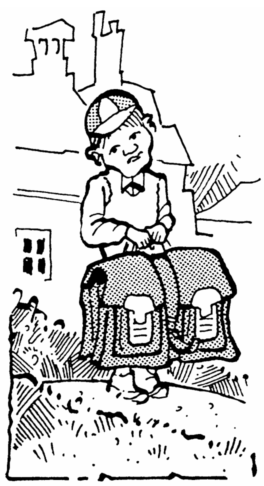
Bij het interpoleren hebben we in de voorgaande opgaven steeds aangenomen dat de grafiek door de twee gegeven meetpunten rechtlijnig is. We spreken dan van ***lineaire interpolatie****. Later zullen we ook nog andere manieren van interpoleren ontmoeten. Tot dan zullen we met interpoleren altijd lineair interpoleren bedoelen.*
Evenzo voor extrapoleren.

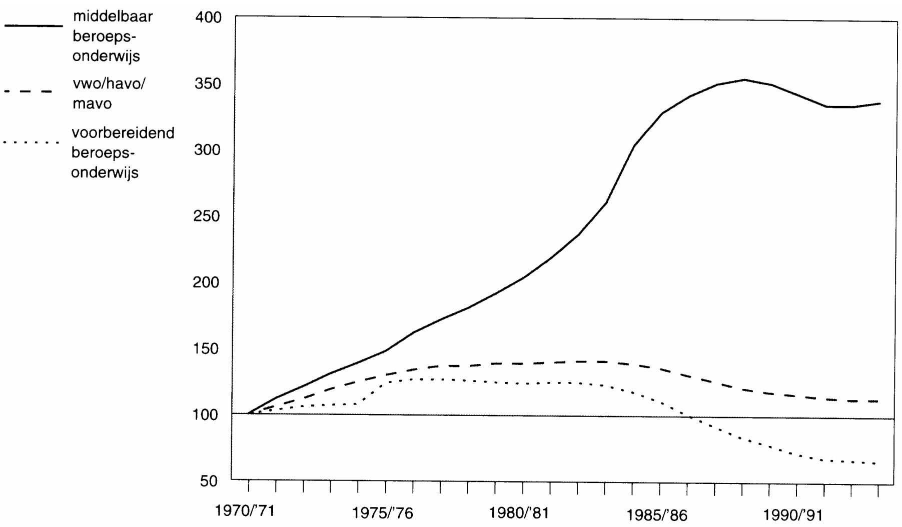
12 Rond Christus' geboorte leefden er ongeveer 1 miljoen mensen op aarde. In het jaar 2000 zijn dat er ongeveer 6 miljard.
a. Kun je op grond van deze gegevens de wereldbevolking in het jaar 1000 schatten?
b. En in het jaar 2100? Toelichten !

13 Het aantal leerlingen in het mbo
Het aantal leerlingen in het middelbaar beroepsonderwijs is sedert 1970 fors gestegen. In het schooljaar 1970/71 telde het mbo 45000 leerlingen, in 1993/94 liefst 150000.
a. Bereken met interpolatie de aantallen leerlingen in het mbo in de schooljaren 1980/81 en 1985/86.

Hoe het aantal leerlingen in het mbo zich tussen 1970 en 1994 heeft ontwikkeld zie je in de grafiek op de volgende bladzijde. De grafiek is afkomstig uit het *Statistisch Jaarboek van 1996*. De aantallen leerlingen zijn gegeven ten opzichte van het schooljaar 1970/71; het aantal in dat jaar is dus op 100% gesteld.

b. Ga na dat het gegeven aantal voor het schooljaar 1993/94 klopt met de grafiek.
c. Voor welke van de schooljaren 1980/81 en 1985/86 kloppen de met interpolatie gevonden aantallen met de werkelijkheid.
d. Kun je op grond van de grafiek het aantal leerlingen in het mbo in 1995/96 redelijk voorspellen?
e. Je ziet bij **c** dat je moet uitkijken bij interpolatie.
Breng onder woorden wanneer interpolatie niet geoorloofd is.





Extrapolatie is nog riskanter dan interpolatie. Stel bijvoorbeeld dat een stad in 1990 120.000 inwoners heeft en in 1995 140.000 inwoners. Kun je nu op grond hiervan het aantal inwoners in het jaar 2000 of zelfs in 2010 voorspellen?
Hoe verder in de toekomst, hoe onzekerder het aantal inwoners wordt. Toch kan het gemeentebestuur niet afwachten, maar moet het nu al maatregelen treffen voor straks. De bestuurders nemen aan dat ze allerlei factoren die bij de groei van de stad meespelen redelijk kennen. Zodoende kunnen ze toch voorspellingen doen voor de toekomst. Maar, geen wonder dat die vaak moeten worden bijgesteld.

14 Als het waait voelt het frisser aan

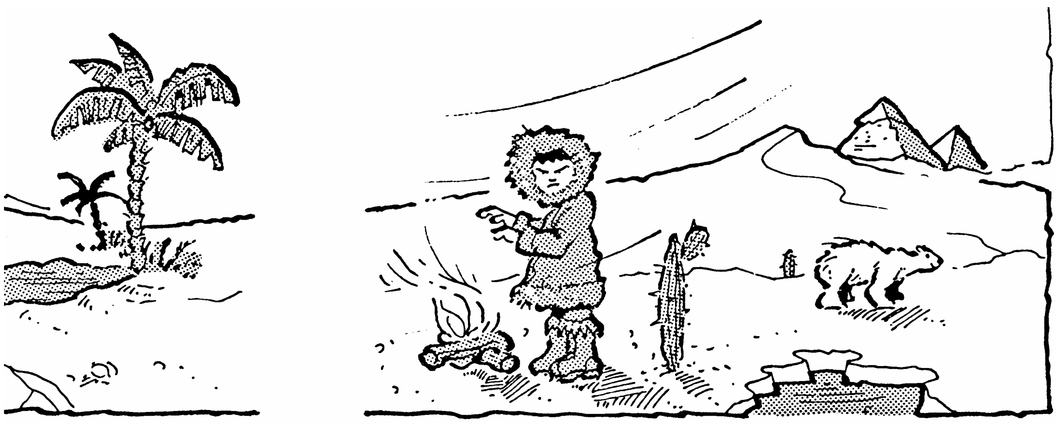
Het is koud en je gaat een buitenwandeling maken. Welke kleding je daarvoor aantrekt moet je niet alleen laten afhangen van de temperatuur die de thermometer aangeeft; de windsnelheid is zeker zo belangrijk. Immers, hoe harder het waait, des te kouder voelt een zelfde temperatuur aan.
In de tabel op de volgende bladzijde is bij sommige waarden van de thermometertemperatuur en sommige waarden van de windsnelheid de ervaringstemperatuur gegeven: dat is de temperatuur zoals je die "voelt". Als het windstil is, is de ervaringstemperatuur gelijk aan de thermometertemperatuur. Als de windsnelheid 5 m/s is en het is in werkelijkheid -10° C, dan is de ervaringstemperatuur -18° C.

	thermometertemperatuur (° C)						
	5	0	-5	-10	-15	-20	-25

wind-	0	5	0	-5	-10	-15	-20	-25
snel-	5	3	-4	-11	-18	-25	.	.
heid	10	0	-9	-18	-27	.	.	.
(m/s)	15	-5	-14	-23	.	.	.	.

a. Er heerst een krachtige wind: 10 m/s. De thermometer geeft -10° C aan.
Wat is dan de ervaringstemperatuur?
b. Welke regelmaat kun je in de (horizontale) rijen van de tabel vinden?
c. Neem aan dat de regelmaat zich voorzet.
Bepaal de ontbrekende negen getallen in de tabel.
d. Bereken met interpolatie de ervaringstemperatuur bij:
- windsnelheid 5 m/s en thermometertemperatuur -13° C
- windsnelheid 10 m/s en thermometertemperatuur -13° C

e. Bereken nu met behulp van interpolatie de ervaringstemperatuur bij windsnelheid 7 m/s en thermometertemperatuur -13° C. Gebruik je antwoorden op vraag **d**.



2 Evenredig

Voedingswaarde per 100 ml	
200 kilo-joules	50 kilo-calorieën
eiwit	3,5 gr
koolhydraten	5,0 gr
vet	1,5 gr
calcium	120 mg

1 Op een pak halfvolle melk van *Melkunie* is nevenstaande informatie te vinden.
a. Hoeveel gram eiwit zit er in een liter melk? En in een glas van 20 cl?
b. In een kop melk zit 180 mg calcium. Hoeveel gram koolhydraten zit er in?
c. Jaap moet van de dokter kalkrijker gaan eten. Daarom verhoogt hij het aantal bekers melk dat hij drinkt van één tot drie per dag. Hoeveel keer zoveel kalk (calcium) krijgt hij hierdoor binnen?

De hoeveelheid calcium (in mg) in een hoeveelheid melk noemen we x en de hoeveelheid koolhydraten y.
d. Maak de tabel en teken de grafiek (x horizontaal en y verticaal):

x	60	90	120	150	180	210	240	270	300
y									

e. Geef een formule voor het verband tussen y en x.

De status van een vrouw in een mannengezelschap neemt recht evenredig toe met haar kennis van en interesse in voetbal.
Stelling proefschrift
N. Tellegen, Amsterdam

De variabele y is **evenredig** met de variabele x betekent:
als x 2 keer zo groot wordt, dan wordt y ook 2 keer zo groot,
als x $3\frac{1}{2}$ keer zo groot wordt, dan wordt y ook $3\frac{1}{2}$ keer zo groot,
als x k keer zo groot wordt, dan wordt y ook k keer zo groot, voor elk getal k.

y is evenredig met x noteren we met: y ~ x.

f. Is de hoeveelheid vet x (in gram) in een glas melk evenredig met de hoeveelheid eiwit y (in gram) in een glas melk?
Is de hoeveelheid calcium (in gram) in een kopje melk evenredig met de hoeveelheid melk (in cl) in dat kopje?

2 Witgoed-reparateur van Elten vraagt 30 euro voorrijkosten. Het arbeidsloon is 85 euro per uur. De firma Andriessen rekent geen voorrijkosten, maar een arbeidsloon van 110 euro per uur. Het totale bedrag dat je bij van Elten voor een reparatie betaalt, noemen we E, en bij Andriessen A. Het aantal uren dat er voor een reparatie nodig is, noemen we t.

a. Is E evenredig met t? Is A evenredig met t?
b. Bij welke reparatietijd is van Elten voordeliger dan Andriessen?

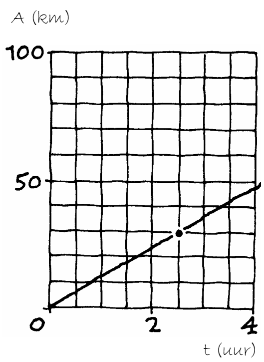
> Als y ~ x, dan is er een constante c zó, dat y = c·x.
> Deze constante heet **evenredigheidsconstante**.

3 We bekijken alle mogelijke vierkanten. De oppervlakte van een vierkant noemen we A, de omtrek O, de zijde z.
a. Maak een tabel voor z en A en ook voor z en O.
b. Is A evenredig met z? Is O evenredig met z?
c. A is evenredig met een macht van z. Met welke macht van z?
d. Druk z uit in A.
e. Druk vervolgens O uit in A.

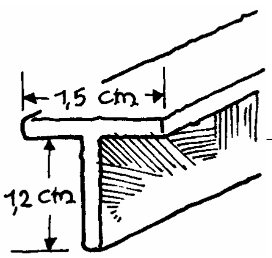
4 Een klaslokaal heeft een vloeroppervlakte van 60 m^2 en een hoogte van $3\frac{1}{2}$ m. Het aantal personen in het lokaal noemen we A, het beschikbare aantal m^3 per persoon M. Is A evenredig met M?

In de natuurkunde kom je vaak evenredige verbanden tegen.

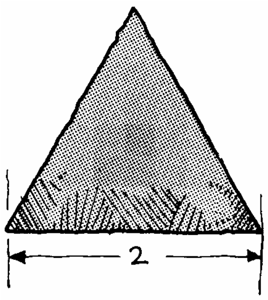
Voorbeeld
De massa van een homogeen voorwerp is evenredig met zijn volume. Kort: massa ~ volume. De bijbehorende evenredigheidsconstante hangt af van het soort materiaal waarvan dat voorwerp gemaakt is. Die constante wordt dichtheid genoemd.



5 Van een schip wordt bijgehouden hoeveel kilometer het in een bepaalde tijd aflegt. In de grafiek hiernaast is de afgelegde afstand A in km verticaal uitgezet tegen de tijd t in uur horizontaal. A is evenredig met t.
a. Hoe zie je aan de grafiek dat A ~ t?
b. Bepaal de evenredigheidsconstante.
c. Wat is de natuurkundige betekenis van de evenredigheidsconstante?



6 In de winkel kun je diverse profielen van aluminium op verschillende lengtes krijgen. We bekijken een profiel dat van 2 mm dik aluminium gemaakt is. Hiernaast is de



doorsnede van zo'n profiel getekend. De maten staan erbij. De dichtheid van aluminium is 2,70 kg per dm^3.
a. Wat weegt het profiel per meter?
b. Twee profielen hebben dezelfde afmetingen. Het ene is uitgevoerd in nikkel, het andere in aluminium. De dichtheid van nikkel is 8,90 (kg per dm^3). Het aluminiumprofiel weegt 100 gram.
Hoeveel weegt het nikkel profiel (in honderdste grammen)?
c. Het gewicht van een aluminium profiel noemen we x en dat van eenzelfde profiel in nikkel y (beide in gram).
Is $y \sim x$? Zo ja, bepaal de bijbehorende evenredigheidsconstante.

7 Oude klokken hebben een slinger. Die zorgt ervoor dat het uurwerk regelmatig loopt. De slingertijd van een klok is de tijd die nodig is voor één volledige slingerbeweging (bijvoorbeeld van helemaal links naar helemaal rechts en terug). Hoe langer de slinger is, hoe langzamer hij heen en weer gaat, dus hoe groter de slingertijd is. Uit proeven blijkt dat de slingertijd evenredig is met de wortel van de lengte van de slinger. In formule: $T = c \cdot \sqrt{L}$. Hierbij is T de slingertijd in seconden en L de lengte van de slinger in cm.
We bekijken een bepaalde klok. Als de lengte van de slinger 64 cm is, is de slingertijd 0,8 seconden.
a. Geef de formule voor de slingertijd T, uitgedrukt in de lengte van de slinger L.
b. $L \sim T^2$, dus de lengte van de slinger is evenredig met het kwadraat van de slingertijd. Laat dit zien en bepaal de bijbehorende evenredigheidsconstante bij de klok hierboven.
c. Hoeveel slingeringen maakt de klok in een uur?

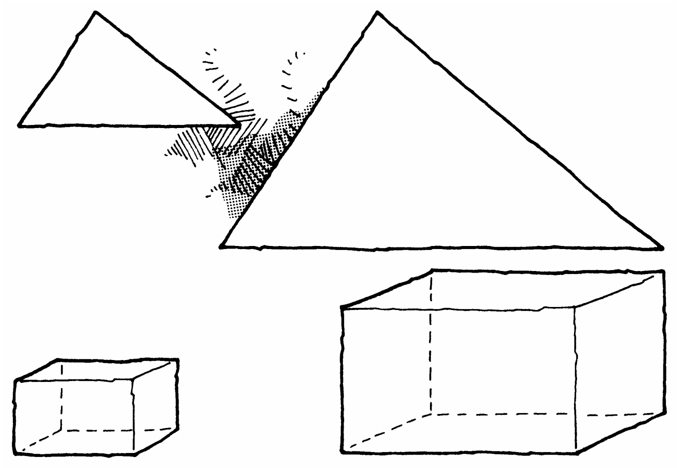
d. Iemand wil de klok één minuut per uur sneller laten lopen. Het aantal slingeringen uit **c** moet dan in 59 minuten gehaald worden.
Wat wordt de nieuwe slingertijd?
Hoeveel mm moet hij de slinger daarvoor korter maken?

8 We bekijken alle mogelijke gelijkzijdige driehoeken. De oppervlakte van zo'n driehoek noemen we O en de lengte van een zijde z.
a. Bereken de exacte hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 2.

Voor O en z geldt een formule in de gedaante: $O = c \cdot z^2$.
b. Bepaal het getal c.
c. Als van een gelijkzijdige driehoek de zijde 3 keer zo groot wordt, hoeveel keer zo groot wordt dan de oppervlakte?

Je ziet dat O niet evenredig is met z. Maar: $O \sim z^2$.

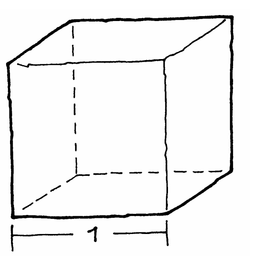
9 In de rechter driehoek hieronder zijn de zijden 2 keer zo groot als in de linker. We zeggen: de linker driehoek is met factor 2 uitvergroot tot de rechter. In het rechter blok zijn de ribben twee keer zo lang als in het linker.



a. Ga na hoe vaak de kleine driehoek in de grote past.
b. Ga na hoe vaak het kleine blok in het grote past.

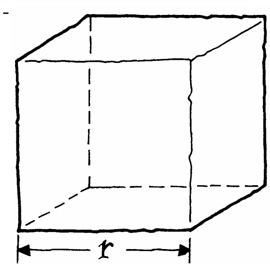
In het boekje **15-Gelijkvormigheid** heb je het volgende gezien.

> Als een ruimtelijke figuur met factor f wordt vergroot, dan wordt de oppervlakte vergroot met factor f^2 en de inhoud met factor f^3.



10 We beginnen met een kubus met ribbe 1.
a. Wat is de inhoud en wat is totale oppervlakte van de kubus?

We vergroten de kubus met factor r. Dan wordt de ribbe dus r. En $O = 6r^2$ en $I = r^3$.



b. Toon aan: $O^3 \sim I^2$ en bepaal de bijbehorende evenredigheidsconstante.

Als je aanneemt dat mensen gelijkvormig zijn, dan volgt met een redenering als hierboven ook dat $H \sim \sqrt[3]{G^2}$, met H de huidoppervlakte van een mens en G zijn gewicht.

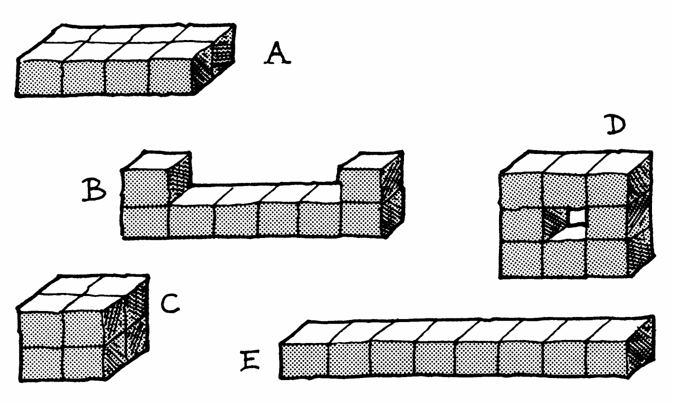
11 Meeh verrichtte bij 16 mensen huidoppervlakte-metingen door door de huid stukje voor stukje met millimeterpapier te bedekken. Zo vond hij de formule $H = 11{,}2\ \sqrt[3]{G^2}$, G in kg en H in dm^2. De evenredigheidsconstante is dus 11,2. Hierbij moet je wat lichaamsbouw betreft uitgaan van een 'gemiddelde' mens.

a. Wat is volgens Meeh de huidoppervlakte van een mens van 80 kg?

b. Druk G uit in H.

12 Om de maagsappen goed op het voedsel in te laten werken, wordt het gekauwd. Hoe groter de verhouding oppervlakte : inhoud van het voedsel, hoe beter de spijsvertering.

De volgende bouwsels van 8 kubussen stellen stukjes voedsel voor. We bekijken de verhouding O : $\sqrt[3]{I^2}$; hierbij is O de oppervlakte van het bouwsel en is I de inhoud. Deze constante hangt niet af van de afmetingen van het bouwsel, maar alleen van de vorm. We mogen dus aannemen dat de ribben van de kubusjes 1 zijn.



a. Probeer zonder te rekenen de bouwsels te rangschikken naar grootte van hun verhouding O : $\sqrt[3]{I^2}$.

b. Bepaal die verhouding voor elk van de bouwsels.

13 We bekijken alle soorten rechthoeken. De mate waarin ze afwijken van een vierkant, geven we aan met de verhouding van hun lengte en breedte. Dit getal noemen we e (de excentriciteit van de rechthoek). Zo is $e = 2$ als de lengte van de rechthoek 1 en de breedte 2 is. We zorgen ervoor dat $e \geq 1$.

a. Hoe groot is de waarde van e voor een vierkant?

b. Wat kun je opmerken over rechthoeken met dezelfde e-waarde?

De oppervlakte van een rechthoek noemen we A en de omtrek O.

c. Voor rechthoeken met $e = 4$ geldt: $A = \frac{1}{25}O^2$.

Toon dat aan.

d. Rechthoeken met dezelfde e-waarde zijn uitvergrotingen van eenzelfde rechthoek.

Toon aan dat voor die rechthoeken geldt: $\frac{A}{O^2} = \frac{e}{4(e+1)^2}$.

14 Meneer Broekema geeft lessen van 50 minuten. Daarvan besteedt hij 20 minuten aan de bespreking van het huiswerk en uitleg; de rest van de tijd helpt hij de leerlingen individueel. Het aantal leerlingen dat hij in een lesuur heeft, noemen we A. De tijd (in minuten) die hij voor elke leerling individueel heeft, noemen we T.

a. Geef het verband tussen A en T.

b. Meneer Broekema heeft uitgerekend dat hij in een bepaalde klas 50 seconden voor elke leerling individueel heeft per les. Hoeveel leerlingen heeft hij in die klas?

c. Wat gebeurt er met T als A 2 keer zo groot wordt? Wat gebeurt er met T als A $1\frac{1}{2}$ keer zo groot wordt?

In een andere klas is één leerling vertrokken. Meneer Broekema heeft uitgerekend dat hem dat 3 seconden per leerling individueel scheelt.

d. Noem het aantal leerlingen dat hij eerst in de klas had x, dan geldt: $\left(\frac{30}{x}+\frac{1}{20}\right)(x-1)=30$. Leg dat uit.

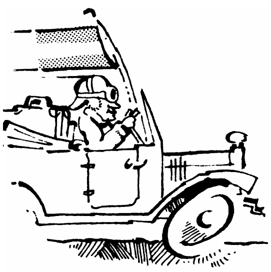
e. Los deze vergelijking op door de haakjes weg te werken en beide kanten met x te vermenigvuldigen.

f. Hoeveel leerlingen heeft hij nu nog in die klas?

Als A k keer zo groot wordt, dan wordt T k keer zo klein en omgekeerd. A is dan evenredig met het omgekeerde van T. We zeggen: A is **omgekeerd evenredig** met T.

15 Meneer de Vrij rijdt 600 km over Duitse autowegen naar zijn vakantiebestemming. De reistijd T (in uren) hangt af van de (gemiddelde) rijsnelheid v (in km/u).

a. Geef een formule voor het verband tussen v en T. Teken de grafiek van T als functie van v op je GR.



b. Meneer de Vrij heeft dit jaar een nieuwe auto gekocht. Zijn rijsnelheid was vorig jaar 90 km/u. Met zijn nieuwe auto weet hij de rijsnelheid op te voeren tot 100 km/u. Hoeveel scheelt dat in zijn reistijd over de Duitse autowegen?

c. Mevrouw de Vrij zit op de terugweg achter het stuur. Zij rijdt, ook omdat het wat minder druk is, met een gemiddelde rijsnelheid van 120 km/u. Meneer de Vrij rekent voor, dat de gemiddelde snelheid heen en terug dan 110 km/u is. Als volgt: heen 100 km/u en terug 120 km/u. Dat is gemiddeld 110 km/u. Mevrouw is het hier niet mee eens. Laat zien dat mevrouw gelijk heeft.

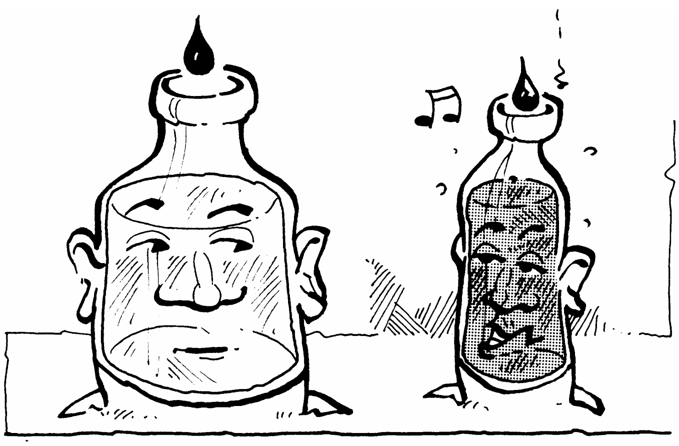
16 Jan van den Heuy is forens. Hij rijdt elke dag heen en weer tussen werk en huis. Zijn gemiddelde snelheid heen is 20 km/u. De gemiddelde snelheid terug 30 km/u.
Bereken zijn gemiddelde snelheid over het traject heen en terug. Doe dit als de weg naar het werk 30 km lang is en ook als die 60 km lang is.

> Als $y \sim \frac{1}{x}$, dus $y = \frac{c}{x}$ voor een of ander getal c, dan is de grafiek van y als functie van x een hyperbool met de x-as en de y-as als asymptoten.

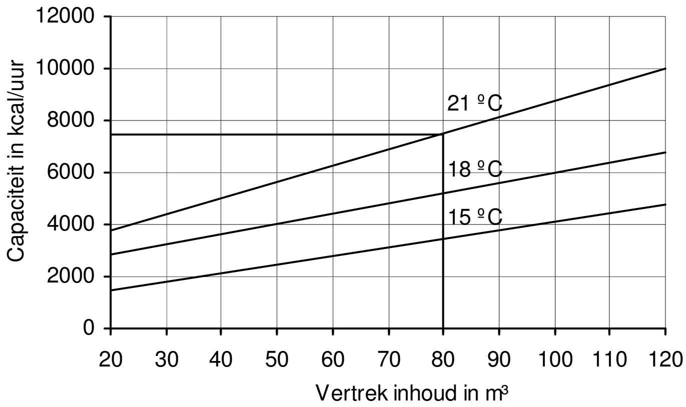
17 Voor x, y en z geldt: $x \sim y$ en $y \sim \frac{1}{z}$.
Als $x = 3$, dan $y = 6$ en $z = 1$.
Druk y uit in x, druk y uit in z en druk z uit in x.

3 Toepassingen

1 Alcoholpromillage
Van alcohol word je dronken. Hoe dronken je wordt, hangt niet alleen af van het aantal glazen alcoholische drank, maar ook van je lichaamsgewicht. Het aantal glazen alcoholische drank noemen we A, het gewicht G (in kg) en het alcoholpromillage in je bloed P. We nemen aan dat alle glazen evenveel alcohol bevatten.
Met de volgende vuistregel kun je P berekenen als je A en G kent: $P = 18 \cdot \frac{A}{G}$. Deze formule geldt een half uur nadat je snel achter elkaar de glazen hebt gedronken.
Als je met een alcoholpromillage boven 0,5 aan het verkeer deelneemt, ben je strafbaar.
a. Hoeveel glazen kan iemand van 72 kg maximaal drinken, wil hij nog aan het verkeer deel mogen nemen?
b. Iemand drinkt 3 glazen snel achter elkaar. P hangt af van zijn gewicht G.
Teken de grafiek van P als functie van G.
c. Neem voor G het getal 72.
Zijn A en P evenredige grootheden?
d. Neem voor A het getal 3.
Zijn P en G evenredige grootheden?
e. Neem voor P het getal 0,5.
Zijn A en G evenredige grootheden?



2 In kleinere kamers staan meestal kleinere cv-radiatoren dan in grotere kamers. Dit heeft te maken met de zogenaamde capaciteit van de verwarming; dit is een maat voor de hoeveelheid warmte die een radiator af kan geven. De grootte van de kamer bepaalt hoeveel capaciteit er nodig is. Hieronder zie je een grafiek waaruit je de benodigde capaciteit kunt aflezen als je de inhoud van de kamer kent.



Om een kamer van 80 m^3 op een temperatuur van 21 °C te houden is volgens de grafiek een capaciteit van ongeveer 7500 kcal/uur nodig.

a. Welke capaciteit is voldoende om de kamer op 18 °C te houden?

b. Een kamer van 8 m lang, 4 m breed en 2,60 m hoog moet een temperatuur van 18 °C hebben.
Welke capaciteit is nodig?

Dat de grafieken stijgend zijn is niet verwonderlijk. Ook niet dat de grafieken bij hogere temperaturen hoger liggen. Maar waarom lopen de grafieken niet parallel?

c. Een kamer moet op 15 °C gehouden worden.
Hoeveel moet de capaciteit stijgen als de kamer 1 m^3 groter wordt?
Een andere kamer moet op 18 °C gehouden worden.
Hoeveel moet de capaciteit stijgen als deze kamer 1 m^3 groter wordt?

d. Leg nu uit waarom de grafieken niet parallel lopen.

e. Een radiator heeft een capaciteit van 8000 kcal/uur.
Op welke temperatuur kan deze radiator een kamer van 110 m^3 ongeveer houden?

f. Een radiator heeft zo'n capaciteit dat een kamer van 50 m^3 op 18 °C gehouden kan worden.
Hoeveel m^3 mag de kamer zijn die door dezelfde radiator op 15 °C kan worden gehouden?

g. Bereken voor iedere lijn $\frac{\Delta cap}{\Delta inh}$.

h. Een kamer van 120 m^3 heeft een capaciteit van 6800 kcal/uur nodig om hem op 18 °C te houden.

Gebruik je antwoord op vraag **g** om te *berekenen* hoeveel capaciteit een kamer van 144 m^3 nodig heeft om hem op 18 °C te houden.

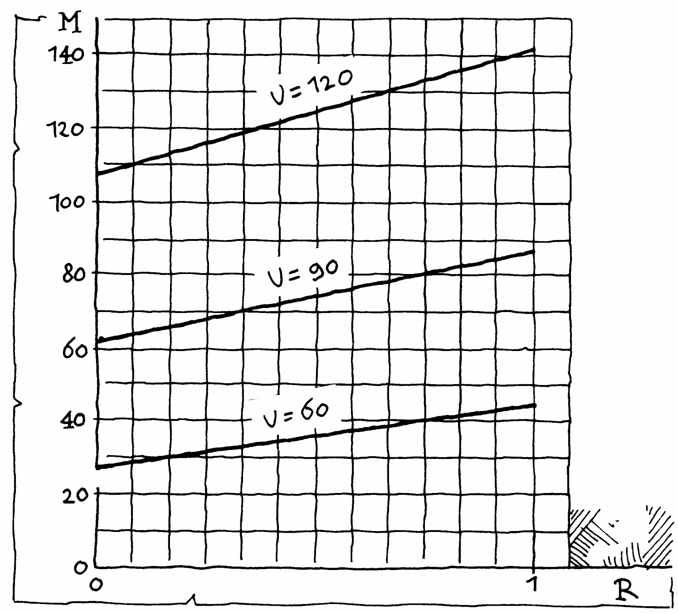
i. Stel voor elke lijn een formule op. Kies zelf letters voor de capaciteit en de inhoud.

3 Stel je voor, je rijdt op een autoweg en voor je wordt plotseling geremd. Jij remt ook uit alle macht. Hoeveel meter leg je af (sinds het moment waarop je voorganger remde) voordat je stil staat? Dat hangt af van twee factoren: je *reactietijd* (de tijd die verstrijkt tussen het moment dat je voorganger remt en het moment dat jij remt) en de *snelheid* waarmee je rijdt.

M = het aantal meters dat je af legt voordat je stil staat.

R = je reactietijd (in seconden).

Hieronder staan bij drie snelheden V (in km/u) de grafieken van het verband tussen M en R.



a. Stel een formule op voor de lijn V = 90.

b. Neem aan dat jouw reactietijd 0,5 sec bedraagt. Bij elke snelheid V hoort een waarde van M.

Hoe kun je uit de grafieken concluderen dat het verband tussen M en V *niet* lineair is?

4 In veel kranten staan tegenwoordig advertenties waarin leningen worden aangeboden. Hieronder staat een tabel uit zo'n advertentie.

TARIEF

Lening	Termijnbedrag per maand	Looptijd in maanden
2000	40	69
4000	80	69
6000	120	69
8000	160	69
10000	200	69
12000	240	66
14000	280	66
16000	320	66
18000	360	66
20000	400	66
25000	500	66
30000	600	66
40000	800	66

a. Als iemand € 4000 leent, dan moet hij 69 maanden lang € 80 betalen.
Hoeveel betaalt hij in die maanden in totaal?
Hoeveel rente betaalt hij dus in totaal?
Hoeveel procent is dat van de € 4000 die hij leent?
b. Beantwoord dezelfde drie vragen als niet € 4000 geleend wordt, maar € 2000, € 6000, € 8000 en € 10000.
Schrijf je antwoorden overzichtelijk in een tabel:

Lening	betaald	rente	percentage dat rente is van lening
2000			
4000			
6000			
8000			
10000			

c. In vraag **a** heb je de leningen bekeken die in 69 maanden afgelost worden.
Geldt hetzelfde percentage ook voor de andere leningen uit de tabel?
d. Is het voordelig of nadelig voor een lener om één grotere lening te splitsen in twee kleinere leningen?

Als je veel berekeningen moet maken, is het handig om formules te maken. We gebruiken de volgende letters:
Lening: L
Termijnbedrag: T
Looptijd in maanden: M
Totale rente: R
Percentage dat de totale rente van de lening is: P.
Omdat het termijnbedrag steeds 2% is van het geleende bedrag, geldt: $T = 0{,}02 \cdot L$.
e. Maak met behulp van de tabel uit vraag **b** een formule voor R (gebruik daarin de letters L, T en M).
Maak ook een formule voor P (gebruik daarin de letters R en L).

We willen met de drie formules voor T, R en P één nieuwe formule voor P maken waarin alleen M voorkomt.

We geven eerst een voorbeeld in een andere situatie.
A = 3B + 2 en B = 2C. Uitgaande van deze twee formules kun je één nieuwe formule voor A maken waarin alleen C voorkomt (en B dus niet). Als volgt:

$A = 3 \cdot B + 2$

← *B vervangen door 2C*

$A = 3 \cdot 2C + 2$

← *Vereenvoudigen*

$A = 6C + 2$

Nog een voorbeeld
Van de twee formules A = 5B + 3 en B = 2C + 1 maken we één formule voor A waarin alleen C voorkomt.

$A = 5 \cdot B + 3$

← *B vervangen door 2C+1*

$A = 5 \cdot (2C+1) + 3$

← *Vereenvoudigen*

$A = 10C + 8$

f. Probeer dit zelf bij A = 2B – 10 en B = 4C + 1.
Ook bij A = -3B en B = 8C + 8.
g. Maak nu de gewenste formule voor P waarin alleen M voorkomt. Werk eerst T weg uit de formule voor P.

5 Isoleren

Tijdens het stookseizoen verliest een huis warmte aan de omgeving. We letten op het warmteverlies via het dak van het huis. Het ene dak isoleert beter dan het andere. Een maat voor het isolatievermogen is de *warmteweerstand* R. Hoe groter de warmteweerstand R, des te kleiner is het warmteverlies.

Voor het warmteverlies V, uitgedrukt in kcal, via het dak geldt: $V = \dfrac{opp \times tijd \times \Delta Temp}{R}$, waarbij

opp = oppervlakte van het dak in m^2
tijd = tijd in uren
ΔTemp = temperatuurverschil in °C tussen 18°C (stookgrens) en de gemiddelde buitentemperatuur.

Een zeker dak heeft een oppervlakte van 30 m^2. De warmteweerstand R van dit dak is 0,5. Het stookseizoen duurt 6000 uur. Voor het gehele stookseizoen is de gemiddelde buitentemperatuur 12 °C. 1 m^3 aardgas levert 6050 kcal.

a. Laat zien dat er door het warmteverlies via dit dak ongeveer 357 m^3 aardgas extra per stookseizoen verstookt moet worden.

Bij dit dak was R = 0,5. Om deze warmteweerstand R groter (dus het warmteverlies V kleiner) te maken, wordt dit dak met steenwoldekens geïsoleerd. De dikte van de steenwoldekens is bepalend voor de isolatie: iedere toegevoegde cm steenwoldekens zorgt er voor dat R met 0,25 toeneemt. Dankzij de steenwoldekens moet voor het warmteverlies V via het dak per stookseizoen nog maar 119 m^3 worden verstookt, dus drie keer zo weinig als voor de isolatie.

b. Bereken de dikte van de steenwoldekens.

Ook voor de berekening van het warmteverlies door de muren, kan gebruik gemaakt worden van de gemiddelde buitentemperatuur en de eerder genoemde formule voor V. Dat doet men echter niet. Er wordt gekeken naar het aantal graaddagen in een stookseizoen. Hieronder zie je hoe die graaddagen voor een willekeurige week worden bepaald.

dag	gemiddelde etmaaltemp.	huistemperatuur	graaddagen
1	4	18	14
2	8	18	10
3	10	18	8
4	16	18	2
5	15	18	3
6	12	18	6
7	9	18	9 +
			52 = aantalgraaddagen voor deze week

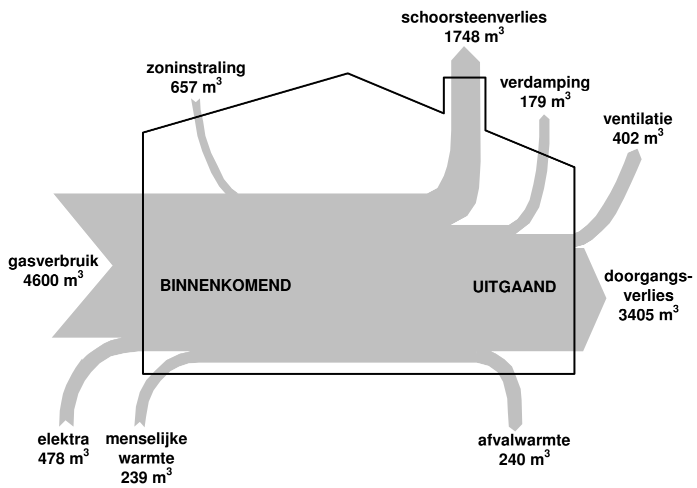
c. Leg uit hoe graaddagen uitgerekend worden.

Met de volgende formule kan het warmteverlies V^* berekend worden: $V^* = \dfrac{opp \times 24 \times aantalgraaddagen}{R}$.

d. Onderzoek voor de willekeurige week van hierboven of het warmteverlies V^* gelijk is aan het warmteverlies V.

In Nederland zijn er gemiddeld 2996 graaddagen per jaar. Door buitenmuurisolatie kan R toenemen van 0,67 tot 1,61. Volgens een vuistregel wordt dan per jaar 10 m^3 gas per m^2 buitenmuur bespaard.
e. Ga met een berekening na of dit klopt.

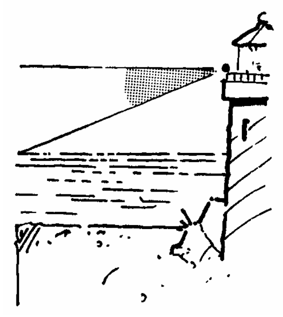
In onderstaande figuur zie je de warmtebalans van een gemiddeld niet-geïsoleerd huis. Alle vormen van energie in deze warmtebalans zijn uitgedrukt in m^3 gas.
In een warmtebalans is de hoeveelheid binnenkomende energie gelijk aan de hoeveelheid uitgaande energie. Alle getallen in het plaatje zijn per jaar.



Het doorgangsverlies is het verlies van warmte door muren, ramen, daken, vloeren, enzovoort. Door betere isolatie kan dit warmteverlies met 55% verminderd worden. Daar staat tegenover dat de zon-instraling dan zal afnemen van 657 m^3 tot 600 m^3. Er ontstaat een nieuwe warmtebalans. Neem aan dat alle andere grootheden in het plaatje, op gasverbruik na, gelijk blijven.
f. Met hoeveel m^3 zal het jaarlijks gasverbruik afnemen? Licht je antwoord toe.

Examen wiskunde A 1996, eerste tijdvak

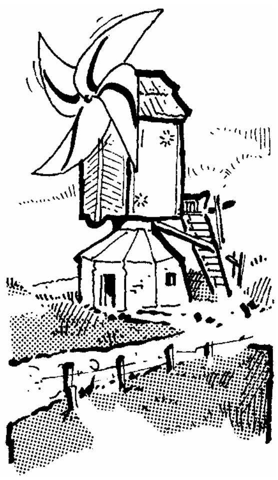
6 Kimduiking



Je staat op een vuurtoren aan het strand en je kijkt over zee. Omdat je je op een behoorlijke hoogte bevindt, ligt de horizon (de kim) duidelijk onder je. Hoeveel hij onder je ligt heet wel de *kimduiking* en wordt gemeten in minuten. Een minuut is het $\frac{1}{60}$ -ste deel van een graad.

In het plaatje hiernaast is aangegeven welke hoek de kimduiking is: de hoek tussen de horizontale lijn en en kijklijn waarlangs je de horizon ziet.
Duidelijk is dat de kimduiking k afhangt van de hoogte h waarop je je bevindt. Er geldt de volgende merkwaardige formule: $k = \sqrt{h}$, waarbij h gemeten wordt in voeten en k in minuten. Een voet is 30,5 cm.
a. Teken de grafiek van k als functie van h. Welk window kies je?
b. Hoe verandert k als h twee keer zo groot wordt?
Hoe moet je h veranderen als je k twee keer zo groot wilt maken?
c. Iemand verplaatst zich van hoogte 36 voet naar hoogte 36,4 voet.
Hoeveel neemt de kimduiking dan toe?
Hoeveel is dat gemiddeld per voet dat de hoogte toeneemt?

Het is ouderwets om hoeken in minuten te rekenen en hoogtes in voeten. Als we de kimduiking gewoon in graden rekenen en de hoogte in meters, wordt de formule minder mooi.
d. Stel de nieuwe formule op.

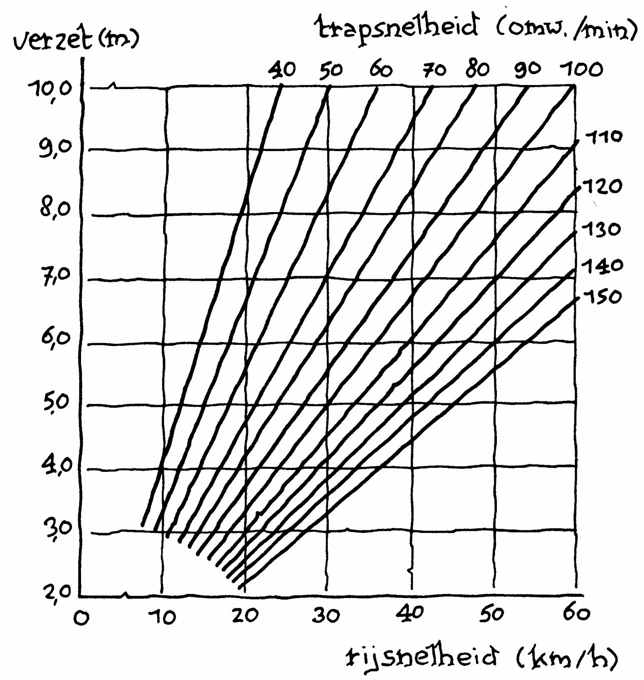


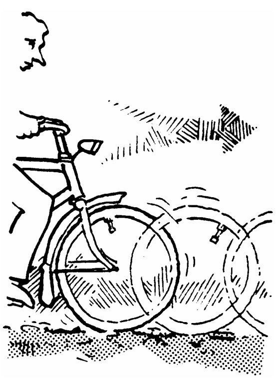
7 Windenergie
De hoeveelheid vermogen die een windmolen levert, is evenredig met de derdemacht van de windsnelheid. De windsnelheid noemen we w (m/s) en de geleverde energie E (watt). Er is dus een evenredigheidsconstante c, zo dat $E = c \cdot w^3$.
Een zekere molen levert 300 watt bij een windsnelheid van 10 m/s.
a. Bereken de evenredigheidsconstante c.
b. Teken de grafiek van E als functie van w. Kies bij het window: $0 \leq x \leq 50$. Wat zijn de bijbehorende y-waarden?
c. Hoe hard moet het waaien wil de geleverde energie 500 watt bedragen?
d. Als het harder gaat waaien neemt de geleverde energie toe. De windsnelheid neemt toe van 10 tot 10,6 m/s.
Met hoeveel watt neemt de geleverde energie dan toe?
Hoeveel is dat gemiddeld per m/s dat de windsnelheid toeneemt?

8 Verzet

Als je tegen een berg op fietst of tegen de wind in, kun je beter in een kleine versnelling rijden. In wielertermen: in een kleiner verzet. Dan gebruik je op het achterwiel een groot tandwiel, dus met veel tandjes.
Vergelijk een groot met een klein verzet. Bij beide trappen we de pedalen één keer rond.
a. Bij welk van de twee rijden we het hardst?
Bij welk van de twee kost dat het meeste moeite?

Hieronder staat een **bundel grafieken**, afkomstig uit het *Prisma Fietsboek*. Bij twaalf trapsnelheden is de grafiek getekend van het verband tussen de rijsnelheid en het verzet. Hierbij is het verzet het aantal meters dat je aflegt, als je de pedalen één keer rond trapt.





b. Anneke trapt de pedalen elke seconde één keer rond met een verzet van 6,0 meter.
Hoe hard fietst Anneke (in km/uur)?
c. Anneke rijdt in een zeker verzet en zal niet schakelen (van verzet veranderen). Als ze twee keer zo hard wil rijden, moet ze dan ook twee keer zo snel trappen?
Onderzoek met de grafiek of dat het geval is.

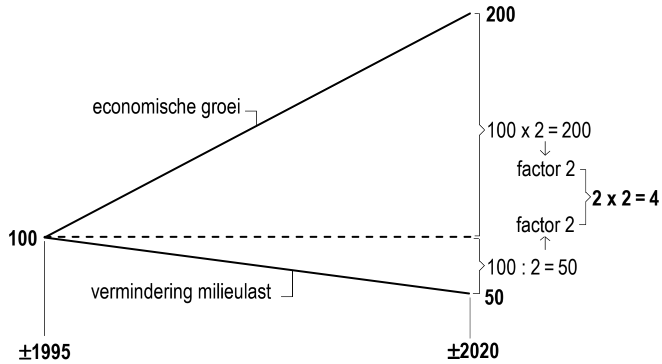
Algemener geldt: als Anneke p keer zo hard wil gaan rijden, moet ze ook p keer zo snel gaan trappen. De trapsnelheid noemen we T, de rijsnelheid S.
d. Teken de grafiek voor T en S, bij verzet V = 6 (T verticaal, S horizontaal).
e. Stel een formule op voor T uitgedrukt in S bij V = 6.

4 Exponentiële groei

1 Het eeuwige leven
Van een nieuwe generatie zoetwaterpoliepen sterft de helft in het eerste levensjaar. Van de dieren die het tweede jaar halen, sterft weer de helft. Van de dieren die het derde jaar halen, sterft ook weer de helft. Enzovoort.
a. Welk deel haalt het vierde jaar? En welk deel het zesde jaar?
b. Hoe oud kan een poliep eigenlijk worden?

2 Economische activiteit en milieulast
Tussen 1995 en 2020 zullen de economische activiteiten verdubbelen. Dat klinkt heel mooi, maar dat brengt wel een grotere last voor het milieu met zich mee (meer energieverbruik; uitputting van grondstoffen). Minister de Boer streeft in deze periode juist naar een halvering van het gebruik van energie en grondstoffen. Volgens het ministerie van VROM moet er daarom vier keer zo effectief met energie en grondstoffen worden omgesprongen.

FACTOR 4
Bij een uitgangspositie op niveau 100 leidt verdubbeling van de economische activiteiten en halvering van de milieulast in 25 jaar tot een efficiencyverbetering met een factor 4



NRC Handelsblad 180397/Bron: Ministerie VROM

a. Kun jij die factor 4 verklaren?

Veronderstel dat de economische activiteit in een periode 1,2 keer zo groot wordt en dat ondertussen het energie- en grondstoffenverbruik met éénderde moet afnemen.
b. Hoeveel keer zo effectief moeten we dan met energie en grondstoffen omspringen?

3 De huizenprijs

De huizen zijn in Nederland tussen 1985 en 1995 anderhalf keer zo duur geworden. Maar de mensen zijn ook meer gaan verdienen: 1,2 keer zo veel.

a. Zijn huizen dus wel echt duurder geworden ten opzichte van het inkomen?

Om de stijging van de huizenprijs goed te kunnen beoordelen, is het eerlijker om te kijken hoeveel keer zo duur een huis is geworden *ten opzichte van* het inkomen van de mensen.

b. Hoeveel keer zo duur zijn huizen dan geworden?

4 Procenten en vermenigvuldigingsfactoren

We gaan nog even verder met de huizenprijs uit de vorige opgave. Deze werd, zoals we zagen, tussen 1985 en 1995 anderhalf keer zo groot: de prijs steeg met 50%.

a. Hoeveel keer zo duur wordt een product als de prijs toeneemt met: 15%, 1,5%, 247% en 0,24%?

En als de prijs afneemt met: 15%, 1,5%, 99% en 0,24%?

b. Met hoeveel procent neemt de prijs toe of af, als het product 3 keer zo duur wordt? Als het 0,75 keer zo duur wordt? Als het 1,03 keer zo duur wordt? En als het 0,15 keer zo duur wordt?

> We bekijken de hoeveelheid H van een zeker goedje. H varieert in de tijd.
> Als H toeneemt met p%, dan wordt H $1+\frac{p}{100}$ keer zo groot.
> Als H x keer zo groot wordt, dan neemt H toe met $(x-1)\cdot 100\,\%$.

5 **a.** Controleer bovenstaande voor p = 50.

b. Controleer bovenstaande voor $x = 1\frac{1}{2}$.

6 Aandelen

De aandelen WM zijn in 1998 met 50% gestegen. In 1999 daalden ze met 10% maar in 2000 stegen ze weer, nu met 30%.

Met hoeveel procent zijn de aandelen in totaal gestegen in de drie jaren?

Tip: Stel dat de aandelen WM begin 1998 100 euro waard waren.

7 Actieprijs of prijzenactie?

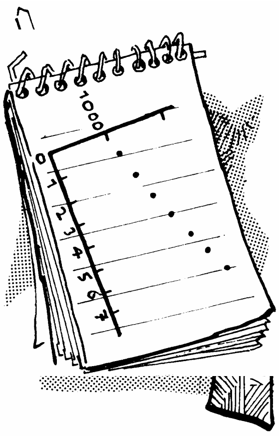
In een winkelstraat voeren twee concurrenten een actie. De een verhoogt zijn prijzen eerst met 10% en geeft vervolgens 10% korting. De ander geeft 10% korting en verhoogt dan zijn prijzen met 10%.

a. Is de eerste winkelier even duur gebleven als hij voor de actie was?
En de tweede winkelier?

b. Voor de actie waren de winkeliers precies even duur.
Welke van de twee is het duurst na de actie?

8 Jan kreeg vorig jaar bij het kopen van een apparaat 13% korting op de winkelprijs. Jannie kreeg dit jaar bij het kopen van hetzelfde apparaat 25% korting op de nieuwe winkelprijs. Jan betaalde vorig jaar evenveel als Jannie dit jaar.
Met hoeveel procent is de winkelprijs van vorig jaar gestegen naar de nieuwe winkelprijs van dit jaar?
Tip: Stel dat het apparaat vorig jaar 100 euro kostte.

Naar: Wiskunde Olympiade 1997, vraag A2



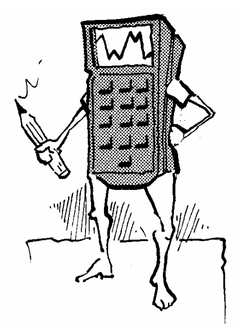
9 We volgen de groei van een spaarrekening waarop jaarlijks 10% rente wordt bijgeschreven. Het beginkapitaal is 1000 gulden. Het kapitaal na t jaren sparen is K(t) gulden.

a. Maak een tabel:

t	0	1	2	3	4
K(t)	1000				

b. Hoeveel keer zo groot wordt het kapitaal in één jaar?
c. Hoeveel keer zo groot wordt het in drie jaar?
d. K(10) is de grootte van het kapitaal na 10 jaar.
Bereken K(10) met de knop $\boxed{\wedge}$ van de GR.

e. Geef een formule voorn K(t) en teken de grafiek op de GR.



Opmerking

Op de GR kun je gemakkelijk een groeitabel als in opgave **9a** te maken. Als volgt:
1000 ENTER
ANS x 1.1 ENTER
ENTER ENTER ENTER enzovoort.
Maar het kan ook op andere manieren.

10 Spreeuwen

Spreeuwen komen 's zomers in grote zwermen voor. De hemel ziet dan zwart van deze vogels. Zo'n zwerm kan veel overlast en schade aan de oogst veroorzaken.

Hoe groot is de aanwas van spreeuwen in een broedseizoen? In de literatuur tref je de volgende gegevens aan. Een spreeuwenpaar krijgt gemiddeld 4,3 jongen in het eerste broedsel. 35% van de paren produceert hetzelfde jaar nog een tweede broedsel van gemiddeld 3,5 jongen.
a. Laat zien dat een groep spreeuwen in een jaar tijd 3,76 keer zo groot wordt.

Spreeuwen kunnen vijftien jaar oud worden. De jongen van dit jaar zijn volgend jaar volwassen. We starten met een zwerm van 100 spreeuwen die net volwassen zijn geworden. Veronderstel dat er geen spreeuwen vroegtijdig dood gaan. Ieder jaar wordt de groep 3,76 keer zo groot.
b. Uit hoeveel spreeuwen bestaat de groep dan over 15 jaar?

Dat is een schrikbarend groot aantal. Soms neemt het aantal spreeuwen in een streek inderdaad spectaculair toe, maar nooit tot zulke gigantische aantallen als je in **b** hebt berekend.
c. Hoe zou dat komen?

Gegevens uit: *De spreeuw* (Het Spectrum, 1978)

Een hoeveelheid H groeit **exponentieel** in de tijd t als H gedurende elke tijdseenheid een vaste factor keer zo groot wordt: de **groeifactor**.

Als de beginhoeveelheid A is en de groeifactor g, dan:

t=0		*t=1*		*t=2*		*t=3*	
A	$\rightarrow$ MAAL g $\rightarrow$	$A \cdot g$	$\rightarrow$ MAAL g $\rightarrow$	$A \cdot g^2$	$\rightarrow$ MAAL g $\rightarrow$	$A \cdot g^3$	$\rightarrow \dots$

Algemeen: $H = A \cdot g^t$

11 Werken onder hittebelasting

Een achturige werkdag bij hoge temperatuur is vooral bij zware spierarbeid te zeer belastend. Daarom is soms arbeidstijdverkorting verplicht. Bij een bedrijf gaat dat zo:

> Tot en met een temperatuur van 25 °C is een achturige werkdag toegestaan. Gaat de temperatuur een stap van 3 °C omhoog, dan moet de arbeidstijd met 50% worden bekort. Na een volgende stap van 3 °C volgt weer een verkorting met 50%. Enzovoort.

a. Wat is de arbeidstijd bij de temperaturen 25 °C, 28 °C, 31 °C en 34 °C?
Zet de bijbehorende vier punten uit in een *stippen*grafiek.

De grafiek kan worden uitgebreid voor de tussenliggende temperaturen. We bekijken twee manieren om dat te doen.
1) De arbeidstijd blijft telkens 3 °C lang gelijk; dat is in het voordeel van de werkgever.
2) De grafiek wordt een vloeiende kromme lijn door de vier stippen.

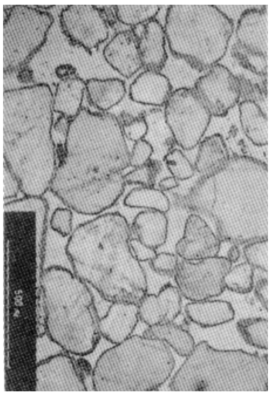
b. Teken met kleur beide grafieken in de figuur bij **a**.
c. Bepaal in beide gevallen de arbeidstijd bij een temperatuur van 26,5 °C.

Het aantal toegestane arbeidsuren noemen we A, het aantal graden dat de temperatuur *hoger* is dan 25 °C noemen we h (de overschrijdingstemperatuur).

d. Welke van de volgende formules is goed?
$A = 8 \cdot 0{,}5^{h}$, $A = 8 \cdot 0{,}5^{3h}$, $A = 8 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{3}h}$.

e. De temperatuur in °C noemen T. Je vindt h dus door 25 van T af te trekken.
Geef een formule voor A, uitgedrukt in T.

12 Zandzeven



Zandkorrels in doorsnee, 70 maal vergroot.

Onder de verzamelnaam "Wadden" kennen we een gebied dat heden ten dage internationaal wordt gekwalificeerd als een zeer bijzonder stukje van ons steeds dichter bevolkte land. Allerlei facetten van de Wadden worden onderzocht. Zo ook de vraag waaruit dit wonderlijke natuur-, vakantie- en woongebied nu eigenlijk is ontstaan.
Het Geologisch Instituut van de Rijksuniversiteit van

Groningen heeft deze vraag aangepakt. Er werden

daartoe 300.000 zandmonsters van de stranden en

Van zo'n zandmonster wordt een korrelgrootteverdeling gemaakt. Daarvoor gebruikt men een stapel van zeven met verschillende maaswijdten. Die maaswijdten verschillen een constante factor.
Een bekende reeks is: $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{128}$, ..., 16 mm (elke volgende term is 2 keer zo groot als de vorige).
a. Uit hoeveel zeven bestaat de reeks en in hoeveel klassen worden de zandkorrels verdeeld?

De zeven worden genummerd; de fijnste zeef krijgt nummer 1, de op een na fijnste zeef krijgt nummer 2, enzovoort.
b. Geef een formule voor de maaswijdte van de zeef met nummer n.

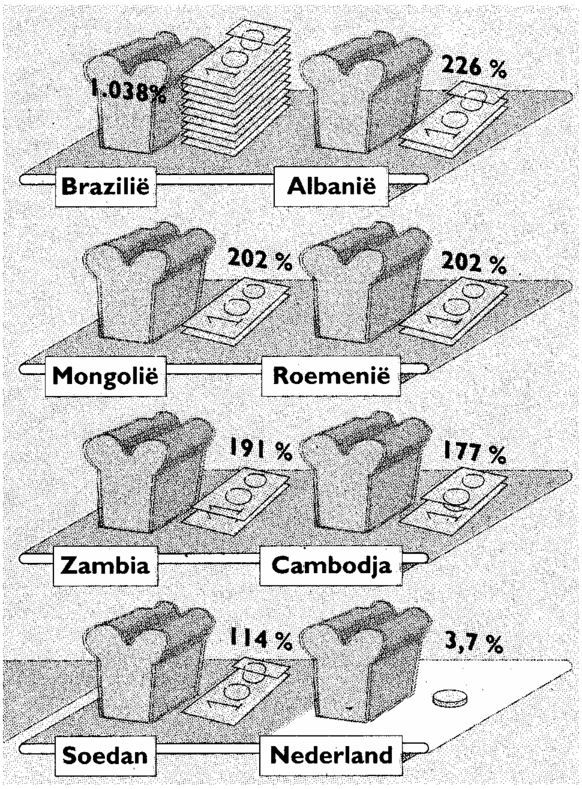
Voor het strandonderzoek nam men de reeks:
... , 595 , 500 , 420 , 353 , ... (gemeten in µm).
1µm = 1 micrometer = 0,001 mm.
c. Vul de reeks naar links en naar rechts aan met twee waarden.

De stapel van zeven wordt in een trilmachine gezet. Op bijvoorbeeld de 420-zeef blijft dat deel van het zand liggen dat wel door de 500-zeef past maar niet door de 420-zeef. Zodoende wordt het zand verdeeld in zeefklassen, die worden gewogen. Vervolgens wordt berekend hoeveel procent van het gehele monster in de verschillende klassen zit. Uit de zo bepaalde korrelgrootteverdeling kunnen conclusies getrokken worden over de vorming van het zandgebied.
De zeefklassen zijn niet even breed.
d. Welke klassen zijn de smallere en welke de bredere?
e. Waarom heeft men niet gekozen voor even brede zeefklassen, denk je?

13 Inflatie

Veel landen in de wereld hebben grote problemen met inflatie. Inflatie, ook wel geldontwaarding genoemd, betekent dat je voor dezelfde goederen steeds meer moet betalen. In Nederland is de inflatie nooit zo groot; meestal enkele procenten per jaar. In sommige ontwikkelingslanden is de inflatie soms meer dan 100%.

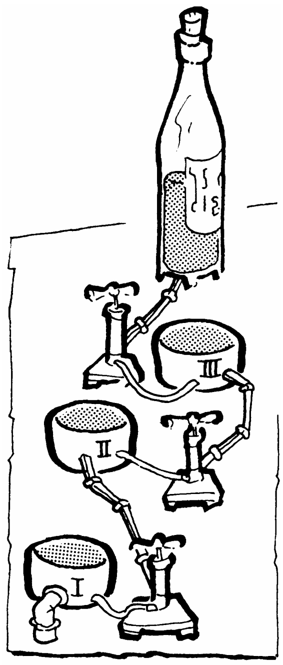
In Hongarije was de inflatie tussen 1990 en 1997 ongeveer 20%. We nemen aan dat elk jaar de goederen 1,2 keer zo duur worden.
Begin 1990 kostte een brood nog ongeveer 50 forint.
a. Hoeveel kostte dat brood begin 1997?
b. Stel een formule op voor P (de prijs van een brood) uitgedrukt in t, het aantal jaar na begin 1990.
c. Maak een tabel met de GR.
Zoek op die manier uit hoe lang het duurt voordat de prijs van een brood is opgelopen tot 100 forint.
Bepaal met de GR in welke maand van welk jaar een brood 100 forint kostte.
d. Wanneer is de prijs van een brood nog eens 2 keer zo hoog, dus 200 forint? En na hoeveel jaar 400 forint?



Inflatiekampioenen van 1992

De gevolgen van hoge inflatie voor het dagelijks leven zijn enorm. Winkeliers moeten dagelijks hun prijzen aanpassen en gepensioneerden zien de koopkracht van hun pensioen kelderen.
Uit: *NRC* 1 september 1993

14 Nog meer inflatie



De hyperinflatie van de natio-nale munt heeft de Joegoslavische bank ertoe gedwongen een nieuw biljet van 10 miljard dinar uit te geven. Het nieuwe biljet is nu amper 12 gulden waard en zal eind volgende week nog maar 8 gulden waard zijn.
Uit: *De Gelderlander* 210993

Anneke was in de zomer van ‘96 op vakantie in Spanje. Ze was in ‘91 ook al eens in Spanje geweest. Toen had zij daar heel goedkoop een mooie spijkerbroek op de kop getikt voor maar 8000 pesetas. Afgelopen vakantie zag zij diezelfde spijkerbroek weer hangen. Maar die kostte nu 11000 pesetas. Toen zij vroeg hoe dat kon, mompelde de verkoper iets van “Inflationos, señorita”.
a. Stel dat de inflatie al die tijd 6% per jaar was.
Hoe duur zou de broek dan in de zomer van ‘96 hebben moeten zijn? En bij 7%?
b. Uit **a** volgt dat de inflatie tussen de 6% en de 7% per jaar geweest is. Door nog wat meer te rekenen, vind je dat de jaarlijkse inflatie tussen 6,5% en 6,6% ligt.
Bereken ook nog wat de broek in 1996 gekost zou hebben, bij een inflatie van 6,55% per jaar.
Wat is dus de beste benadering voor de jaarlijkse inflatie, 6,5% of 6,6%?
c. Stel een formule op voor de prijs P van de broek uitgedrukt in t, het aantal jaren na de zomer van ’91.

15 Beleggen
Het beleggingsfonds “Profishare” belooft in een advertentie dat mensen die geld bij hen beleggen na vijf jaar het dubbele van hun inleg terug krijgen. Volgens diezelfde advertentie had het fonds de afgelopen jaren een gemiddeld rendement van 14,4% per jaar.
a. Bereken hoeveel keer zo groot het kapitaal van het beleggingsfonds in vijf jaar wordt bij een jaarlijks rendement van 14,4%.

Het rendement van het beleggingsfonds was niet elk jaar 14,4%, maar het verschilde per jaar. Het rendement over de afgelopen vijf jaren was respectievelijk 6, 8, 15, 20 en 23 procent.
b. Bereken hoeveel keer zo groot een kapitaal bij het beleggingsfonds werd in de afgelopen vijf jaar.
c. Het antwoord bij **b** klopt niet helemaal met de beweerde 14,4% per jaar.
Verbeter dit percentage (door middel van uitproberen).

16 Waterzuivering

Water dat opgepompt wordt uit de grond of uit rivieren is niet zo maar geschikt als drinkwater; het moet eerst gezuiverd worden. Het lukt echter niet om het water in één keer goed genoeg te zuiveren, dus wordt het zuiveringsproces meerdere malen uitgevoerd. Net zolang tot de hoeveelheid schadelijke stoffen in het water nog maar enkele procenten bedraagt van de beginhoeveelheid.
Elke keer zuiveren wordt er hetzelfde percentage schadelijke stoffen uitgehaald. Na vier keer zuiveren is de hoeveelheid schadelijke stoffen in het water nog maar 13% van de oorspronkelijke hoeveelheid.
a. Wordt er dan per keer meer of minder dan de helft van de schadelijke stoffen uitgehaald?
b. Bepaal door proberen hoeveel procent van de schadelijke stoffen er per keer (ongeveer) uitgehaald wordt.
c. Stel een formule op voor het percentage van de schadelijke stoffen S dat nog aanwezig is na n zuiveringen.
d. Hoeveel procent van de schadelijke stoffen is er nog over na zes zuiveringen?
e. Zoek uit na hoeveel keer zuiveren er minder dan 2% van de schadelijke stoffen over is.

Deze methode om de groeifactor per keer zuiveren te vinden, kost wat geduld en rekenwerk. Er is ook een methode om de groeifactor direct te berekenen.

In opgave **16** zochten we naar een groeifactor g waarvoor geldt: $g^4 = 0{,}13$.
Dit lijkt op de vraag: voor welke g is $g^2 = 0{,}13$? En daarop weten we het antwoord: $g = \sqrt{0{,}13}$.

Het getal g waarvoor $g^4 = 0{,}13$ wordt wel $\sqrt[4]{0{,}13}$ genoemd; spreek uit: *de vierdemachtswortel van* 0,13.

Je kunt dit getal op de GR op twee manieren uitrekenen:
- $\sqrt[4]{0{,}13} = 0{,}13^{\frac{1}{4}} = 0{,}13^{0{,}25}$; gebruik de toets ^.
- 4 , MATH , 5: $\sqrt[x]{\ }$, ENTER , 0.13 , ENTER

Ga op beide manieren na dat $g = \sqrt[4]{0{,}13} \approx 0{,}60$.

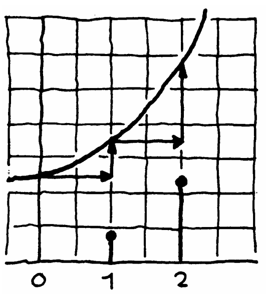
17 Konijnen

In de tijd van de grote ontdekkingsreizen was het gewoon om aan boord levende dieren mee te nemen. Tenslotte was in die tijd nog geen diepvrieskist uitgevonden en zo bleef het vlees tenminste goed. Zo had een groep Engelsen op een reis naar Australië konijnen bij zich. In Australië aangekomen, wisten enkele konijnen te ontsnappen. Omdat het konijn in Australië geen natuurlijke vijanden had en er voedsel in overvloed was, groeide het aantal konijnen razendsnel.

Stel dat er tien konijnen ontsnapt waren en het aantal konijnen elk jaar vijf keer zo groot werd.

a. Stel een formule op voor het aantal konijnen na x jaar.

b. Teken de grafiek van het aantal konijnen tijdens de eerste vijf jaar. Welk window kies je?



c. Maak het toenamediagram van het aantal konijnen bij $\Delta t=1$ jaar.

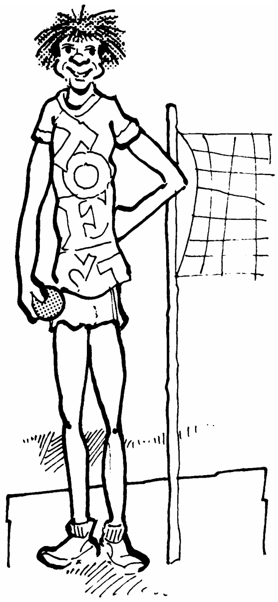
Als je niet meer precies weet hoe dat moet, kijk dan even naar het plaatje hiernaast.

Voorbeeld: tussen $x = 1$ en $x = 2$ is het aantal konijnen met $250 - 50 = 200$ toegenomen. Het toenamediagram heeft daarom bij $x = 2$ een staaf van hoogte 200.

d. Het lijkt alsof de toename ook exponentieel groeit.

Laat met behulp van de tabel zien dat dit inderdaad het geval is.

Uit: *De Stamgasten*, album 20
Toon van Driel



18 Bevolkingsgroei

Nederland verstedelijkt in een rap tempo. Vooral steden in of bij de Randstad groeien als kool. Zo ook de stad Veenendaal tussen Utrecht en Arnhem. In 1983 telde Veenendaal nog maar 42.320 inwoners. Zes jaar later (in 1989) waren dat er al 47.358. In 1995 woonden er in Veenendaal 54.023 mensen. (Gegevens op 1 januari; bron *Statistisch Jaarboek*)

a. Neemt het aantal inwoners van Veenendaal lineair toe? Waarom wel / niet?

b. Hoeveel keer zo groot is het aantal inwoners van Veenendaal geworden in de periode 83-89? En in de periode 89-95?

c. Kun je uit je antwoord op het vorige onderdeel al afleiden of het aantal inwoners exponentieel groeit?
Waarom wel / niet?

Stel dat het aantal inwoners van Veenendaal in de gehele periode 83-96 exponentieel groeide. We willen de groeifactor g per jaar weten.

d. Bereken g.

> Stel dat een hoeveelheid exponentieel groeit en dat de hoeveelheid in 6 uur tijd 5 keer zo groot wordt.
> Dan geldt voor de groeifactor g per uur: $g^6 = 5$.
> Dus: $g = \sqrt[6]{5}$, de zesdemachtswortel van 5.

19 Tsjernobyl

In 1986 vond er een explosie plaats in de kerncentrale van Tsjernobyl in de toenmalige Sovjetunie: de grootste kernramp in de geschiedenis. Daarbij kwamen veel radioactieve stoffen vrij. Deze stoffen *vervallen*: onder het uitzenden van straling veranderen ze in een stof die niet meer radioactief is. De radioactiviteit neemt dus af. En dat gebeurt exponentieel.

Een van de vrijgekomen stoffen in Tsjernobyl was Cesium-141. Van Cesium-141 neemt de radioactiviteit jaarlijks af met 2%.

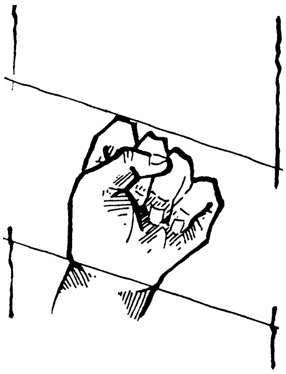
a. Geef een formule voor het percentage straling dat er nog over is na t jaar.

b. Bepaal met je rekenmachine hoeveel jaar het ongeveer duurt voordat de straling gehalveerd is.

20 Halfwaardetijd

Halfwaardetijd is een begrip uit de natuurkunde. Het geeft aan hoe lang het duurt voordat de straling gehalveerd is.

Het begrip halfwaardetijd wordt ook wel gebruikt bij andere zaken dan radioactiviteit.
Stel dat wij 100 mg Pu-238 (plutonium) hebben. De halfwaardetijd van Pu-238 is negen jaar; dat wil zeggen dat er na negen jaar nog de helft van over is.
a. Hoeveel mg Pu-238 is er dan nog na 27 jaar?
b. Hoeveel procent van het Pu-238 vervalt er jaarlijks?
c. Stel een formule op voor de hoeveelheid Pu-238 na t jaar.



21 Vuistregel
Voor het berekenen van de verdubbelingstijd bij een bepaald groeipercentage bestaat een vuistregel. Deze vuistregel gaat alleen op als het groeipercentage niet al te groot is.

Vuistregel

$$\text{verdubbelingstijd} = \frac{70}{\text{groeipercentage}}\,.$$

Dit geldt voor groeipercentages tot 10%.

Stel dat de bevolking van een land elk jaar met 2% groeit.
a. Hoe lang zou het dan volgens de vuistregel duren voordat de bevolking verdubbeld is?
b. Hoeveel keer zo groot wordt de bevolking in de tijd die je bij het vorige onderdeel hebt gevonden? Klopt het ongeveer?

De vuistregel kan ook omgekeerd gebruikt worden. Stel dat van een ander land de bevolking in 14 jaar verdubbelt.
c. Met hoeveel procent groeit de bevolking van dat land dan jaarlijks volgens de vuistregel?
d. Bereken met hoeveel procent de bevolking precies groeit.

5 Gebroken en negatieve exponenten

1 Voorouders
Je hebt vier grootouders; dat noemen we de ouders-van-twee-generaties-terug.
a. Hoeveel voorouders heb jij van-zes-generaties-terug?

Als je een generatie terug gaat, wordt het aantal voorouders twee keer zo groot. Zo zou je door kunnen rekenen tot het begin van onze jaartelling.
b. Hoeveel voorouders van jou zouden er volgens deze manier van rekenen geleefd hebben, toen Christus geboren werd? Schat dat aantal.
c. Waarschijnlijk kwam je berekening uit op een waanzinnig groot aantal voorouders. Dat kan natuurlijk niet.
Kun je uitleggen hoe het komt dat je berekening in **b** een veel te groot aantal geeft?

2 Bacteriën
Bacteriën vermenigvuldigen zich door deling: ze breken middendoor. Elke helft groeit weer tot de oorspronkelijke grootte, en breekt dan weer in tweeën. Uit één enkele bacterie kan op deze manier in korte tijd een enorm aantal bacteriën ontstaan. Daarvoor is wel nodig, dat er voldoende vocht en voedsel aanwezig is en dat de temperatuur gunstig is (voor de meeste soorten 25°C).

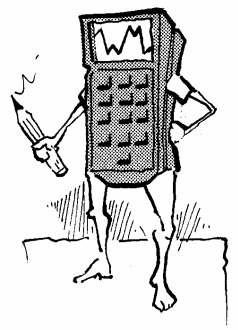
We bekijken een kolonie bacteriën. We veronderstellen dat het groei- en delingsproces één uur duurt en dat er om 12.00 uur 1 mg bacteriën is. Het aantal bacteriën na t uur is B(t) milligram.
a. Maak een tabel:

t	0	1	2	3	4
B(t)	1	2			

b. Teken de vijf punten van de grafiek van de functie B die je in **a** berekend hebt (zet t horizontaal uit en B(t) verticaal).

Omdat de groei van het aantal bacteriën geleidelijk verloopt, krijg je een goed beeld van het aantal bacteriën op elk moment door de getekende punten met een *vloeiende* lijn te verbinden.
c. Geef een formule voor B(t) als t een geheel getal is.
d. 2^3 is het aantal mg bacteriën 3 uur na 12.00 uur.
Onder $2^{2\frac{1}{2}}$ zullen we verstaan het aantal mg bacteriën $2\frac{1}{2}$ uur na 12.00 uur.
Lees uit de grafiek af hoe groot $2^{2\frac{1}{2}}$ ongeveer is.
De groei van het aantal bacteriën is niet lineair. Dat zie je ook aan de formule $B(t) = 2^t$. Omdat de invoer-variabele t in

de exponent voorkomt, spreken we van **exponentiële groei**.



Op de GR kun je gemakkelijk de exponentiële rij 1, 2, 4, 8, 16, ... maken. Als volgt:
Typ in: 1
ENTER
$\times 2$
ENTER
ENTER
ENTER
enzovoort.

3 $2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ en $2^3 = 2\cdot2\cdot2$.
Schrijf je antwoorden als macht van 2:
a. Hoe groot is $2^5 \cdot 2^3$?
b. Hoe groot is $2^5 : 2^3$?
c. Hoe groot is $(2^5)^2$?

4 **a.** Het aantal bacteriën wordt elke 2 uur 2^2 keer zo groot, elke 3 uur wordt het 2^3 keer zo groot en elke 5 uur wordt het 2^5 keer zo groot.
Wat is het verband tussen deze drie groeifactoren?
b. Het aantal bacteriën wordt elke p uur 2^p keer zo groot, elke q uur wordt het 2^q keer zo groot en elke p+q uur wordt het 2^{p+q} keer zo groot.
Wat is het verband tussen deze drie groeifactoren?

5 Wat is het verband tussen 2^p, 2^q en 2^{p-q}?

6 **a.** Het aantal bacteriën wordt elke 3 uur 2^3 keer zo groot. In 12 uur (dat is 4 periodes van 3 uur) wordt het 2^{12} keer zo groot.
Wat is het verband tussen deze twee groeifactoren?
b. Het aantal bacteriën wordt elke p uur 2^p keer zo groot. In $p\cdot q$ uur (dat is q periodes van p uur) wordt het $2^{p\cdot q}$ keer zo groot.
Wat is het verband tussen deze twee groeifactoren?

7 Schrijf als macht van 2:
$2^7 \cdot 2^5$, $2^7 : 2^5$, $(2^7)^5$, $2 \cdot 2^7$, $2^7 : 2$, 1 .

Rekenregels voor machten

I	$a^p \cdot a^q$	=	a^{p+q}
II	$a^p : a^q$	=	a^{p-q}
III	$(a^p)^q$	=	$a^{p \cdot q}$

8 $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ en $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.
a. Hoe groot is $2^4 \cdot 5^4$?
b. Wat is het verband tussen a^p , b^p en $(ab)^p$?

IV $\quad a^p \cdot b^p \quad = \quad (a \cdot b)^p$

9 Vereenvoudig met behulp van deze regels:

$\frac{x^5 \cdot x^3}{x^2 \cdot x^4}$, $\frac{(y^5)^3}{(y^2)^4}$, $\frac{(a^2)^5 \cdot a^3}{a^{13}}$, $\frac{(pq)^5}{p^2q^3}$

$\frac{x^3 \cdot 64x^2}{(2x)^5}$, $\frac{(3y^2)^4}{81y^3}$, $\frac{((p^2)^3)^4}{p^2 \cdot p^3 \cdot p^4}$, $\frac{(a^2b)^3}{a^5b}$

Voorbeeld $8 \cdot 2^k = 2^3 \cdot 2^k = 2^{3+k}$

10 Schrijf zo ook als één macht van 2; k en m zijn natuurlijke getallen.

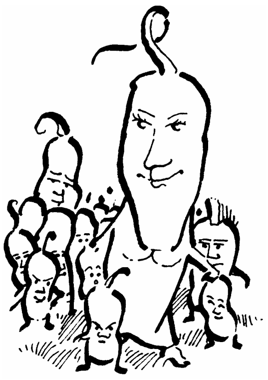
$32 \cdot 2^k$, $2 \cdot 2^k$, $2^k \cdot 2^k$, 8^k , $16^k \cdot 32^k$, $2^k \cdot 4^m$

$\frac{32}{2^k}$, $\frac{2^k}{2}$, $\frac{2^{k+1}}{2^{k-1}}$, $\frac{8^k}{8}$, $\frac{32^k}{16^k}$, $\frac{4^m}{2^k}$

11 **a.** Onderzoek welke van de volgende formules juist zijn voor *elk* natuurlijk getal n.

$3 \cdot 9^n = 27^n$	$2^n + 2^n = 2^{2n}$
$3 \cdot 9^n = 3^{2n+1}$	$2^n + 2^n = 2^{n+1}$
$4^n : 8 = (\frac{1}{2})^n$	$3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}$

Van de onjuiste formules kun je juiste formules maken door ze een klein beetje te veranderen.
b. Doe dat.



12 We gaan weer verder met de bacteriekolonie die zich elk uur verdubbelt. De deling van de bacteriën vindt natuurlijk niet precies op de hele uren plaats. De ene bacterie zal zich eerder delen dan de andere. We mogen wel aannemen dat het delingsproces goed gespreid is in de tijd. We willen nu weten hoeveel keer zo groot het aantal bacteriën per *half* uur wordt.

a. Anneke denkt dat het aantal bacteriën elk half uur $1\frac{1}{2}$ keer zo groot wordt.
Laat zien dat dat niet strookt met het gegeven dat het aantal bacteriën per uur twee keer zo groot wordt.
b. Anneke doet een nieuwe poging: het aantal bacteriën wordt elk half uur 1,4 keer zo groot.
Laat zien dat ook dat niet klopt.
c. Hoeveel keer zo groot wordt het aantal bacteriën per half uur? Zoek dat getal in drie decimalen nauwkeurig.

Het gezochte getal uit vraag **c** noemen we de **groeifactor** per half uur. Noemen we deze groeifactor x, dan moet voor een heel uur gelden: $x \cdot x = 2$.
Dus: $x = \sqrt{2} \approx 1{,}414$.
d. Zoek met je rekenmachine wat de groeifactor per kwartier is, in drie decimalen.
Zoek ook de groeifactor per 20 minuten (dat is $\frac{1}{3}$ uur).

Betekenis van $2^{\frac{1}{3}}$
Een bacteriekolonie wordt elk uur 2 keer zo groot.
Dan wordt de kolonie elke 20 minuten $2^{\frac{1}{3}}$ keer zo groot.
(20 minuten is $\frac{1}{3}$ uur.)

Betekenis van $3^{\frac{4}{5}}$
Een bacteriekolonie wordt elk uur 3 keer zo groot.
Dan wordt de kolonie elke 48 minuten $3^{\frac{4}{5}}$ keer zo groot.
(48 minuten is $\frac{4}{5}$ uur.)
e. Zeg precies wat de betekenis is van $6^{\frac{2}{3}}$ in termen van de groei van een bacteriekolonie.
Teken op de GR de grafiek van $y = 6^x$.
Lees uit de grafiek af hoe groot $6^{\frac{2}{3}}$ ongeveer is.
Bereken de derde macht van dat getal.
Leg met behulp van regel III uit dat $(6^{\frac{2}{3}})^3$ gelijk is aan 36.
f. Dezelfde opdracht voor $6^{1\frac{1}{3}}$.
Hoe groot is $(6^{1\frac{1}{3}})^3$?

13 Er draaien negen planeten om de zon. Onze aarde doet 1 jaar over één omloop. Mercurius en Venus doen korter over een rondje, de andere planeten doen er langer over. Algemeen: hoe verder een planeet van de zon staat, des te langer is zijn omlooptijd. Aan de astronoom Johannes Kepler (1571-1630) danken we de volgende formule: $T = 0{,}2 \cdot R^{1\frac{1}{2}}$. Hierin is R de afstand tot de zon in miljoenen km en is T de omlooptijd in dagen.
a. De aarde is (gemiddeld) 149,5 miljoen km van de zon verwijderd.
Bereken hiermee de omlooptijd. Klopt het redelijk?
b. Saturnus is veel verder van de zon verwijderd dan de aarde: 1427 miljoen km.
Bereken de omlooptijd van Saturnus in jaren.

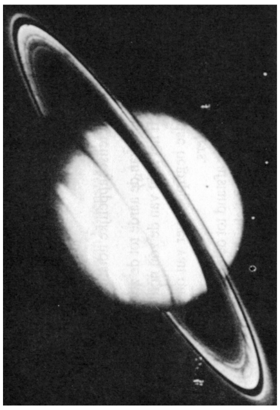
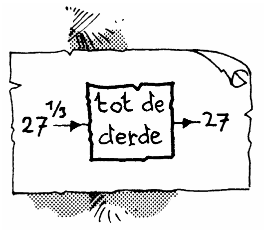


Foto van Saturnus, samengesteld uit opnamen van de Voyager 2 op 4 aug. '81 op 21 miljoen kilometer afstand.

Soms komt een macht met een gebroken exponent mooi uit.
Voorbeeld $27^{\frac{1}{3}}$
De derde macht van dit getal is 27. Dus moet dat getal wel 3 zijn!
We kennen nu ook $27^{\frac{2}{3}}$. Als volgt: $27^{\frac{2}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^2 = 3^2 = 9$.



14 Bereken op deze manier ook zonder rekenmachine de volgende machten. Je kunt natuurlijk wel je rekenmachine gebruiken om je antwoord te controleren.
$1000^{\frac{1}{3}}$, $1000^{\frac{2}{3}}$, $16^{\frac{1}{4}}$, $16^{\frac{3}{4}}$, $49^{\frac{1}{2}}$, $49^{1\frac{1}{2}}$.

15 Test zonder rekenmachine of de regels I, II, III en IV ook voor gebroken exponenten gelden in de volgende gevallen:

I $\quad 64^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$

II $\quad 64^{\frac{1}{2}} \div 64^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

III $\quad (64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$

IV $\quad (64 \cdot 1000)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} \cdot 1000^{\frac{1}{3}}$.

16 Vereenvoudig:
$\dfrac{(a^4)^{\frac{1}{2}}}{(a^4)^{\frac{1}{5}}}$, $\dfrac{b^3 \cdot b^{\frac{1}{3}}}{(b^{\frac{1}{2}})^6}$, $\dfrac{(c^{12})^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{1}{6}}}$, $\dfrac{(d^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(d^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}}}$

Het kwadraat van $x^{\frac{1}{2}}$ is x ; dus $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
De derde macht van $x^{\frac{1}{3}}$ is x ; dus $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.
De vierde macht van $x^{\frac{1}{4}}$ is x ; dus $x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

De n-de macht van $x^{\frac{1}{n}}$ is x ; dus $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Voorbeeld $\sqrt[3]{x^4} = (x^4)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$

17 Schrijf zo ook zonder wortels:

$\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt{\sqrt{c}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{d^5}}$

18 a. Leg uit dat voor elke $x > 0$ geldt: $x^{1\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$.
b. Teken op de GR in één window met $0 \leq x \leq 2$ de grafieken van $y = x$, $y = x^2$ en $y = x^{1\frac{1}{2}}$.

19 Schrijf zonder wortels:
$x^2\sqrt{x}$, $x\sqrt[3]{x}$, $\sqrt{x\sqrt{x}}$, $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}$.

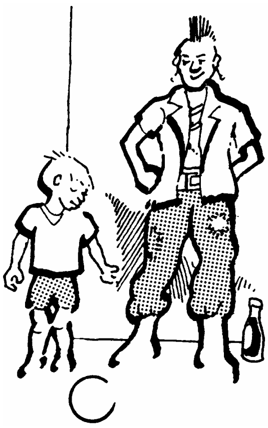
20 Het warmteverlies van een dier hangt af van zijn huidoppervlakte: via een grotere huid gaat meer warmte verloren dan via een kleinere huid. De warmteproductie hangt af van zijn volume: een groot dier produceert meer warmte dan een klein dier. Biologen vergelijken daarom de huidoppervlakte H (in m^2) met het lichaamsgewicht G (in kg). Het verband tussen H en G wordt gegeven door de formule $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$.
De constante c hangt af van de vorm van het dier en is dus per diersoort verschillend. Een paar voorbeelden:
$c_{koe} = 0{,}09$, $c_{aap} = 0{,}12$, $c_{egel} = 0{,}075$ en $c_{muis} = 0{,}09$.
Voor een koe en een muis geldt dus: $H = 0{,}09 \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Een koe weegt gemiddeld 500 kg, een muis 0,05 kg.
a. Bereken de huidoppervlakte van een koe en van een muis.
b. Hoe verhouden zich de lichaamsgewichten van een koe en een muis?
En hoe de huidoppervlakten?

Van een diersoort komen twee formaten voor. De formaten hebben dezelfde vorm, dus ook dezelfde constante c. Het grote formaat is 8 keer zo zwaar als het kleine formaat. We willen weten hoe de huidoppervlakten van de twee formaten zich dan verhouden.

c. Stel dat het gewicht van het kleine formaat g is. Wat zijn dan de huidoppervlaktes van beide formaten (uitgedrukt in g)? Laat daarmee zien dat de huidoppervlakte van het grote formaat 4 keer zo groot is als van het kleine formaat.

d. Dezelfde vraag als in **c** maar nu is het grote formaat 7 keer zo zwaar als het kleine.

e. Grotere dieren kunnen gemakkelijker extreme kou verdragen dan kleine dieren.
Kun je dat gezien de formule verklaren?



21 Langere en zwaardere mensen hebben een grotere huidoppervlakte. De anatoom E. Dubois heeft een formule opgesteld voor de huidoppervlakte H van een mens, uitgedrukt in zijn lichaamsgewicht G en zijn lengte L:

$H = 0{,}007 \cdot G^{0{,}425} \cdot L^{0{,}725}$; H in m^2, G in kg en L in cm.

a. Bereken je eigen huidoppervlakte met deze formule.

b. We gaan de exponenten 0,425 en 0,725 controleren. Als iemand 2 keer zo lang is als een ander, is hij 8 keer zo zwaar en is zijn huidoppervlakte 4 keer zo groot.
Klopt dat met de formule?

In de rest van de paragraaf gaan we ook werken met negatieve exponenten.

22 We bekijken nog eens de bacteriekolonie die zich elk uur verdubbelt (zie opgave **12**). Op een gegeven ogenblik zijn er een aantal bacteriën. Drie uur *daarvoor* waren er minder bacteriën.

a. Hoeveel keer zoveel?

In overeenstemming hiermee spreken we af dat $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Als je dan 3 uur teruggaat in de tijd, wordt de kolonie 2^{-3} keer zo groot.

b. Zeg precies wat de betekenis is van $6^{-1{,}5}$ in termen van de groei van een bacteriekolonie.

c. Leg aan de hand van de groei van een bacteriekolonie uit dat $6^{-1{,}5} \cdot 6^{-2{,}3} = 6^{-3{,}8}$.

We definiëren: $g^{-p} = \frac{1}{g^p}$ (g > 0 en p > 0).

In woorden: g^{-p} en g^p zijn elkaars omgekeerde.

23 a. Als rekenregel I (zie bladzijde 41) ook geldt voor negatieve exponenten, dan moet gelden: $g^p \cdot g^{-p} = g^0$.
Ga na dat dat inderdaad het geval is.
b. Als rekenregel II ook geldt voor negatieve exponenten, dan moet gelden: $g^p : g^{-p} = g^{2p}$.
Ga na dat dat inderdaad het geval is.

Voorbeeld $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(8^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

24 Bereken zonder rekenmachine:
$4^{-\frac{1}{2}}$, $4^{-1\frac{1}{2}}$, $(\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}}$, $(\frac{1}{9})^{-1\frac{1}{2}}$, $0{,}001^{-\frac{2}{3}}$, $0{,}001^{-1\frac{2}{3}}$, $(\frac{2}{5})^{-1}$, $(2\frac{1}{2})^{-1}$

25 Bewijs met behulp van regel III dat geldt: $(\frac{1}{g})^p = g^{-p}$ ($g \neq 0$).

6 Introductie logaritmen

Vraag: *Hoe vaak past 3 in 100?*
Antwoord: *33 keer (en dan houd je rest 1 over).*
Men vraagt hierbij hoe vaak je 3 kunt *optellen*, voordat de som groter dan 100 wordt.
Men kan natuurlijk ook vragen hoe vaak je met 3 kunt *vermenigvuldigen*, voordat het product groter dan 100 wordt. Als het om vermenigvuldigen gaat, zeggen we: *hoe vaak past de factor 3 in 100?*

1 **a.** Hoe vaak past de factor 3 in 100? En in 1000?
b. Hoe vaak past de factor 2 in 100? En in 1000?

2 Anneke opent op 2 januari van het jaar 2000 een spaarrekening. Ze stort er €1000,- op. Elk jaar krijgt ze 10% rente over het bedrag dat op de rekening staat. Die rente wordt na een jaar automatisch op de rekening bijgeschreven. Zodoende krijgt ze het tweede jaar behalve rente over de €1000,- ook rente over de rente van het eerste jaar. Na het derde jaar krijgt ze rente van de rente van de rente. Enzovoort.
a. Ga na dat Annekes kapitaal elk jaar 1,1 keer zo groot wordt.
b. Bereken Annekes kapitaal na 10 jaar.

Anneke spaart totdat ze €10.000,- heeft op haar spaarrekening. Daarvoor moet het beginkapitaal dus 10 keer zo groot worden. Als je wilt weten hoe lang dat duurt, vraag je dus: *hoe vaak past de factor 1,1 in 10.*
c. Bepaal hoe vaak de factor 1,1 in 10 past.

Stel dat het rentepercentage niet 10% is, maar 6%. Anneke wil nog steeds sparen tot €10.000,-. Ze wil weten hoelang dat duurt.
d. Formuleer de bijbehorende vraag: *hoe vaak past de factor ___ in ___.*
e. Beantwoord die vraag.

3 **a.** Hoe vaak past de factor 10 in 21415927?
b. Hoe vaak past de factor 10 in 21415927^2?
c. Hoe vaak past de factor 10 in 21415927^3?

4 Hoe vaak past de factor 10 in een getal van 17 cijfers?

5 Factor 10 past 4 keer in 31.000 en ook 4 keer in 32.000.
a. Hoe vaak past factor 10 in 31.000^2?
En hoe vaak in 32.000^2?
b. Waar zit hem dat verschil in?

Meestal past een factor niet precies een geheel aantal keren in een getal. Maar soms wel. In de volgende opgaven past de factor wel een geheel aantal keren in het gegeven getal.

6 Hoe vaak past de factor in het getal?

a.	factor 8 in 512 ,	factor 2 in 8 ,	factor 2 in 512
b.	factor 2 in 32 ,	factor $\sqrt{2}$ in 2 ,	factor $\sqrt{2}$ in 32
c.	factor 9 in 6561 ,	factor 3 in 9 ,	factor 3 in 6561

7 **a.** Stel dat je weet: factor 8 past a keer in het getal x
en factor 2 past 3 keer in het getal 8.
Hoeveel keer past factor 2 dan in het getal x?
b. Stel dat je weet: factor 1,1 past a keer in het getal f
en factor f past b keer in het getal x.
Hoeveel keer past factor 1,1 dan in het getal x?

De factor f past b keer in het getal x betekent: $f^b = x$.

De conclusie in opgave **7b** berust op een regel voor het rekenen met machten: als $1{,}1^a = 2$ en $2^b = x$, dan $1{,}1^{a \cdot b} = x$ ofwel $(1{,}1^a)^b = 1{,}1^{a \cdot b}$.
Deze regel kennen we voor gehele exponenten a en b.

De factor 2 past 3 keer in het getal 10. Omdat $2^3 = 8$, blijft er nog wat "ruimte" in 10 over. Factor 2 past als het ware iets meer dan 3 keer in 10. We gaan preciezer vastleggen hoe vaak. Daarvoor roepen we de factor 1,1 te hulp.

8 **a.** Hoe vaak past de factor 1,1 in 2?
Hoe vaak past de factor 1,1 in 10?
b. Als we de genoemde regel voor het rekenen met machten toepassen, vinden we dat de factor 2 ongeveer 3,4 keer in 10 past. Kun je dat uitleggen.

De rekenregel voor machten hebben we geleerd voor gehele exponenten. Deze regel gebruiken we nu ook voor niet-gehele exponenten.

Stel dat je weet: factor 1,1 past a keer in het getal x
en factor 1,1 past 7 keer in het getal 2,
dan past de factor 2 $\frac{a}{7}$ keer in het getal x.

Met factor 1,1 kunnen we nauwkeuriger meten dan met factor 2. Dat komt omdat de opvolgende machten van 1,1 minder verschillen. Hieronder staat een tabel van de eerste honderd machten van 1,1 (afgerond, met in totaal tien cijfers voor en achter de komma).

1,1	7,400249944	49,78518112	334,9298035	2253,240236
1,21	8,140274939	54,76369924	368,4227838	2478,564260
1,331	8,954302433	60,24006916	405,2650622	2726,420686
1,4641	9,849732676	66,26407608	445,7915685	2999,062754
1,61051	10,83470594	72,89048369	490,3707253	3298,969030
1,771561	11,91817654	80,17953205	539,4077978	3628,865933
1,9487171	13,10999419	88,19748526	593,3485776	3991,752526
2,14358881	14,42099361	97,01723378	652,6834354	4390,927778
2,357947691	15,86309297	106,7189572	717,9517789	4830,020556
2,593742460	17,44940227	117,3908529	789,7469568	5313,022612
2,853116706	19,19434250	129,1299382	868,7216525	5844,324873
3,138428377	21,11377675	142,0429320	955,5938177	6428,757360
3,452271214	23,22515442	156,2472252	1051,153200	7071,633096
3,797498336	25,54766986	171,8719477	1156,268519	7778,796406
4,177248169	28,10243685	189,0591425	1271,895371	8556,676047
4,594972986	30,91268053	207,9650567	1399,084909	9412,343651
5,054470285	34,00394859	228,7615624	1538,993399	10353,57802
5,559917313	37,40434344	251,6377186	1692,892739	11388,93582
6,115909045	41,14477779	276,8014905	1862,182013	12527,82940
6,727499949	45,25925557	304,4816395	2048,400215	13780,61234

9 **a.** Hoe vaak past de factor 1,1 in 12?
Hoe vaak past de factor 1,1 in 2?
Leg uit hoe hieruit volgt dat de factor 2 ongeveer 3,7 keer in 12 past.
b. Hoe vaak past de factor 1,1 in 540?
Hoe vaak past de factor 1,1 in 31?
Hoe vaak past de factor 31 dus ongeveer in 540?
c. Bepaal met behulp van de tabel hoe vaak ongeveer 31 past in 3300.
d. Bepaal met behulp van de tabel hoe vaak ongeveer 10 past in 1400.

Je kunt nog preciezer meten met de tabel van machten van 1,01. Die staat hieronder.

1,01	1,232391940	1,503752371	1,834863666	2,238882369
1,0201	1,244715860	1,518789895	1,853212302	2,261271193
1,030301	1,257163018	1,533977794	1,871744425	2,283883905
1,04060401	1,269734649	1,549317572	1,890461869	2,306722744
1,05101005	1,282431995	1,564810747	1,909366488	2,329789971
1,061520151	1,295256315	1,580458855	1,928460153	2,353087871
1,072135352	1,308208878	1,596263443	1,947744755	2,376618750
1,082856706	1,321290967	1,612226078	1,967222202	2,400384937
1,093685273	1,334503877	1,628348338	1,986894424	2,424388787
1,104622125	1,347848915	1,644631822	2,006763368	2,448632675
1,115668347	1,361327404	1,661078140	2,026831002	2,473119001
1,126825030	1,374940679	1,677688921	2,047099312	2,497850191
1,138093280	1,388690085	1,694465811	2,067570305	2,522828693
1,149474213	1,402576986	1,711410469	2,088246008	2,548056980
1,160968955	1,416602756	1,728524573	2,109128468	2,573537550
1,172578645	1,430768784	1,745809819	2,130219753	2,599272926
1,184304431	1,445076471	1,763267917	2,151521951	2,625265655
1,196147476	1,459527236	1,780900597	2,173037170	2,651518311
1,208108950	1,474122509	1,798709603	2,194767542	2,678033494
1,220190040	1,488863734	1,816696699	2,216715217	2,704813829

10 a. Hoe vaak past factor 1,01 in 2,5? (een geheel getal)
Hoe vaak past factor 1,01 in 2? (een geheel getal)
Hoe vaak past factor 2 dus ongeveer in 2,5?
b. Bepaal met behulp van de tabel hoe vaak factor 1,3 ongeveer in 2,5 past.
c. Bepaal met behulp van de tabel hoe vaak ongeveer factor 1,1 past in 2. Vergelijk je antwoord met dat van opgave **8a**.
d. Bepaal met behulp van de tabel hoe vaak ongeveer factor 1,414 past in 2.

Hoe vaak past de factor 2 in het getal 30? Als je dat wilt bepalen met behulp van de tabel van machten van 1,01, moet je wel een heel grote tabel hebben. Immers $1{,}01^{100}$ is pas 2,7048. Dit is een groot nadeel van werken met factor 1,01. Vaak kan echter een handigheidje helpen.

11 In opgave **10a** heb je gezien dat de factor 1,01 69 keer past in het getal 2.
Weet je nu ook hoe vaak de factor 1,01 past in 4?
En in 8?

12 a. Hoe vaak ongeveer past factor 2 in het getal 1,25?

Omdat 10 = 8 · 1,25 en de factor 2 (precies) 3 keer in 8 past, weet je nu ook hoe vaak de factor 2 in 10 past.

b. Hoe vaak is dat?
c. Hoe vaak ongeveer past de factor 2 in het getal 9?
d. Hoe vaak ongeveer past de factor 2 in het getal 100?
e. Hoe vaak ongeveer past de factor 9 in 100?

We weten nu hoe we in principe kunnen bepalen hoe vaak de factor 2 past in een getal. Dat aantal keer noemen we de $^{2}\log$ van dat getal (spreek uit twee-log).

> $^{2}\log x$ is het aantal keer dat de factor 2 past in x.
>
> $^{g}\log x$ is het aantal keer dat de factor g past in x.

13 Bepaal met de tabel van machten van 1,01 de volgende logaritmen:
a. $^{2}\log 6$, $^{2}\log 125$, $^{6}\log 125$
b. $^{2}\log 5$, $^{2}\log 125$, $^{5}\log 125$
c. $^{10}\log 123$, $^{10}\log 1234$, $^{10}\log 12345$

14 Bepaal zonder tabel de volgende logaritmen:

$^{2}\log 16$	$^{3}\log 3$	$^{5}\log 625$
$^{2}\log 32$	$^{3}\log 9$	$^{5}\log 25$
$^{2}\log 64$	$^{3}\log 27$	$^{5}\log 5$

15 Bepaal zonder tabel de volgende logaritmen.
a. $^{4}\log 64$, $^{8}\log 64$, $^{4}\log 8$.
b. $^{10}\log 1000$, $^{10}\log 100$, $^{100}\log 1000$

16 Voor $^{10}\log$ zit er een aparte knop op je rekenmachine: $\boxed{\text{LOG}}$. Het grondtal 10 wordt weggelaten.
Controleer daarmee je antwoorden op **13c**.

7 Rekenen met logaritmen

1 Een bacteriekolonie verdubbelt zich elk uur. Op een gegeven moment zijn er 500 bacteriën. *Hoe lang duurt het voordat de kolonie is uitgegroeid tot 3000 bacteriën?*
a. Leg uit dat het beantwoorden van deze vraag neerkomt op het oplossen van de vergelijking $2^t = 6$.
b. Ga na dat de gezochte waarde van t ligt tussen 2,5 en 2,6.

We willen dus weten hoeveel keer de factor 2 in het getal 6 past. In de vorige paragraaf hebben we dit aantal keer ${}^{2}\log 6$ genoemd.

2 **a.** Wat is de betekenis van ${}^{3}\log 81$?
b. Hoe groot is ${}^{3}\log 81$ dus ?

Logaritmen kun je dus onmiddellijk vertalen naar exponenten. Hieronder staan zes rekenzinnen, drie met logaritmen en drie met exponenten. Elke rekenzin met logaritme betekent hetzelfde als de rekenzin met expo-nenten die ernaast staat.

${}^{3}\log 729 = 6$	$3^6 = 729$
${}^{9}\log x = 1{,}5$	$9^{1,5} = x$
${}^{p}\log 100 = 2$	$p^2 = 100$

3 **a.** Bepaal de getallen x en p.
b. Los op:

${}^{2}\log x = 8$	${}^{8}\log x = 2$
${}^{2}\log 8 = x$	${}^{8}\log 2 = x$
${}^{x}\log 2 = 8$	${}^{x}\log 8 = 2$

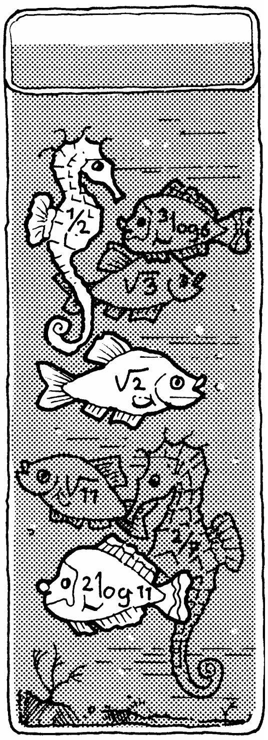
$g^t = x$ *is gelijkwaardig met* ${}^{g}\log x = t$

4 **a.** Om de betekenis te kennen van ${}^{1}\log 100$, vragen we ons af hoe vaak factor 1 in het getal 100 past.
Hoe vaak ?
b. We kunnen ook zoeken naar een getal t waarvoor geldt: $1^t = 100$.
Welk getal is dat ?

We kunnen niet spreken van ${}^{1}\log$.

5 $^{\frac{1}{2}}\log 4 = -2$, want $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$.
Bepaal zo ook de volgende logaritmen.

a.	$^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{8}$	$^{\frac{1}{2}}\log 32$	$^{\frac{1}{2}}\log 1$
b.	$^{1\frac{1}{2}}\log \frac{2}{3}$	$^{1\frac{1}{2}}\log \frac{4}{9}$	$^{1\frac{1}{2}}\log 2\frac{1}{4}$
c.	$^{0,1}\log 10$	$^{0,1}\log 0{,}001$	$^{0,1}\log \sqrt{10}$
d.	$^{g}\log 1$	$^{g}\log g$	$^{g}\log \frac{1}{g}$
e.	$^{g}\log \sqrt[3]{g}$	$^{g}\log \frac{1}{\sqrt{g}}$	$^{g}\log g^{7}$



Nieuwe *getallen*
Soms komen logaritmen mooi uit. Zo is $^{3}\log 9$ geen nieuw getal: het is een andere schrijfwijze voor het getal 2. Meestal komen logaritmen niet mooi uit. Zo kenden we het getal $^{3}\log 10$ nog niet. En het is wel even wennen aan nieuwe getallen. Zoiets heb je al eerder ervaren, namelijk toen je in de derde klas kennis maakte met wortels; en al op de basisschool toen je voor het eerst met breuken ging werken. Eigenlijk is er nu weer hetzelfde aan de hand. Vergelijk maar eens de vragen over breuken, wortels en logaritmen in de volgende opgave.

6 Welke getallen zijn geheel, welke niet ?
$\frac{12}{3}$, $\frac{11}{3}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{7}$, $^{3}\log 9$, $^{3}\log 8$.

De functies $\boxed{\text{MAAL } 3}$ en $\boxed{\text{DEEL DOOR } 3}$ zijn elkaars **inverse**. Dat betekent het volgende.

- **In woorden**

Als je op een getal eerst de ene functie laat werken en daarna op de uitkomst de andere functie, dan krijg je het oorspronkelijke getal terug.

- **In machientjestaal**

$x \rightarrow \boxed{\text{MAAL } 3} \rightarrow \boxed{\text{DEEL DOOR } 3} \rightarrow x$

$x \rightarrow \boxed{\text{DEEL DOOR } 3} \rightarrow \boxed{\text{MAAL } 3} \rightarrow x$

- **In formuletaal**

$(x \cdot 3) : 3 = x$

$(x : 3) \cdot 3 = x$

7 Bereken zonder rekenmachine:

$\frac{1999}{3} \cdot 3$	$\frac{\pi}{3} \cdot 3$
$\frac{1999 \cdot 3}{3}$	$\frac{\pi \cdot 3}{3}$

8 $\boxed{\sqrt[3]{}}$ en $\boxed{(\ \ )^3}$ zijn elkaars inverse.

a. Zeg op drie manieren wat dat betekent: in woorden, in machientjestaal en in formuletaal.
b. Bereken zonder rekenmachientje:

$(\sqrt[3]{1999})^3$	$(\sqrt[3]{\pi})^3$
$\sqrt[3]{1999^3}$	$\sqrt[3]{\pi^3}$

9 $\boxed{(3)^{---}}$ en $\boxed{{}^3\log}$ zijn elkaars inverse.

a. Zeg op drie manieren wat dat betekent: in woorden, in machientjestaal en in formuletaal.
b. Bereken zonder rekenmachientje:

${}^3\log(3^{1999})$	${}^3\log(3^{\pi})$
$3^{{}^3\log 1999}$	$3^{{}^3\log \pi}$

Algemeen $g^{{}^g\log x} = x$, ${}^g\log g^t = t$

10 We controleren deze twee formules nog eens voor drie gevallen die mooi uitkomen.
a. Bereken zonder rekenmachientje:

${}^2\log 8$	${}^2\log \frac{1}{4}$	${}^{0,1}\log 10$
$2^{{}^2\log 8}$	$2^{{}^2\log \frac{1}{4}}$	$0{,}1^{{}^{0,1}\log 10}$

b. Bereken zonder rekenmachientje:

2^5	2^{-3}	$0{,}1^2$
${}^2\log 2^5$	${}^2\log 2^{-3}$	${}^{0,1}\log 0{,}1^2$

11 **a.** Het grondtal van een logaritme kan niet elk getal zijn. Probeer maar eens uit te rekenen wat ${}^1\log 7$, ${}^0\log 7$ en ${}^{-7}\log 7$ zouden moeten zijn. Waarom lukt dat niet ?
b. Ook kun je niet van elk getal de logaritme nemen. Probeer maar eens uit te rekenen wat ${}^2\log(-4)$ en ${}^2\log 0$ zouden moeten zijn. Waarom lukt dat niet ?

Afspraak ${}^g\log x$ bestaat alleen als $x>0$ en $g>0$ en $g\neq 1$.

In paragraaf **6** hebben we het volgende gezien:

Het aantal keer dat factor 2 in het getal x past *gedeeld door* het aantal keer dat factor 2 in het getal 3 past *is* het aantal keer dat factor 3 in het getal x past.

12 In de uitspraak kan in plaats van 2 ook een ander getal gekozen worden, bijvoorbeeld 10. In plaats van 3 kan ook ander getal gekozen worden, bijvoorbeeld g.
Hoe luidt de formule dan ?

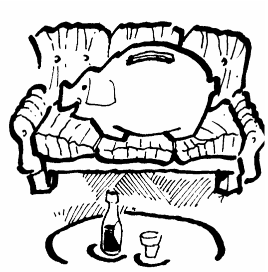
Regel voor het berekenen van logaritmen

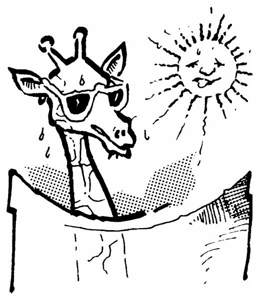
$$^{g}\log x \quad = \quad \frac{\log x}{\log g}.$$

Op je rekenmachientje zit maar voor één logaritme een knop: voor de logaritme met grondtal 10. Dankzij de regel hierboven kun je met die ene knop ook alle andere logaritmen berekenen.

13 Benader op je rekenmachientje in drie decimalen:

$^{4}\log 5$	$^{4}\log 25$
$^{4}\log \frac{1}{5}$	$^{4}\log 20$
$^{\frac{1}{4}}\log 5$	$^{\frac{1}{4}}\log 1\frac{1}{4}$
$\log 5$	$\log 50$





Met behulp van logaritmen kunnen we ook vergelijkingen oplossen, waarin een macht voorkomt waarvan de exponent onbekend is.

Voorbeeld

$5 \cdot 2^{x} = 2$

$2^{x} = 0{,}4$

$x = {}^{2}\log 0{,}4 = \frac{\log 0{,}4}{\log 2} \approx -1{,}32$

14 Los de volgende vergelijkingen op in twee decimalen.

$7^{x} = 11$	$11^{x} = 7$
$2^{x-1} = 11$	$2^{x^2} = 11$
$2^{\sqrt{x}} = 111$	$(\sqrt{2})^{x} = 111$
$(1{,}1)^{x} = 1$	$11 \cdot (1{,}1)^{x} = 1$

15 Los de volgende vergelijkingen op in twee decimalen.

a. $2 + 5^x = 10$

b. $2 + 3^{x-1} = 10$

c. $2 + (\frac{1}{2})^x = 10$

d. $2 \cdot 10^x = 10$

16 Een kapitaal van € 5.432 staat uit tegen 10% rente per jaar. De groei van het kapitaal is exponentieel.

a. 10% erbij optellen komt op hetzelfde neer als vermenigvuldigen met een zekere factor. Welke factor ? Wat is dus de groeifactor per jaar ?

b. Geef een formule voor het kapitaal na t jaar.

c. Zodra het kapitaal is aangegroeid tot € 10.000 wordt het van de bank gehaald.
Hoe lang duurt dat (in maanden nauwkeurig) ?

17 Een glasplaat van 1 cm dikte neemt 20% van het erop vallend licht weg.

a. Leg uit dat door een glasplaat van 2 cm dikte 64% van het licht wordt doorgelaten.

b. Hoeveel procent van het licht wordt doorgelaten door een glasplaat van x cm ?

c. Hoe dik moet je een glasplaat maken om slechts 40 procent van het licht door te laten (in mm nauwkeurig) ?

18 Op 10 juli 1987 werd in Zagreb Matej Gaspar geboren. Hij werd door de VN symbolisch gekozen tot de 5 miljardste aardbewoner. Men schat dat de wereldbevolking elk jaar toeneemt met 1,9%.
Wanneer zal volgens deze schatting de wereldbevolking de 8 miljard bereiken ?

19 a. Los op in drie decimalen nauwkeurig:

$7^x = 4$ $\qquad$ $7^y = \frac{1}{4}$

$(\frac{1}{2})^x = \frac{7}{3}$ $\qquad$ $(\frac{1}{2})^y = \frac{3}{7}$

b. Verklaar het opvallende verband.

20 a. Los op in twee decimalen nauwkeurig:

$2^x = 101$ $\qquad$ $8^y = 101$

$2^x = 0{,}78$ $\qquad$ $8^y = 0{,}78$

b. Verklaar het opvallende verband.

21 Schuimkraag

Als je een pilsje goed tapt, krijg je een flinke schuimkraag. Die schuimkraag wordt steeds lager: hij verdwijnt vanzelf. Duitse "bierologen" hebben vastgesteld dat de hoogte h van de schuimkraag exponentieel in de tijd t af-

neemt: *elke 10 seconden wordt de schuimkraag 20% lager.*
We beginnen met een schuimkraag van 6 cm.
a. Hoe hoog is de schuimkraag na $1\frac{1}{2}$ minuut ?
b. Stel een formule op voor de hoogte h (in cm) van de schuimkraag als functie van de tijd t (in seconden).
c. Hoe lang duurt het voordat de schuimkraag $\frac{1}{2}$ cm is ?

22 a. Stel dat de bevolking van een land elk jaar met 2% groeit.
Hoe lang duurt het dan voordat de bevolking verdubbeld is ?
b. Stel dat van een ander land de bevolking in 14 jaar verdubbelt.
Met hoeveel procent groeit de bevolking van dat land jaarlijks ?

23 De hoeveelheid H van een of andere stof groeit exponentieel in de tijd t volgens de formule: $H = 4 \cdot g^t$.
a. Bereken H als $g = 1\frac{1}{2}$ en $t = 5$.
b. Bereken g als $H = 10$ en $t = 5$.
c. Bereken t als $H = 10$ en $g = 1\frac{1}{2}$.

Antwoorden

Paragraaf 1 Rechtlijnige groei

1 **a.** Ongeveer 40 jaar
b. 22,5 m; 11,5 m
c. Nee
d. ≈ 20 jaar
f. Deel de leeftijd door 2 om de hoogte in m. te krijgen.

2 **a.** Beuk groeit rechtlijnig. De eik hoort bij de populier; ook afnemende groei.
b. Zij heeft het gemiddelde genomen van de twee hoogten bij 10 jaar en 20 jaar. Bij de hoogte na 25 jaar van 20 jaar en 30 jaar.
c. De hoogte bij 15 jaar klopt niet.
d. Ongeveer 38 m (?)

3 **a.** 207 cm
b. Omtrek 160 cm → diameter 51 cm → leeftijd 36 a 37 jaar → hoogte 32 m (zie opgave **2**)

4 **a.** 4 meter in 10 jaar ; 1,2 meter in 3 jaar
b. 21,7 meter
c. In 10 jaar 3,5 m; dus 0,35 m per jaar.
Na 58 jaar dus 24,5 + 8 x 0,35 = 27,3 m.

5 **a.** 4m groei in 10 jaar → 1m groei in 2,5 jaar.
23,5m in 40 jaar + 3 x 2,5 jaar = 47,5 jaar.
b. Tussen 50 jaar en 60 jaar groeit hij 3,5m → 1m groei in 2,86 jaar.
26,5m in 50 jaar + 2 x 2,86 jaar = 55,7 jaar.

6 **a.**

1 mei	€1456
↓ + 5 mnd	↓ + 1170
1 okt	€2626

In 5 maanden €1170 erbij , dus in 1 maand €234 erbij.
Op 1 aug 1456 + 3 x 234 = 2158
b. Op 1 maart 1456 − 2 x 234 = 988
Op 1 dec 1456 + 7 x 234 = 3094

7 **a.** In 8 uur groeit het 24 kg → in 1 uur 3 kg.
Om 16 uur 10 kg + 4 x 3 kg = 22 kg.
b. Om 23 uur 34 kg + 3 x 3 kg = 43 kg
Om 10 uur 10 kg − 2 x 3 kg = 4 kg

8 **a.** In 5 uur 40 kg eraf → in 1 uur 8 kg eraf
Na 19 uur 50 kg + 2 x -8 kg = 34 kg.

b. 40 kg eraf in 5 uur → 1 kg eraf in 0,125 uur
22 kg bij 17 uur + 28 x 0,125 uur = 20,5 uur

9 a. In 26 uur 138 kg erbij → in 1 uur 5,3 kg erbij
Na 30 uur 112 kg + 6 x 5,3 kg = 143,8 kg
b. Na 61 uur 250 kg + 11 x 5,3 kg = 308,3 kg

10 a. 20 kg erbij in 70 uur → 1 kg erbij in 3,5 uur.
75 kg na 30 uur + 15 x 3,5 uur = 82,5 uur.
b. 85 kg na 30 uur + 25 x 3,5 uur = 117,5 uur.

11 a. De grafiek is geen rechte lijn.
b. In 20 jaar 15 m erbij → in 1 jaar 0,75 m.
Na 20 jaar: 14,5 m + 10 x 0,75 m = 22 m.
Dat scheelt 2 m met de werkelijke lengte.

12 a. Nee, de groei van de wereldbevolking is onregelmatig.
b. Nee, je kunt niet uit de gegevens afleiden hoeveel mensen er per jaar (ongeveer) bij komen.

13 a. In 23 jaar 105000 erbij → in 1 jaar 4565,2.
In '80/'81: 45000 + 10 x 4565,2 = 90652
In '85/'86: 45000 + 15 x 4565,2 = 113478
b. Aflezen: '70/'71 = 100% en '93/'94 = 335%
Berekening: 45000 100%
150000 .... → 333%
Het klopt dus.
c. Aflezen: '80/'81 ≈ 200% en '85/'86 ≈ 330%
Berekening: '80/'81 ≈ 201% klopt dus
'85/'86 ≈ 252 % klopt niet
d. Ja, ongeveer 150000 leerlingen.
e. Als de grafiek niet enigszins rechtlijnig is, kun je niet interpoleren.

14 a. -27°C
b. bij 0 m/s: steeds -5
bij 5 m/s: steeds -7
bij 10 m/s: steeds -9
bij 15 m/s: steeds -9
c.

3	-4	-11	-18	-25	-<u>32</u>	-<u>39</u>
0	-9	-18	-27	-<u>36</u>	-<u>45</u>	-<u>54</u>
-5	-14	-23	-<u>32</u>	-<u>41</u>	-<u>50</u>	-<u>59</u>

d. Bij 5 m/s: 5 °C kouder voelt 7 °C kouder aan → 1 °C kouder voelt 1,4 °C kouder aan.
-13 °C voelt aan als -18 + 3 x -1,4 = -22,2 °C
Bij 10 m/s: 5 °C kouder voelt 9 °C kouder aan → 1 °C kouder voelt 1,8 °C kouder aan.
-13 °C voelt aan als -27 + 3 x -1,8 = -32,4 °C

e. Bij -13 °C: 5 m/s hardere wind voelt 10 °C kouder aan
→ 1 m/s harder voelt 2 °C kouder aan.
Bij 7 m/s hoort dus -22,2 + 2 x -2 = -26,2 °C

Paragraaf 2 Evenredig

1 **a.** 35 gram; 7 gram

b. $\frac{180}{120} \cdot 5{,}0 = 7{,}5$ gram

c. drie keer zo veel.

d.

x	60	90	120	150	180	210	240	270	300
y	2,5 3,7	5 5,0	6,25	7,5 8	75 10,	0 11,25	12,5		

e. $y = \frac{5x}{120} = \frac{1}{24}x$

f. ja; ja

2 **a.** nee; ja

b. Als t groter is dan 1 uur en 12 minuten.

3 **b.** nee; ja

c. met z^2

d. $z = \sqrt{A}$

e. $O = 4z = 4\sqrt{A}$

4 Nee, als A k keer zo groot wordt, wordt M $\frac{1}{k}$ keer zo groot.

5 **a.** Het is een rechte lijn door de oorsprong.

b. $30 : 2\frac{1}{2} = 12$

c. snelheid

6 **a.** $2{,}70 \cdot (0{,}024 + 0{,}03) = 0{,}1458$ kg

b. $100 \cdot \frac{8{,}90}{2{,}70} \approx 329{,}63$ gram

c. ja; $\frac{8{,}9}{2{,}7}$

7 **a.** $T = 0{,}1 \cdot \sqrt{L}$

b. $T^2 = 0{,}01 \cdot L$, evenredigheidsconstante: 0,01
Je kunt ook zeggen: $L = 100 \cdot T^2$, dan is de evenredigheidsconstante 100.

c. 3600 : 0,8 = 4500

d. 0,7867 seconde ; 64 – 61,884 = 2,115 cm = 21,15 mm

8 **a.** $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

b. $O = \frac{1}{2} \cdot z \cdot z \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $c = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

c. 9 keer

9 a. 4 keer
b. 8 keer

10 a. inhoud = 1, oppervlakte = 6
b. $O^3 = (6r^2)^3 = 216r^6$, $I^2 = (r^3)^2 = r^6$,
evenredigheidsconstante = 216

11 a. $H = 11{,}2 \cdot \sqrt[3]{80^2} \approx 207{,}9 \text{ dm}^2$

b. $G = \sqrt{\left(\frac{H}{11{,}2}\right)^3}$

12 a. CADBE
b. 7 (A) ; $8\frac{1}{2}$ (B) ; 6 (C) ; 8 (D) ; $8\frac{1}{2}$ (E)

13 a. 1
b. gelijkvormig
c. Als de korte zijde x is, dan is de lange zijde 4x en A = $4x^2$ en $O^2 = (10x)^2 = 100x^2$, dus $A = \frac{1}{25}O^2$.
d. De zijden zijn x, x, ex en ex, dus $O = 2ex+2x = 2(e+1)x$ en $A = ex^2$, dus $\frac{A}{O^2} = \frac{ex^2}{(2(e+1)x)^2} = \frac{e}{4(e+1)^2}$

14 a. $A \cdot T = 30$
b. 36 leerlingen
c. T wordt 2 keer zo klein; T wordt $\frac{2}{3}$ keer zo groot
d. Het aantal minuten per leerling was $\frac{30}{x}$, dat is nu $\frac{30}{x} + \frac{1}{20}$ (want 3 seconden is $\frac{1}{20}$ minuut) en het aantal leerlingen nu is x–1.
e. x = 25 of x = -24 (de negatieve oplossing vervalt)
f. 24 leerlingen

15 a. $T = \frac{600}{V}$
b. $\frac{600}{90} - \frac{600}{100} = \frac{2}{3}$ uur, dus 40 minuten
c. Het gaat ook om de tijdsduur. Op de heenweg rijden ze 6 uur op de terugweg rijden ze 5 uur, dus 1200 km in 11 uur. De gemiddelde snelheid is: $\frac{1200}{11} \approx 109{,}09$ km/u

16 $(1\frac{1}{2} \cdot 20 + 1 \cdot 30) : 2\frac{1}{2} = 24$ km/u ,
$(3 \cdot 20 + 2 \cdot 30) : 5 = 24$ km/u

17 $y = 2x$; $y = \frac{6}{z}$; $z = \frac{3}{x}$

Paragraaf 3 Toepassingen

1 **a.** A = 2
c. $P = \frac{18A}{72} = 0{,}25A \rightarrow$ P en A zijn evenredig
d. $P = \frac{54}{G} \rightarrow$ grafiek is geen rechte lijn door (0,0)
Dus niet evenredig. (zie grafiek bij **b**)
e. $0{,}5 = \frac{18A}{G} \rightarrow 0{,}5G = 18A \rightarrow$ G en A evenredig

2 **a.** ≈ 5200 kcal/uur
b. ≈ 5500 kcal/uur
c. ongeveer 33 kcal/uur; ongeveer 40 kcal/uur
d. Het kost meer extra energie om 1 m^3 extra op 18 °C te brengen i.p.v. op 15 °C.
e. Ongeveer 19,7 °C
f. 97 m^3
g. 15 °C 32,3 kcal/uur per m^3
18 °C 42,6 kcal/uur per m^3
21 °C 62,5 kcal/uur per m^3
h. 6800 + 24 x 42,6 = 7822 kcal/uur
i. 15 °C $C = 32{,}3 \cdot I + 870$
18 °C $C = 42{,}6 \cdot I + 1900$
21 °C $C = 62{,}5 \cdot I + 2500$

3 **a.** V = 90: M = 24R + 62
b. V = 60 → M = 35
V = 90 → M = 75
V = 120 → M = 125
Als V 30 groter wordt, wordt M eerst 40 groter en dan 50 dus geen gelijke toenamen.

4 **a.** totaal € 5520 ; rente € 1520 is 38%
b.

2000	2760	760	38%
4000	5520	1520	38%
6000	8280	2280	38%
8000	11040	3040	38%
10000	13800	3800	38%

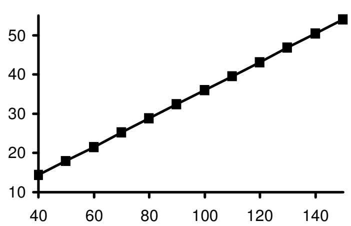
c. Nee, 32%
d. Nee, een grote lening kan een lager rentepercentage geven
e. $R = M \cdot T - L$; $P = \frac{R}{L} \cdot 100$
f. $A = 2 \cdot (4C + 1) - 10 = 8C - 8$; $A = -24C - 24$
g. $P = \frac{M \cdot T - L}{L} \cdot 100 = \frac{M \cdot 0{,}02 \cdot L - L}{L} \cdot 100 = (0{,}02 \cdot M - 1) \cdot 100$
$= 2M - 100$.
Controle: $P = 2 \cdot 69 - 100 = 38\%$ klopt

5 **a.** V = 2.160.000 kcal → 357 m^3 gas
b. 4 cm steenwoldeken erbij geeft R = 1,5 en het gewenste warmteverlies.
c. 18^0 C – gem. etmaaltemperatuur
d. Het verschil tussen de formules voor V en V^* is 'tijd · ΔTemp' i.p.v. '24 · aantal graaddagen'.
24 · graaddagen = 24 · 52 = 1248
tijd · ΔTemp = $24 \cdot 7 \cdot (18 - 10\frac{4}{7}) = 1248$
De formules leveren dus hetzelfde op.

e. R = 0,67 → V = 107319 kcal
R = 1,61 → V = 44661 kcal
verschil 62658 kcal, dat is 10,4 m^3 gas.
f. Doorgangsverlies wordt 1872,75 minder.
Zoninstraling wordt 57 m^3 minder → verbruik 4600 + 57 – 1872,75 = 2784,25
Afname 1815,75 m^3.

6 **a.** Bijvoorbeeld: $0 \le x \le 400$, $0 \le y \le 20$
b. k wordt dan $\sqrt{2} \approx 1,4$ keer zo groot.
Vier keer zo groot.
c. h = 36 → k = 6
h = 36,4 → k = 6,033
Dus met 0,033 minuut.
Gemiddeld is dat per voet: 0,033 : 0,4 = 0,0825.
d. $k = 0,03 \cdot \sqrt{h}$

7 **a.** c = 0,3
b. $0 \le y \le 37500$
c. 11,9 m/s
d. w = 10 → E = 300
w = 10,6 → E = 357,3
Dus met 57,3 watt.
Dat is gemiddeld 357,3 : 0,6 = 599,5 watt per m/s.

8 **a.** Groot verzet ; klein verzet
b. 21,5 km/h
c. Dat klopt.
d.


e. T = 2,8 · S

Paragraaf 4 Exponentiële groei

1 **a.** $\frac{1}{8}$ deel ; $\frac{1}{32}$ deel

b. Oneindig oud, maar de kans dat dat gebeurt is ook oneindig klein.

2 **a.** $2 \cdot 2 = 4$
b. 1,8 keer

3 **a.** Ja, want $1,5 > 1,2$.
b. 1,5 : 1,2 = 1,25 keer zo duur

4 **a.** 1,15 ; 1,015 ; 3,47 ; 1,0024
0,85 ; 0,985 ; 0,01 ; 0,9976
b. 200% ; -25% ; 3% ; -85%

5 **a.** $p = 50\%$; 1,5 keer zo groot, klopt dus
b. $x = 1,5$; 50%, klopt dus

6 Met 75,5%

7 **a.** Nee ; nee ; beiden zijn 1% in prijs gezakt.
b. Even duur

8 **a.** 16%

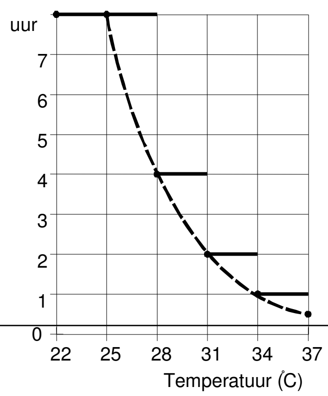
9 **a.**

T	0	1	2	3	4
K	1000	1100	1210	1331	1464,1

b. 1,1 keer
c. 1,331 keer
d. $1000 \cdot 1,1^{10} = 2593,74$
e. $K(t) = 1000 \cdot 1,1^{t}$

10 **a.** Van 200 naar 752,5 is 3,7625 keer zo groot.
b. Ongeveer 43 miljard.
c. Er is nooit genoeg eten voor zo'n groep.

11 **a.** 8 ; 4 ; 2 ; 1
b.



c. 1) 8 uur
2) 5,7 uur
d. $A(h) = 8 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{3}h}$
e. $A(T) = 8 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{3}(T-25)}$

12 a. 13 ; 14 (12 + korrels>16 mm + korrels< $\frac{1}{256}$ mm)
b. $\frac{1}{256} \cdot 2^{n-1}$
c. 1004, 843, 708, 595, 500, 420, 353, 296, 249, 209 (vermenigvuldigingsfactor 0,84)
d. Naar rechts worden de klassen smaller.
e. Of een zandkorrel 590 of 540 µm is, maakt niet zo veel uit. Of een korrel 90 of 40 µm maakt wel veel uit. Het is dus beter naar relatieve verschillen te kijken, dan naar absolute.

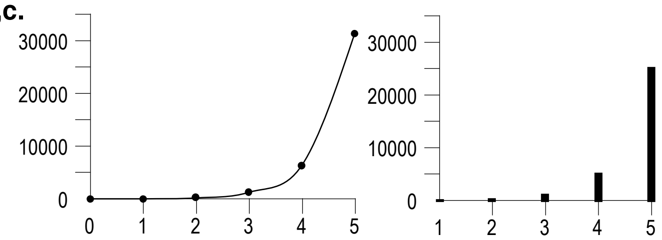
13 a. 179 forint
b. $P(t) = 50 \cdot 1{,}2^{t}$
c. t = 3,8 ; oktober 1993
d. Augustus 1997 ; na 11,4 jaar

14 a. 10706 ; 11220
b. 6,6%
c. $P(t) = 8000 \cdot 1{,}066^{t}$

15 a. 1,959 keer zo groot
b. 1,943 keer zo groot
c. 14,2%

16 a. Minder
b. 40% (dus 60% blijft per keer zitten)
c. $S(n) = 100 \cdot 0{,}60^{n}$
d. $S(6) = 100 \cdot 0{,}0467 = 4{,}67\%$
e. Na 8 keer zuiveren

17 a. $y = 10 \cdot 5^{x}$
b,c.



d.

aantal jaar	0	1	2	3	4	5
konijnen	10	50	250	1250	6250	31250
		40	200	1000	5000	25000

Als t een jaar groter wordt, wordt x 5 keer zo groot, dus de formule voor de toename zou luiden: $x(t) = 40 \cdot 5^{x-1}$.

18 a. Nee, in de periode 1989 - 1995 is het aantal nieuwe inwoners per jaar meer dan in de periode 1983 - 1989.

b. $\frac{47358}{42320} = 1{,}12$

$\frac{54023}{47358} = 1{,}14$

c. Nee; het kan ook gewoon toeval zijn.

d. $g = \sqrt[6]{1{,}12} = 1{,}019$

19 a. $S(t) = 100 \cdot 0{,}98^t$

b. Ongeveer 34 jaar

20 a. 12,5 mg

b. Per jaar is dit $100\% - (100\% \cdot 0{,}5^{1/9}) \approx 7{,}4\%$

c. $Pu(t) = 100 \cdot 0{,}926^t$

21 a. Verdubbelingstijd = $\frac{70}{2}$ = 35 jaar

b. $1{,}02^{35} \approx 2$

c. $14 = 70 : x$; $x = 5\%$

d. $g = 100\% \cdot (\sqrt[14]{2} - 1) = 5{,}07\%$

Paragraaf 5 Gebroken en negatieve exponenten

1 a. 64

b. $3{,}7 \cdot 10^{19}$ (ongeveer 65 generaties)

c. Je telt heel veel voorouders dubbel.

2 a. 4, 8, 16

c. $B(t) = 2^t$

d. Ongeveer 5,6

3 a. 2^8

b. 2^2

c. 2^{10}

4 a. $2^2 \times 2^3 = 2^5$

b. $2^p \times 2^q = 2^{p+q}$

5 $2^p : 2^q = 2^{p-q}$

6 **a.** $(2^3)^4 = 2^{12}$
b. $(2^p)^q = 2^{pq}$

7 **a.** 2^{12}, 2^2, 2^{35}, 2^8, 2^6, 2^0.

8 **a.** 10^4
b. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$

9 x^2 , y^7 , 1 , p^3q^2,
2 , y^5 , p^{15}, ab^2 .

10 2^{k+5}, 2^{k+1}, 2^{2k}, 2^{3k}, 2^{9k}, 2^{k+2m},
2^{5-k}, 2^{k-1}, 2^2 , 2^{3k-3}, 2^k , 2^{2m-k} .

11 **a.**

onjuist	onjuist
juist	juist
onjuist	juist

b. $3^n \cdot 9^n = 27^n$; $4^n : 8^n = (\frac{1}{2})^n$; $2^n + 2^n = 2^{n+1}$

12 **a.** $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25 \neq 2$
b. $1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96 \neq 2$
c. 1,414
d. 1,189 , 1,260
e. Hoeveel keer zo groot de kolonie (die elk uur 6 keer zo groot wordt) wordt in 40 minuten.
$6^{\frac{2}{3}} \approx 3{,}3$; $3{,}3^3 = 35{,}937$; $(6^{\frac{2}{3}})^3 = 6^{\frac{2}{3} \cdot 3} = 6^2 = 36$
f. Hoeveel keer zo groot de bacteriekolonie met groeifactor 6 per uur wordt in 1 uur en 20 minuten.
$6^{\frac{4}{3}} \approx 10{,}9$; $10{,}9^3 = 1295{,}029$
$(6^{\frac{4}{3}})^3 = 6^{\frac{4}{3} \cdot 3} = 6^4 = 1296$

13 a. 365,5878759 ≈ 365,25, klopt dus aardig.

b. 10781,17152 dagen ≈ 29,52 jaar.

14 a. 10, 100, 2, 8, 7, 343

15 Klopt!

16 $a^{\frac{3}{4}}$, $b^{\frac{1}{3}}$, c^7, d.

17 $a^{\frac{3}{2}}$, $b^{\frac{2}{3}}$, $c^{\frac{1}{4}}$, $d^{\frac{5}{6}}$.

18 a. $x^{1\frac{1}{2}} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$

19 $x^{2\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{4}{3}}$, $x^{\frac{3}{4}}$, $x^{\frac{2}{3}}$

20 a. 5,670 m^2 ; 0,012 m^2

b. 10000 : 1 ; 464,159 : 1

c. $H_{klein} = c \cdot g^{\frac{2}{3}}$ en $H_{groot} = c \cdot (8g)^{\frac{2}{3}} = c \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot g^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot c \cdot g^{\frac{2}{3}}$.

Dus $H_{groot} = 4 \cdot H_{klein}$.

d. $1 : 7^{\frac{2}{3}}$

e. Hoe groter het gewicht, hoe kleiner verhoudingsgewijs de huidoppervlakte.

21 b. $2^{0,725} \cdot 8^{0,425} = 4$, dus dat klopt!

22 a. $\frac{1}{8}$ keer zoveel

b. Een bacteriekolonie wordt elk uur 6 keer zo groot. $6^{-1,5}$ is hoeveel keer zo groot de bacteriekolonie wordt als je 1,5 uur teruggaat in de tijd.

c. Een bacteriekolonie wordt elk uur 6 keer zo groot.

Als je 1,5 uur en nog eens 2,3 uur teruggaat in de tijd wordt de kolonie $6^{-1,5} \cdot 6^{-2,3}$ keer zo groot. Dan ben je in totaal 3,8 uur terug gegaan in de tijd en is de kolonie dus $6^{-3,8}$ keer zo groot geworden.

23 a. $g^p \cdot g^{-p} = g^p \cdot \dfrac{1}{g^p} = 1$ en ook $g^0 = 1$

b. $g^p : g^{-p} = g^p : \dfrac{1}{g^p} = g^p \cdot g^p = g^{2p}$

24 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, 3 , 27, 100, 100.000, $2\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$

25 $(\dfrac{1}{g})^p = (g^{-1})^p = g^{-p}$

Paragraaf 6 Introductie logaritmen

1 a. 4 ; 6

b. 6 ; 9

2 **a.** B + 10% van B = B + 0,1·B = 1,1·B
b. € 2593,74
c. 24 keer
d. Hoe vaak past de factor 1,06 in 10 ?
e. 39 keer

3 **a.** 7 keer
b. 14 keer
c. 21 keer

4 16 keer

5 **a.** 8 keer ; 9 keer
b. $31^2 < 1000$ en $32^2 > 1000$

6 **a.** 3 ; 3 ; 9
b. 5 ; 2 ; 10
c. 4 ; 2 ; 8

7 **a.** 3a keer
b. a · b keer

8 **a.** 7 keer ; 24 keer
b. $2 \approx 1{,}1^7$ en $10 \approx 1{,}1^{24}$, dus $10 \approx (1{,}1^7)^{24/7} = 2^{24/7}$
2 past dus $24/7 \approx 3{,}4$ keer in 10

9 **a.** 26 keer ; 7 keer ; 26 : 7 ≈ 3,7 keer
b. 66 keer ; 36 keer ; 66 : 36 ≈ 1,83 keer
c. 85 : 36 ≈ 2,36 keer
d. 76 : 24 ≈ 3,17 keer

10 **a.** 92 keer ; 69 keer ; 92 : 69 ≈ 1,33 keer
b. 92 : 26 ≈ 3,54 keer
c. 69 : 9 ≈ 7,77 keer ; dit antwoord is nauwkeuriger dan het antwoord op **8a**.
d. 69 : 35 ≈ 2 keer

11 138 keer ; 207 keer

12 **a.** 22 : 69 ≈ 0,32 keer
b. 3 + 0,32 = 3,32 keer
c. 3 + 12 : 69 ≈ 3,17 keer
d. 6 + 44 : 69 ≈ 6,64 keer
e. 6,64 : 3,17 ≈ 2,10 keer

13 **a.** 2,58 ; 6,97 ; 2,70
b. 2,32 ; 6,97 ; 3

c. 2,09 ; 3,10 ; 4,10

14

4	1	4
5	2	2
6	3	1

15 a. 3 ; 2 ; 1,5
b. 3 ; 2 ; 1,5

Paragraaf 7 Logaritmen

1 a. De kolonie wordt in t uur 2^t keer zo groot en de kolonie moet 3000/500 = 6 keer zo groot worden.
b. $2^{2,5} \approx 5,66$ en $2^{2,6} \approx 6,06$

2 a. Het aantal keer dat factor 3 in het getal 81 past.
b. 4

3 a. x = 27 , p = 10
b.

x = 256	x = 64
x = 3	$x = \frac{1}{3}$
$x = \sqrt[8]{2}$	$x = \sqrt[2]{8}$

4 a. Oneindig vaak
b. Dat getal t bestaat niet, want $1^t = 1$ voor alle t.

5

a.	3	-5	0
b.	-1	-2	2
c.	-1	3	$-\frac{1}{2}$
d.	0	1	-1
e.	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	7

6 Geheel zijn: $\frac{12}{3}$, $\sqrt[3]{8}$, ${}^{3}\log 9$; de andere zijn niet geheel.

7

1999	π
1999	π

8 a. In woorden Als je van een getal eerst de derdemachtswortel neemt en daarna van de uitkomst de derde macht, dan krijg je het oorspronkelijke getal weer terug. En omgekeerd.
In machientjestaal
x ⟶ DERDEMACHTSWORTEL ⟶ DERDE MACHT ⟶ x en
x ⟶ DERDE MACHT ⟶ DERDEMACHTSWORTEL ⟶ x
In formuletaal $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ en $\sqrt[3]{x^3} = x$
b.

1999	π
1999	π

9 **a.** **In woorden** Als je drie tot de macht een getal berekent en daarna van de uitkomst de drie-log neemt, dan krijg je het oorspronkelijke getal weer terug. En omgekeerd.

In machientjestaal

x → DRIE TOT DE MACHT → DRIE-LOG → x en

x → DRIE-LOG → DRIE TOT DE MACHT → x

In formuletaal ${}^{3}\log(3^{x}) = x$ en $3^{{}^{3}\log x} = x$

b.	1999	π
	1999	π

10 a.	3	-2	-1
	8	$\frac{1}{4}$	10
b.	32	$\frac{1}{8}$	0,01
	5	-3	2

11 **a.** $1^{x} = 1$ voor elk getal x;
$0^{x} = 0$ voor $x > 0$.
$(-7)^{x} = 7$ heeft geen oplossing
b. $2^{x} > 0$ voor elk getal x, dus niet gelijk aan -4 of 0.

12 $\frac{\log x}{\log g} = {}^{g}\log x$

13	1,161	2,322
	-1,161	2,161
	-1,161	-0,161
	0,699	1,699

14	1,232	0,812
	4,459	1,860 of -1,860
	46,164	13,589
	0,000	-25,159

15 **a.** ${}^{5}\log 8 \approx 1{,}29$
b. $1 + {}^{3}\log 8 \approx 2{,}89$
c. ${}^{\frac{1}{2}}\log 8 = -3$
d. $\log 5 \approx 0{,}70$

16 **a.** 1,1 ; 1,1
b. $K(t) = 5432 \cdot 1{,}1^{t}$.
c. 77 maanden (t = 6,403069...).

17 **a.** 20% minder licht per cm, dus 80% blijft over.
Vermenigvuldigingsfactor per cm = 0,8 en $0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$.
b. $L = 100 \cdot 0{,}8^{x}$ procent.
c. 41 mm

18 Ongeveer 24,97 jaar later.

19 a. 0,712 -0,712
-1,222 1,222
b. $(a^x)^{-1} = a^{-x} = a^y$, dus y = -x.

20 a. 6,66 2,22
-0,36 -0,12
b. $8^y = (2^3)^y = 2^{3y} = 2^x$, dus 3y = x.

21 a. $6 \cdot 0{,}8^9 \approx 0{,}8$ cm
b. $h = 6 \cdot 0{,}8^{0{,}1t}$
c. $6 \cdot 0{,}8^{0{,}1t} = 0{,}5 \rightarrow t \approx 111{,}36$, dus ruim 111 seconden

22 a. $1{,}02^t = 2 \rightarrow t \approx 35$, dus 35 jaar
b. $g^{14} = 2 \rightarrow g = 1{,}051 \rightarrow$ met ruim 5% per jaar.

23 a. 30,375
b. 1,20
c. 2,26